Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Εισαγωγή στα Σήματα

Κυριακίδης Ιωάννης

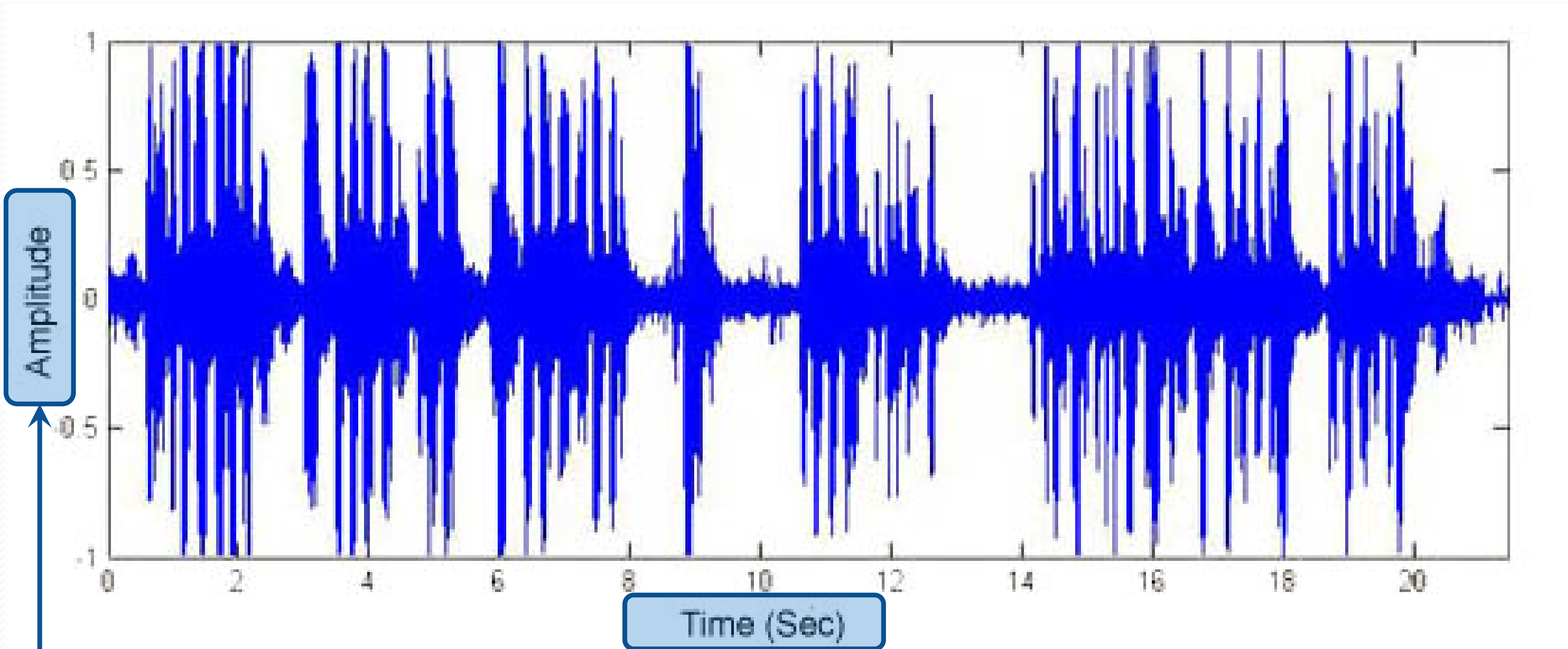
2011

Τελευταία ενημέρωση: 11/11/2011

Τι είναι ένα σήμα;

- Ως **σήμα** ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) όταν αυτή μεταβάλλεται συναρτήσει άλλων ποσοτήτων (ανεξάρτητες μεταβλητές).
- Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών.
- Τα σήματα περιέχουν πληροφορία σχετικά με την συμπεριφορά ή τη φύση ενός φαινομένου.

Παράδειγμα σήματος

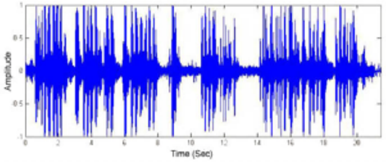


- Εξαρτημένη μεταβλητή

- Ανεξάρτητη μεταβλητή

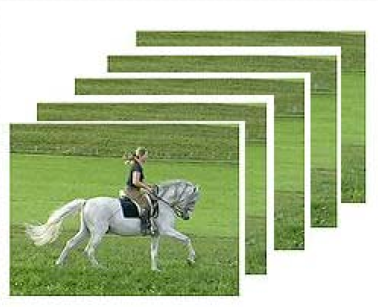
Διαστάσεις σημάτων

- Ανάλογα με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών έχουμε σήματα μιας μεταβλητής ή διάστασης (μονοδιάστατα, 1-D), δύο μεταβλητών ή διαστάσεων (δισδιάστατα, 2-D) και πολλών μεταβλητών ή διαστάσεων (πολυδιάστατα, N-D).
  - Η ομιλία, η μουσική, η μεγίστη ημερήσια θερμοκρασία είναι παραδείγματα **μονοδιάστατων σημάτων**, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.



  - Μια εικόνα (φωτογραφία) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα **σήματος δύο διαστάσεων**. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η φωτεινότητα της εικόνας και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι δύο χωρικές συντεταγμένες.

  - Σήμα τριών διαστάσεων μπορεί να είναι η ακολουθία εικόνων (video), όπου οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι χωρικές συντεταγμένες και η τρίτη είναι ο χρόνος.



Είδη σημάτων

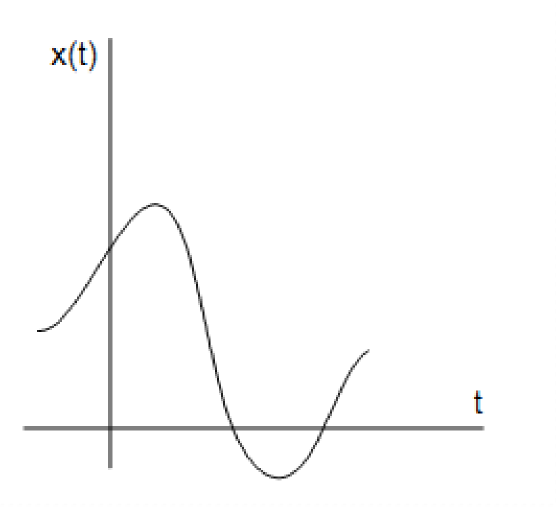
- Τα σήματα ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:
  - στα σήματα συνεχούς χρόνου (αναλογικά)
  - στα σήματα διακριτού χρόνου.

- Αναφερόμαστε σε αυτά ως διακριτού “χρόνου”, όμως δεν αποκλείεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος, όπως για παράδειγμα η απόσταση ή η θερμοκρασία.

Σήματα συνεχούς χρόνου

- Στα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής.
- Δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται σε κάθε χρονική στιγμή της ανεξάρτητης μεταβλητής από την αρχή μέχρι το τέλος.
- *Για παράδειγμα τέτοια σήματα είναι:*
  - *η ομιλία ως συνάρτηση του χρόνου*
  - *η ατμοσφαιρική πίεση ως συνάρτηση του ύψους.*
- Ένα αναλογικό σήμα περιγράφεται ως μια συνάρτηση x(t),

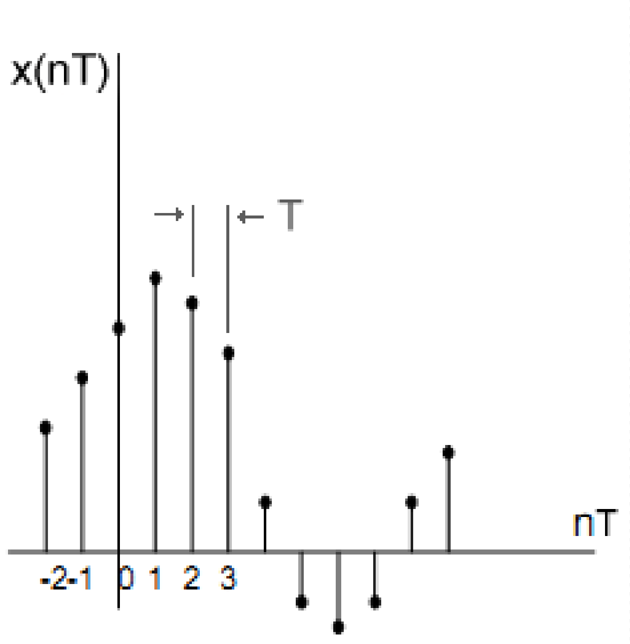
  όπου t πραγματικός αριθμός.



Σήματα διακριτού χρόνου

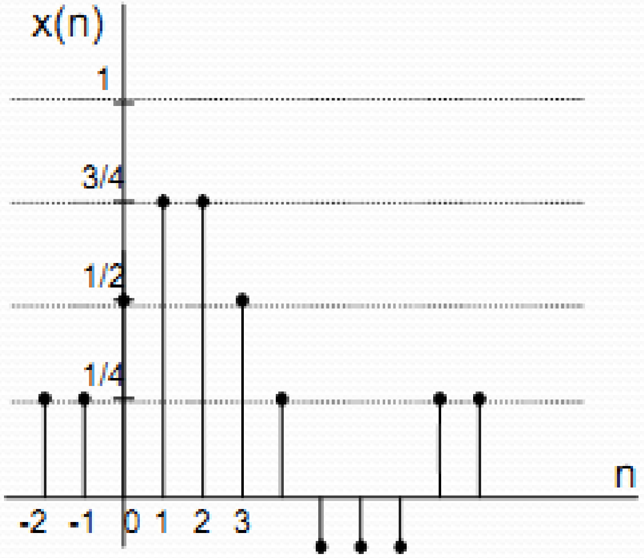
- Στα σήματα διακριτού χρόνου (discrete time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή.
- Δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές (διακριτό σύνολο τιμών) της ανεξάρτητης μεταβλητής.
- Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να περιγραφή από μια συνάρτηση x(nT),

  όπου T είναι η περίοδος μεταξύ γειτονικών τιμών και n είναι ένας ακέραιος (-∞<n<∞).

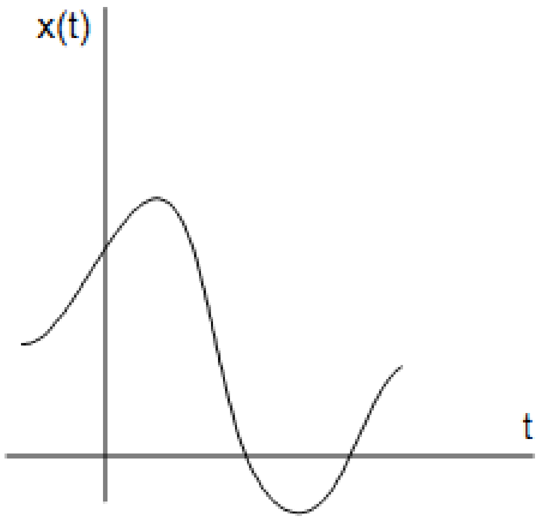


Ψηφιακά σήματα

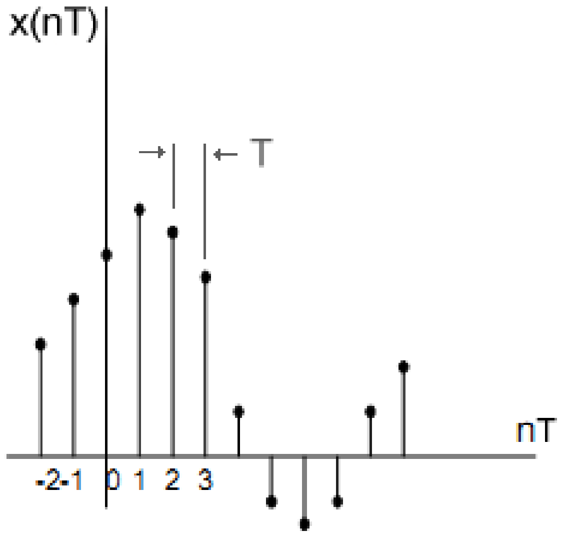
- Όταν κάθε δείγμα ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι κβαντισμένο και στη συνέχεια κωδικοποιημένο, το τελικό σήμα αναφέρεται ως ψηφιακό σήμα (digital signal).
- Ένα κβαντισμένο σήμα μπορεί να λάβει μόνο διακριτές τιμές συνήθως (αλλά όχι πάντα) ίσης απόστασης. Η έξοδος από έναν υπολογιστή είναι ένα παράδειγμα ψηφιακού σήματος.
- Φυσικά ένα αναλογικό σήμα μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό με δειγματοληψία στο χρόνο, κβαντισμό και κωδικοποίηση, έτσι μόνο μπορεί να παρασταθεί σε bits.



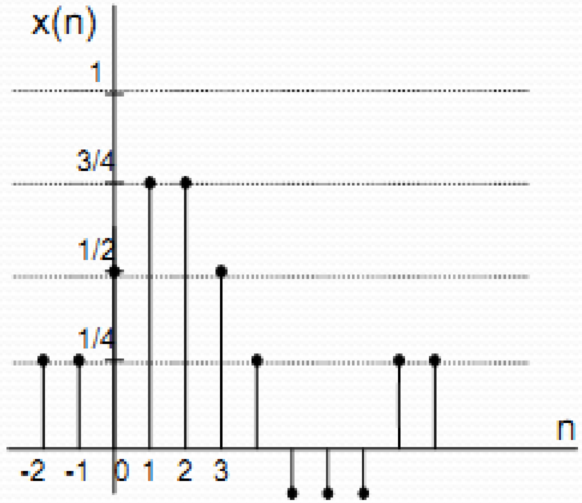
Είδη σημάτων



Σήμα συνεχούς χρόνου



Σήμα διακριτού χρόνου

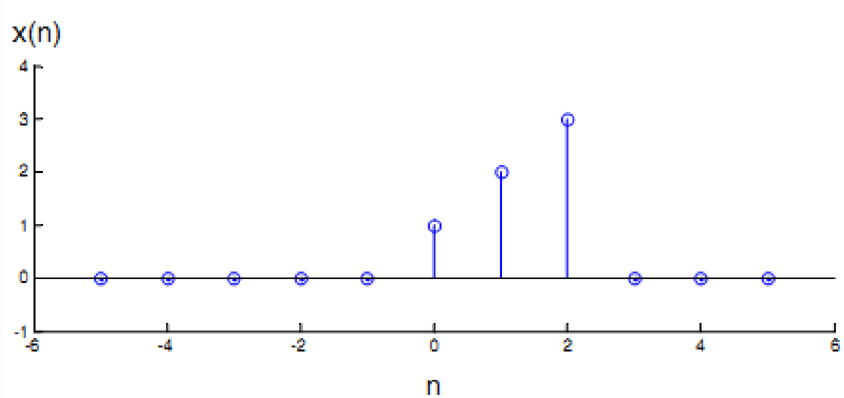


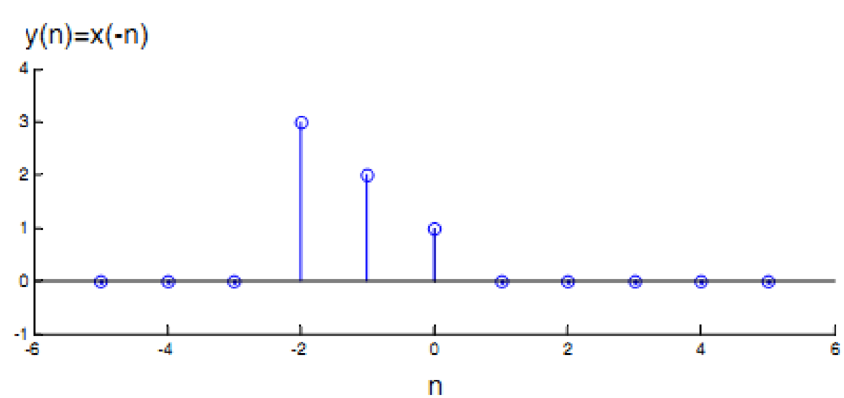
Ψηφιακό σήμα

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική αντιστροφή

- Γενικά εάν σε ένα σήμα x(n) εφαρμοσθεί ένας μετασχηματισμός στην ανεξάρτητη μεταβλητή n, για παράδειγμα f(n), τότε προκύπτει το σήμα x(f(n)).
- Αν **f(n) = -n** τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί αντιστροφή και αλλάζει στο σήμα y(n)=x(-n)
- Η γραφική αναπαράσταση του x(-n) είναι συμμετρική ως προς τον κάθετο άξονα με αυτήν του x(n).





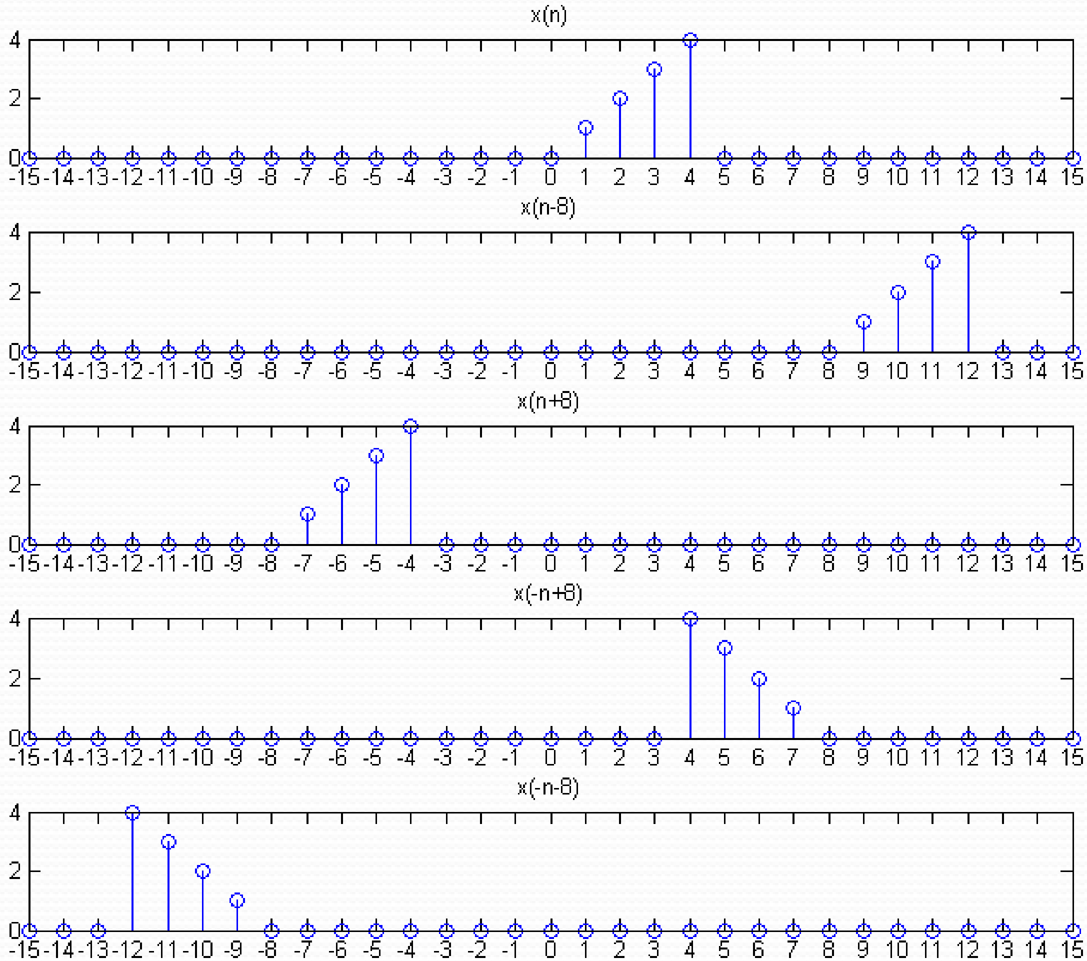
Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Μετατόπιση (ολίσθηση)

- Αν $f(n)=n-n_0$, τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί μετατόπιση ή ολίσθηση κατά n_0 και μετασχηματίζεται στο σήμα $y(n)= x(n-n_0)$
- Στην γραφική παράσταση του $x(n-n_0)$ υπάρχει μετατόπιση της γραφικής παράστασης του $x(n)$ κατά n_0, στον οριζόντιο άξονα.
  - Αν $n_0 > 0$, τότε παρατηρούμε μετατόπιση προς τα δεξιά (έχουμε καθυστέρηση)
  - Αν $n_0 < 0$, τότε παρατηρούμε μετατόπιση προς τα αριστερά (έχουμε προπόρευση) και το σήμα μπορεί να γραφεί ως $y(n)= x(n+n_0)$.

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Μετατόπιση (ολίσθηση)



- $x(n)$
- $x(n-8)$
- $x(n+8)$
- $x(-n+8)$
- $x(-n-8)$

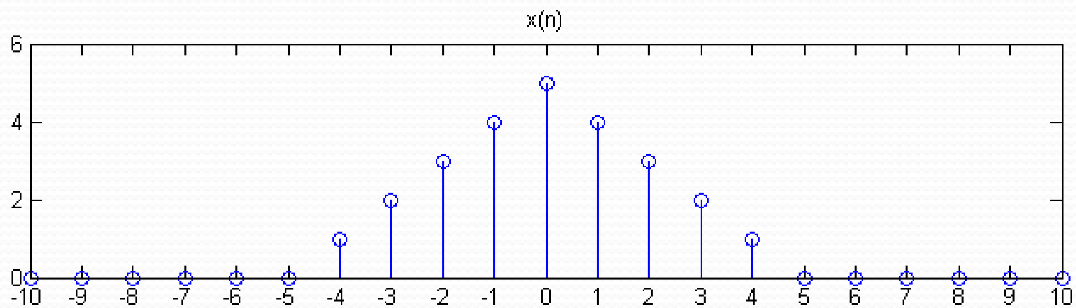
Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική κλιμάκωση

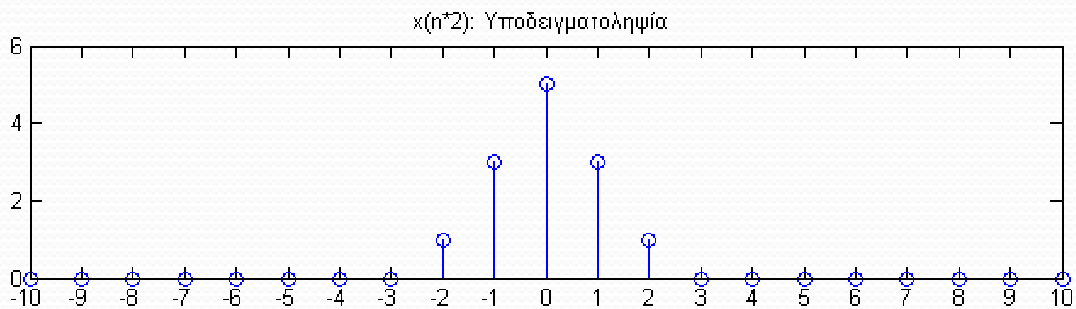
- Κλιμάκωση υφίσταται ένα σήμα αν **f(n)=Mn** ή **f(n)=n/M**, όπου M ακέραιος αριθμός.
- Στην πρώτη περίπτωση το διακριτό σήμα λέμε ότι υπέστη υποδειγματοληψία και στη δεύτερη περίπτωση υπερδειγματοληψία.
- Κατά την υποδειγματοληψία προκύπτει το σήμα y(n)= x(Mn) και κατά την υπερδειγματοληψία το σήμα y(n)= x(n/M), όπου n/M ακέραιος.
- Το σήμα x(n/M) δεν ορίζεται για τις μη ακέραιες τιμές του πηλίκου n/M.

Μετασχηματισμοί Σημάτων

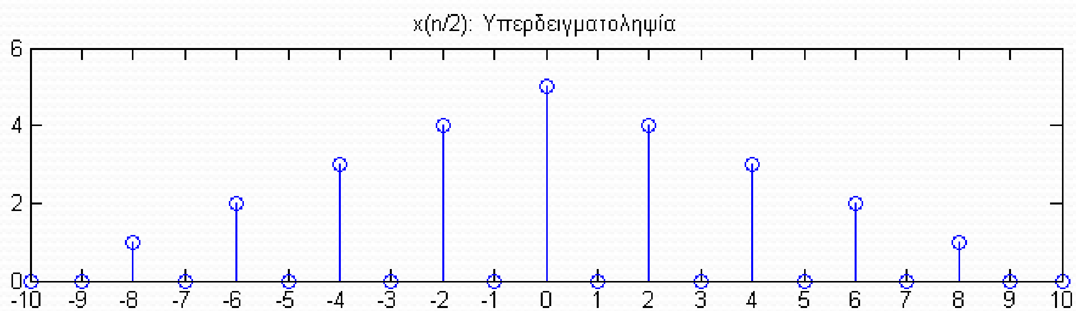
Χρονική κλιμάκωση



- x(n)



- Υποδειγματοληψία x(n*2)



- Υπερδειγματοληψία x(n/2)

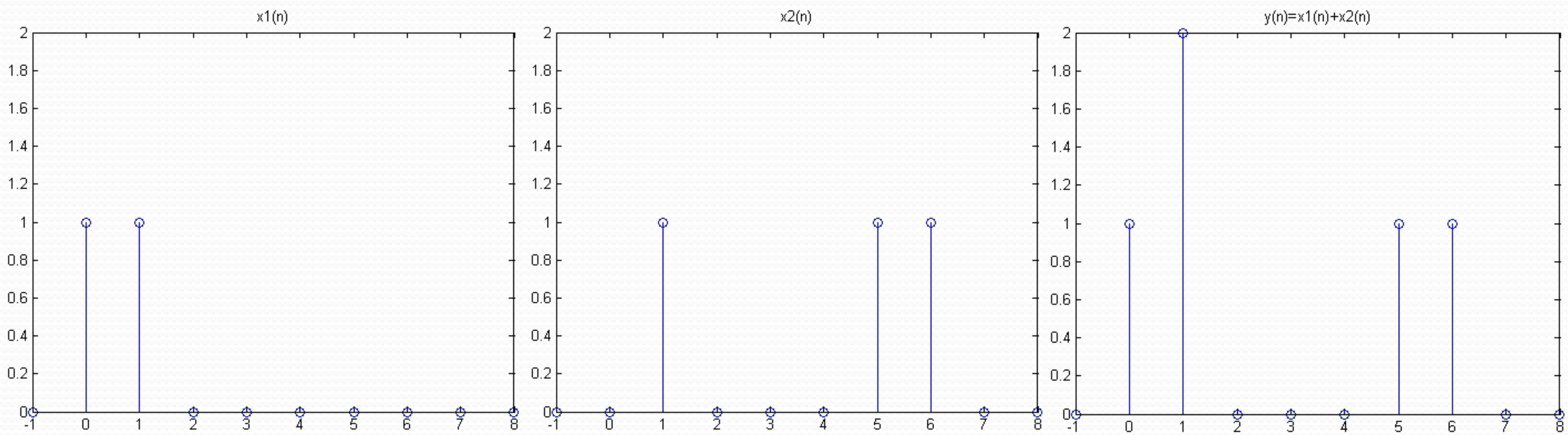
Πράξεις διακριτών σημάτων

Πρόσθεση	x(n) + y(n)
Αφαίρεση	x(n) – y(n)
Πολλαπλασιασμός	x(n) * y(n)
Διαίρεση	x(n) / y(n) με y(n)≠0

- Οι πράξεις εκτελούνται **ανά στοιχείο** και για την ίδια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα πράξης

- Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τα δύο παρακάτω σήματα x1(n) και x2(n):



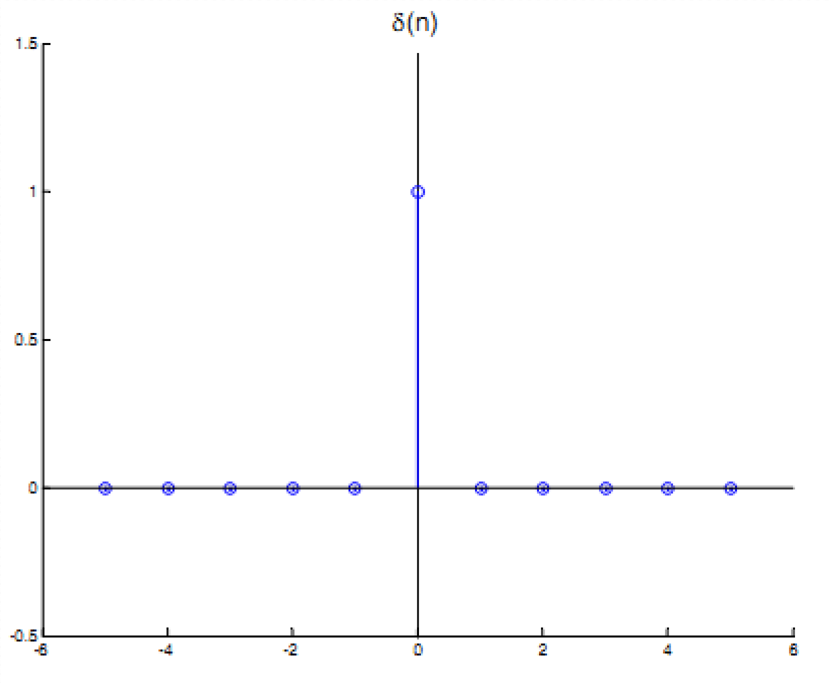
x1(n) + x2(n) = y(n)

Θεμελιώδεις ακολουθίες

Διακριτή ακολουθία δέλτα

- Η διακριτή ακολουθία δέλτα ή μοναδιαία κρουστική ακολουθία συμβολίζεται δ(n) και ορίζεται από την σχέση:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

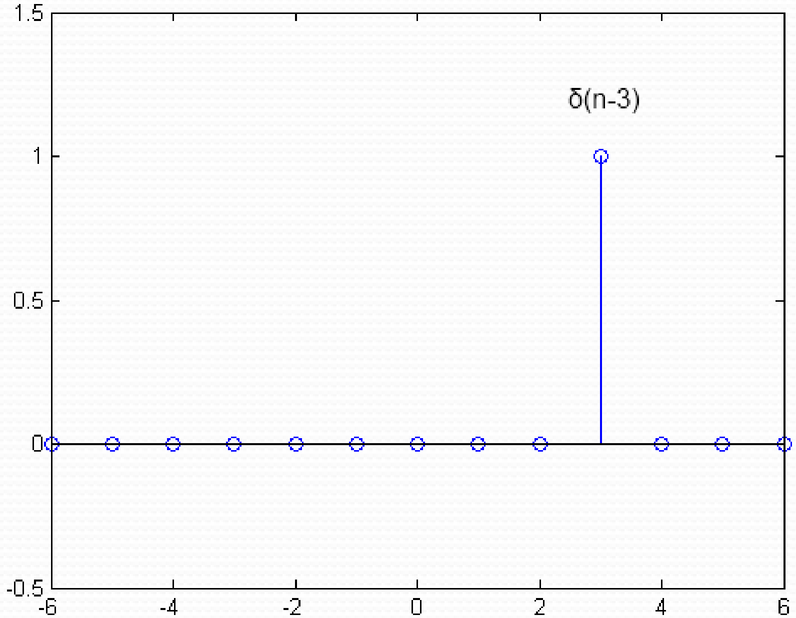


Θεμελιώδεις ακολουθίες

Διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης

- Η διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης είναι η ακολουθία δ(n) όπου υπέστη μετατόπιση κατά k και ορίζεται από την σχέση:

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$$



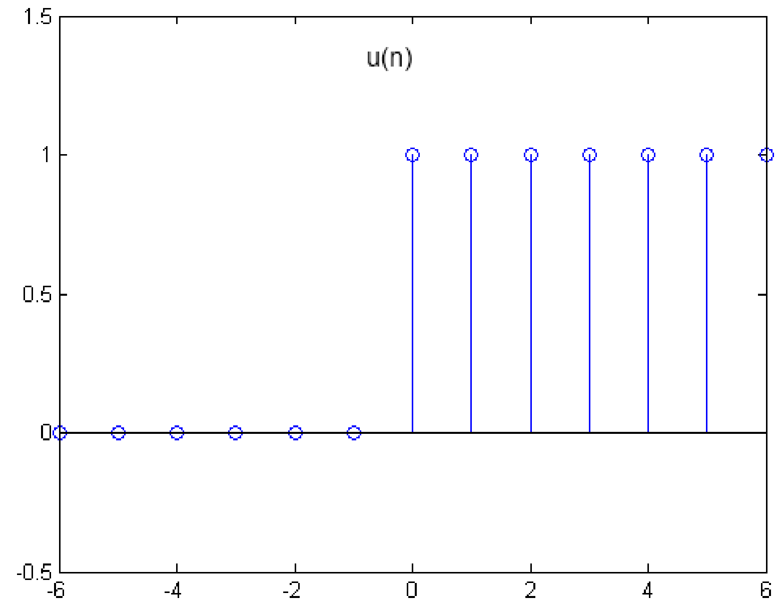
- Σημειώνουμε ότι δ[n-3] ισούται με 1 για n=3, και 0 για n ≠3

Θεμελιώδεις ακολουθίες

Μοναδιαία βηματική ακολουθία (unit step)

- Η μοναδιαία βηματική ακολουθία συμβολίζεται με u(n) και ορίζεται από την σχέση:

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



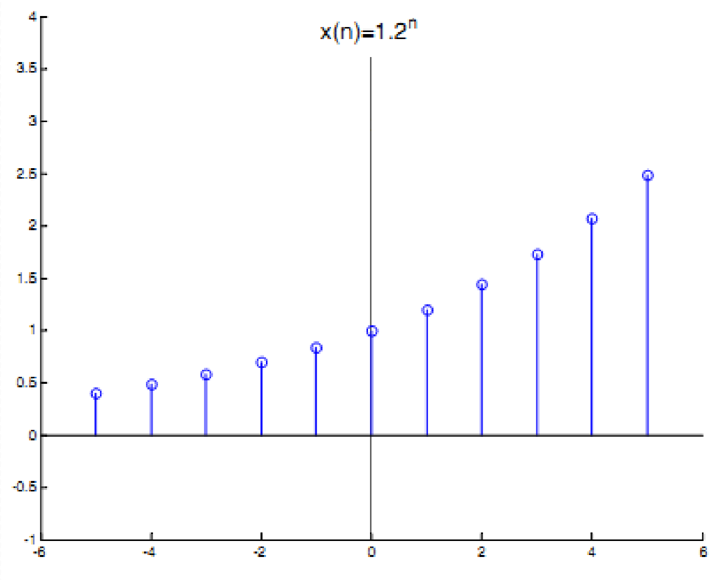
- Σημειώνουμε ότι u[n-3] ισούται με 1 για n>=3, και 0 για n <3

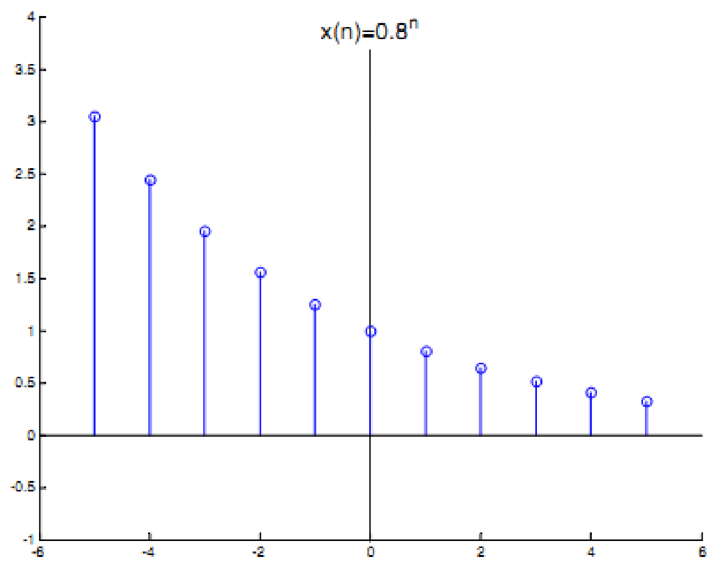
Θεμελιώδεις ακολουθίες

Εκθετική ακολουθία

- Η εκθετική ακολουθία είναι φθίνουσα για |α|<1, αύξουσα για |α|>1 και σταθερή για α=1 δηλαδή x(n)=u(n) και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$x(n) = \alpha^n \forall n, a \in \mathrm{N}$$



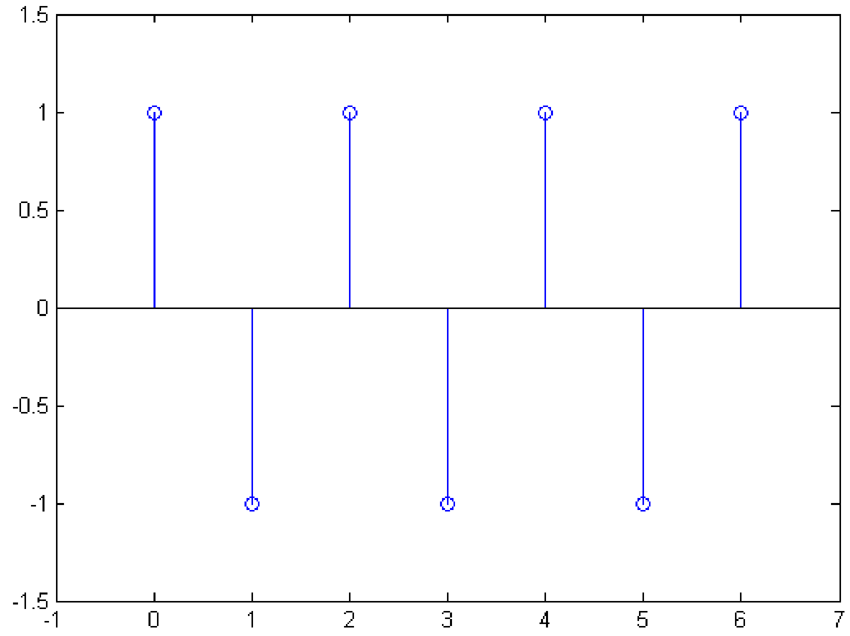


Θεμελιώδεις ακολουθίες

Μοναδιαία εναλλασσόμενη ακολουθία

- Η μοναδιαία εναλλασσόμενη ακολουθία ορίζεται από την σχέση:

$$x(n) = (-1)^n, n \geq 0$$



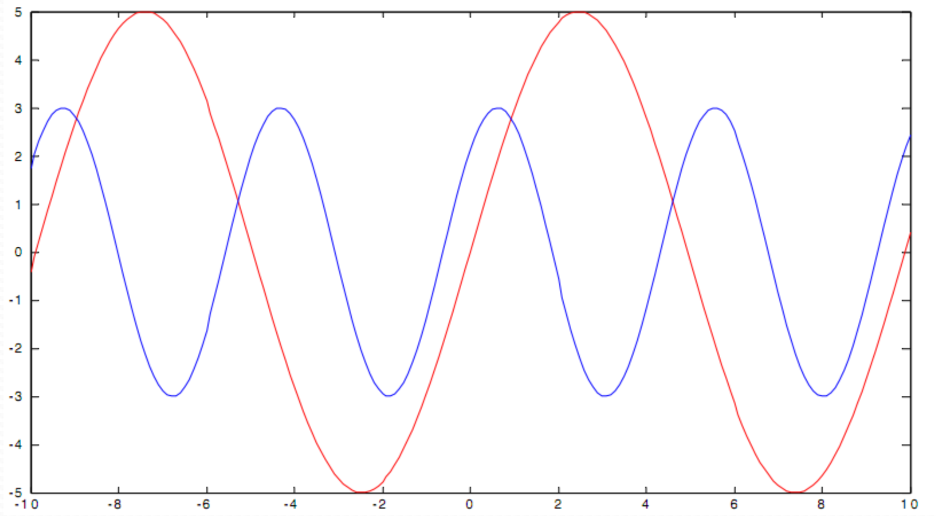
Θεμελιώδεις ακολουθίες

Ημιτονοειδής ακολουθία

- Οι ημιτονοειδής ακολουθίες ορίζονται από τις σχέσεις, όπου A είναι το πλάτος, ω_0 είναι η συχνότητα και φ είναι η φάση:

$$x(n) = A\cos(\omega_o n + \phi), \forall n \in N$$

$$x(n) = A\sin(\omega_o n + \phi), \forall n \in N$$



- Με κόκκινο χρώμα: $5\sin(\omega_1 t)$
- με μπλε: $3\sin(\omega_2 t+\pi/4)$, $(\omega_2=2\omega_1)$

Υλοποίηση δ(n-k)

- Να φτιάξετε μια συνάρτηση στο Matlab η οποία θα δημιουργεί μια διακριτή συνάρτηση επιβράδυνσης.
- Η συνάρτηση θα δέχεται 3 ορίσματα: το k, και τα όρια του n.
- Θα επιστρέφει ένα διάνυσμα με την ακολουθία δ και ένα διάνυσμα με τις τιμές του n.

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$$

Λύση δ(n-k)

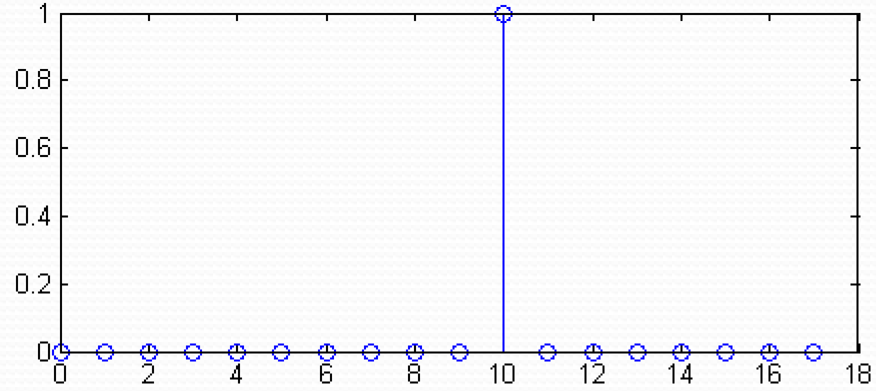
```
function [ n,d ] = dk(k, minN, maxN)
    n=[minN:maxN];
    d=zeros(1,length(n));

    for i=1:length(n)
        if n(i)==k
            d(i)=1;
            break;
        end
    end
end
```

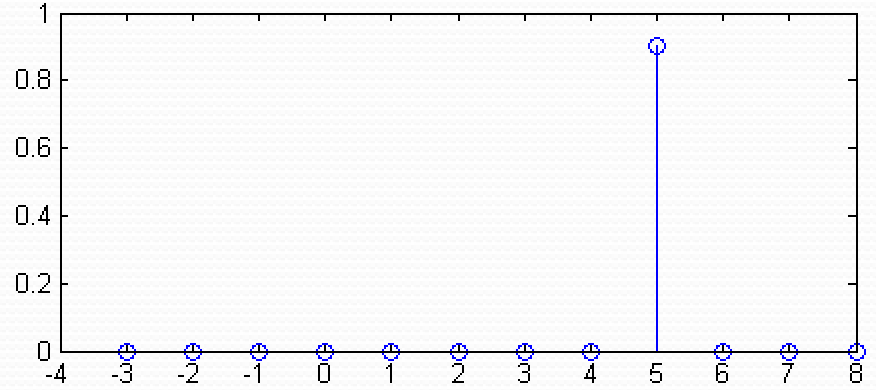
$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$$

Υλοποίηση άσκησης

- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα χρησιμοποιώντας την εντολή stem.
  - x1(n)=δ(n-10)   0<=n<=17
  - x2(n)=0.9δ(n-5)   -3<=n<=8

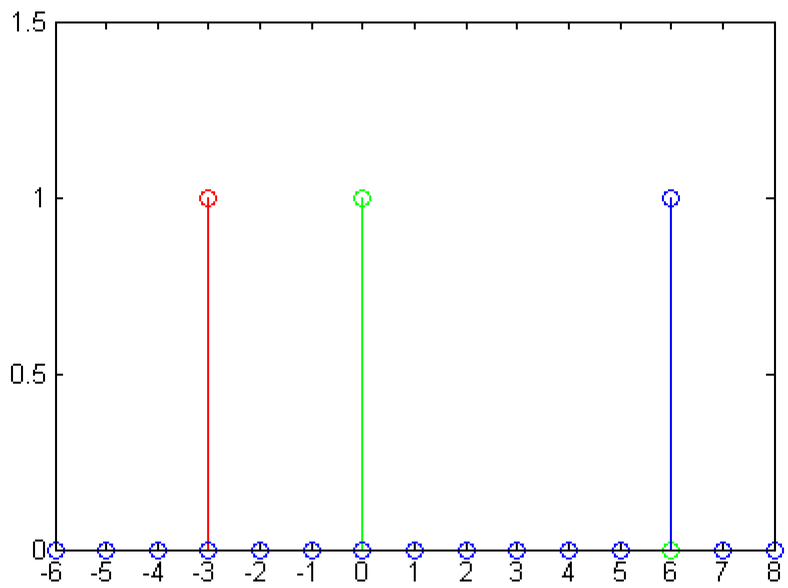
```
[n1, x1]=dk(10,0,17);
[n2, x2]=dk(5,-3,8);
x2=x2*0.9;

figure(1)
stem(n1,x1);

figure(2)
stem(n2,x2);
```





Υλοποίηση άσκησης

- Να παραστήσετε γραφικά στο διάστημα -6 ≤ n ≤ 8 τα παρακάτω διακριτά σήματα στο ίδιο figure, χρησιμοποιώντας την εντολή stem.
  - δ(n+3)
  - δ(n)
  - δ(n-6)




```
[n d1]=dk(-3,-6,8);
[n d2]=dk(0,-6,8);
[n d3]=dk(6,-6,8);

figure(1);
stem(n,d1,'r');
hold on;
stem(n,d2,'g');
hold on;
stem(n,d3,'b');
```

Απορίες - Ερωτήσεις ;

Ασκήσεις για το σπίτι

<u>Οι ασκήσεις είναι **ατομικές** !!!</u>

Αποστείλετε όλα τα αρχεία m-file σε ένα συμπιεσμένο αρχείο με όνομα: lab03_OMX_YYYY

(όπου X ο αριθμός ομάδας εργαστηρίου και YYYY το AM σας)

Στο email: kyriakidis@teicrete.gr

Ασκήσεις για το σπίτι

- Να φτιάξετε μια συνάρτηση στο Matlab η οποία θα δημιουργεί την παρακάτω μοναδιαία βηματική ακολουθία. Η συνάρτηση θα δέχεται 3 ορίσματα: το k, και τα όρια του n. Θα επιστρέφει ένα διάνυσμα με την βηματική ακολουθία και ένα διάνυσμα με τις τιμές του n.

$$u(n-k)=\begin{cases}1 & n\geq k\\ 0 & n<k\end{cases}$$

- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα χρησιμοποιώντας την εντολή stem.

x(n) = 3u(n+5)	-10<=n<=8
x(n) = u(n)-u(n-10)	-2<=n<=12
$x(n)=\left(u(n+5)+u(n+5)\cdot u(n-2)\right)$	-10<=n<=10
$x(n)=\sqrt{\pi}\cdot\left(\delta(n+10)-3\delta(n-7)\right)$	-20<=n<=20