



ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021 Β' ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο: Χρησιμοποιώντας ιδιότητες οριζουσών, λύστε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & x & -2 & 1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ΘΕΜΑ 2ο: Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής *Gauss-Jordan* για να επιλύσετε το ακόλουθο σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

ΘΕΜΑ 3ο: α) Αν B είναι ο αντίστροφος του πίνακα A^2 να δείξετε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο AB .
β) Βρείτε όλους τους 2×2 πίνακες οι οποίοι είναι διαφορετικοί των I_2 και $-I_2$ και ταυτίζονται με τον αντίστροφό τους.

ΘΕΜΑ 4ο: α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές ενός 4×4 πίνακα A αν γνωρίζουμε ότι: το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, μια ιδιοτιμή είναι η $\lambda_1 = 2 - 3i$, η ορίζουσα του πίνακα A είναι -13 ($\det(A) = -13$) και το ίχνος του πίνακα A είναι 4 ($\text{tr}(A) = 4$).

β) Δείξτε ότι η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του.

ΘΕΜΑ 5ο: Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -3)$ και $v_3 = (-1, 1, 0)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένου με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ αποτελεί βάση του εν λόγω χώρου.

β) Με την μέθοδο *Gram-Schmidt* από αυτή την βάση κατασκευάστε μία άλλη βάση B που να είναι ορθοκανονική.

ΘΕΜΑ 1ο:		2,0
ΘΕΜΑ 2ο:		2,0
ΘΕΜΑ 3ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 4ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 5ο:	α)	0,5
	β)	1,5
ΣΥΝΟΛΟ		10,0