

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ Α' ΠΕΡΙΟΔΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Στην πρώτη γραμμή προσθέτουμε την δεύτερη και τρίτη γραμμή, ήτοι:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix}$$

Στο επόμενο βήμα από την δεύτερη και τρίτη στήλη αφαιρούμε την πρώτη, άρα:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} &= (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -\beta - \gamma - \alpha & 0 \\ 2\gamma & 0 & -\gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(-\beta - \gamma - \alpha)(-\gamma - \alpha - \beta) = (\alpha + \beta + \gamma)^3. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & -1 \\ \alpha - 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Έτσι το δοσμένο σύστημα γίνεται ισοδύναμο:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + (\alpha - 1)x_3 = -1 \\ (\alpha - 1)x_1 = 0 \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις αναφορικά με το a

i) $a = 1$

Τότε το σύστημα (Σ) γίνεται:

$$\begin{cases} x_1 + 2 + x_3 = 1 \\ -x_2 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -1 - x_1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, 1, -1 - x_1)^T$$

Το οποίο έχει άπειρες λύσεις για $x_1 \in \mathbb{R}$.

ii) $a \neq 1$

Τότε το σύστημα (Σ) γίνεται:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + (\alpha - 1)x_3 = -1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2[1 + (\alpha - 1)x_3] + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 + (\alpha - 1)x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\alpha - 1)x_3 = -1 \\ x_2 = 1 + (\alpha - 1)x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases} (\Sigma_1)$$

Αν $\alpha = \frac{1}{2}$ το σύστημα (Σ_1) λόγω της 1^{ης} εξίσωσης είναι αδύνατο.

Αν $\alpha \neq \frac{1}{2}$ το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση την: $\begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \\ x_3 = \frac{-1}{2\alpha - 1} \end{bmatrix}$.

**ΘΕΜΑ 3ο:**

α) $Q = I - 2uu^T$. Επίσης: $Q^T = (I - 2uu^T)^T = I - 2(uu^T)^T = I - 2(u^T)^T u^T = I - 2uu^T = Q \Rightarrow Q^T = Q$.
 Συνεπώς: $QQ^T = Q^T Q = QQ = (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) = I - 2uu^T - 2uu^T + 4(uu^T)(uu^T) =$

$$I - 4uu^T + 4u(u^T u)u^T = I - 4uu^T + 4u(uu)u^T = I - 4uu^T + 4\|u\|^2 uu^T = I - 4uu^T + 4uu^T = I$$

καθώς $\|u\|^2 = 1$. Τελικά $QQ^T = Q^T Q = I$ δηλαδή ο Q είναι ορθογώνιος.

$$\beta) uu^T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Άρα } Q = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο:

α) Είναι: $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -6-\lambda \end{bmatrix}$, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(-6 - \lambda) + 24 = \lambda^2 + \lambda - 6$.

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

Συνεπώς ο δοσμένος πίνακας 2×2 έχει 2 διακριτές ιδιοτιμές οπότε διαγωνιοποιείται. Βρίσκουμε τα ιδιοδιάνυσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή.

Για την $\lambda_1 = 2$ έχουμε:

$$\mathbb{O} = (A - 2I)x = \begin{bmatrix} 5-2 & -4 \\ 6 & -6-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2$$

Δηλαδή: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R}$. Επομένως στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για την $\lambda_2 = -3$ έχουμε:

$$\mathbb{O} = (A + 3I)x = \begin{bmatrix} 5+3 & -4 \\ 6 & -6+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 8x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Δηλαδή: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, x_2 \in \mathbb{R}$. Επομένως στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας P με στήλες τα v_1 και v_2 διαγωνιοποιεί τον πίνακα A δηλαδή:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Οπότε: } A^k = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}.$$



β) Είναι $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$, από το Θεώρημα των *Caley-Hamilton* γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, ήτοι: $p_A(A) = A^2 + A - 6I = 0 \Rightarrow A^2 + A = 6I \Rightarrow A(A + I) = 6I \Rightarrow A^{-1}A(A + I) = 6A^{-1}I \Rightarrow A + I = 6A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}(A + I)$.

$$\text{Άρα: } A^{-1} = \frac{1}{6} \left\{ \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

α) $p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda + 172 \Rightarrow \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda + 172 \xrightarrow{\lambda=0} \det(B) = 172$.

β) Επειδή ο πίνακας A έχει διακριτές ιδιοτιμές θα διαγωνοποιείται. Επομένως θα μπορεί να γραφεί ως

$$A = PDP^{-1} \text{ με}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P π.χ. με τον επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

Έτσι

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 3/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$