

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

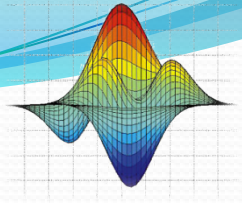
Συστήματα Διακριτού Χρόνου (Discrete-Time Systems)

Κυριακίδης Ιωάννης

2011

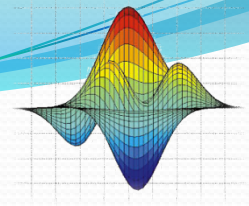
Τελευταία ενημέρωση: 11/11/2011

Πράξεις διακριτών σημάτων (υπενθύμιση)



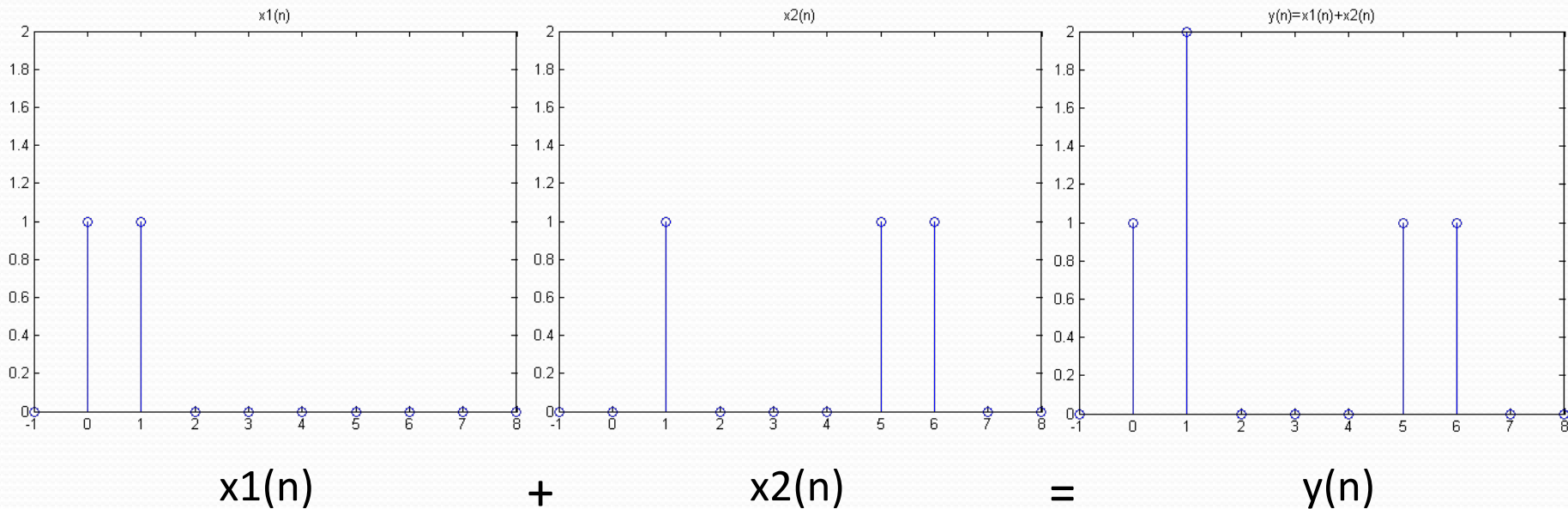
Πρόσθεση	$x(n) + y(n)$
Αφαίρεση	$x(n) - y(n)$
Πολλαπλασιασμός	$x(n) * y(n)$
Διαίρεση	$x(n) / y(n)$ με $y(n) \neq 0$

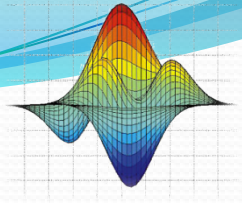
- Οι πράξεις εκτελούνται **ανά στοιχείο** και για την ίδια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής



Παράδειγμα πράξης

- Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τα δύο παρακάτω σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$:

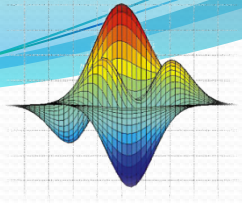




Ανάλυση Σημάτων

- Χρησιμοποιώντας της διακριτή ακολουθία δέλτα $\delta(n)$, μπορούμε να αναλύσουμε ένα τυχαίο σήμα $x(n)$.
- Αυτό πραγματοποιείται με το άθροισμα των κατάλληλα μετατοπισμένων $\delta(n)$ τα οποία έχουν πολλαπλασιαστεί με έναν συντελεστή βάρους.
- Ο συντελεστής βάρους αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του σήματος $x(n)$, όπως φαίνεται στην παρακάτω παράδειγμα:

$$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \dots$$



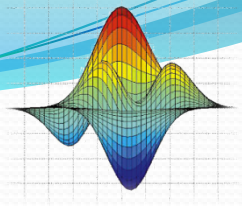
Ανάλυση Σημάτων

$$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \dots$$

- Αυτό το άθροισμα μπορεί να γραφτεί περιληπτικά:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

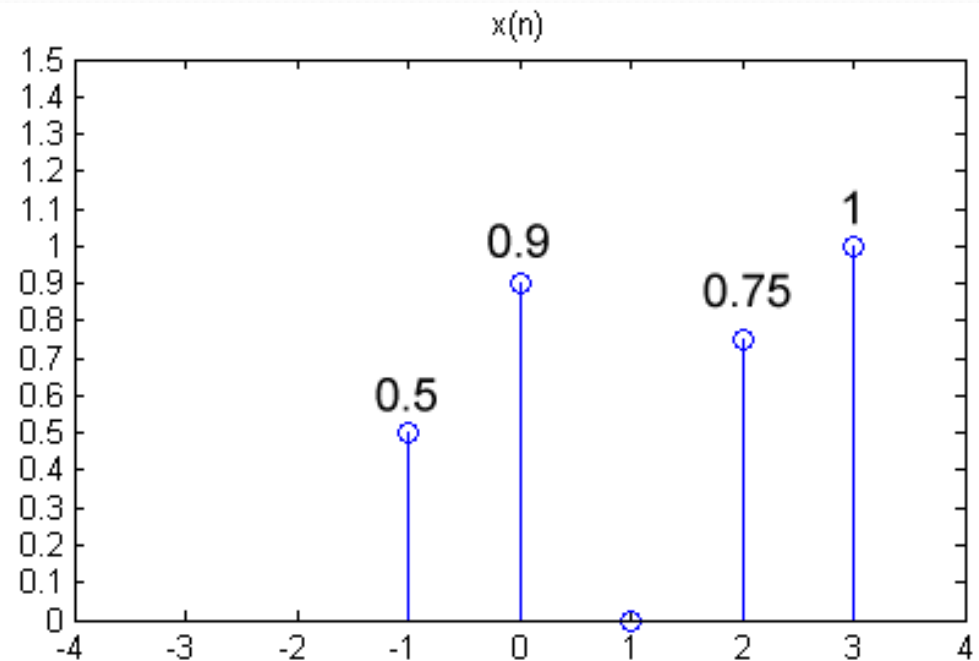
όπου κάθε όρος $x(k)\delta(n-k)$, είναι ένα σήμα με πλάτος $x(k)$ τη χρονική στιγμή $n=k$, ενώ μηδενίζεται για οποιαδήποτε άλλη τιμή του n .

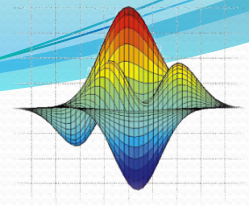


Ανάλυση Σημάτων

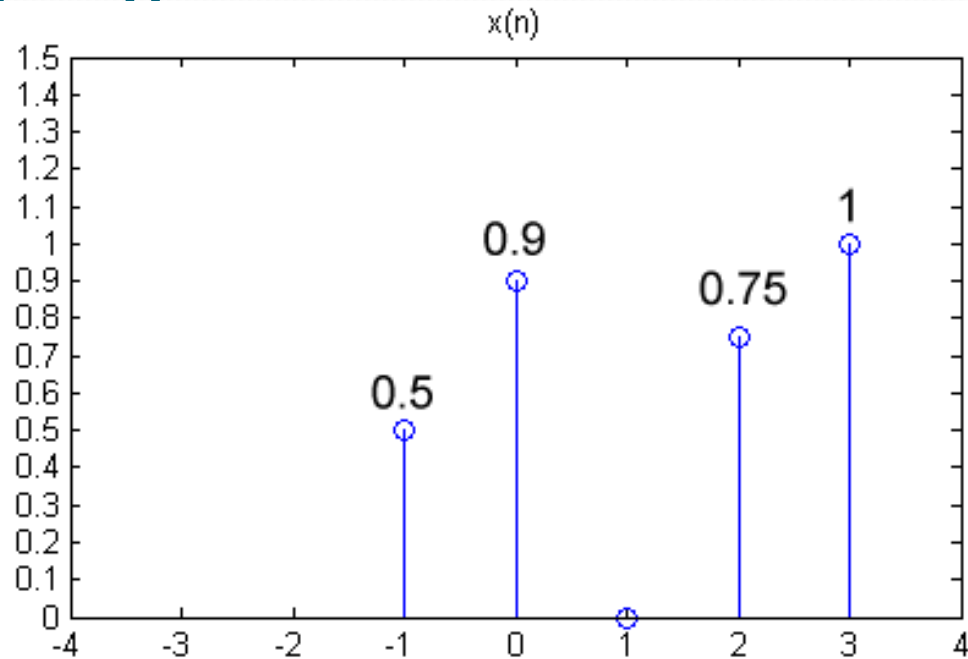
- Χρησιμοποιώντας την έκφραση ανάλυσης σημάτων που είδαμε, γράψτε στο χαρτί σε μορφή αθροισμάτων διακριτών συναρτήσεων δέλτα το παρακάτω σήμα:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



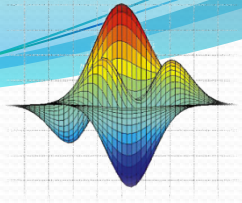


Ανάλυση Σημάτων



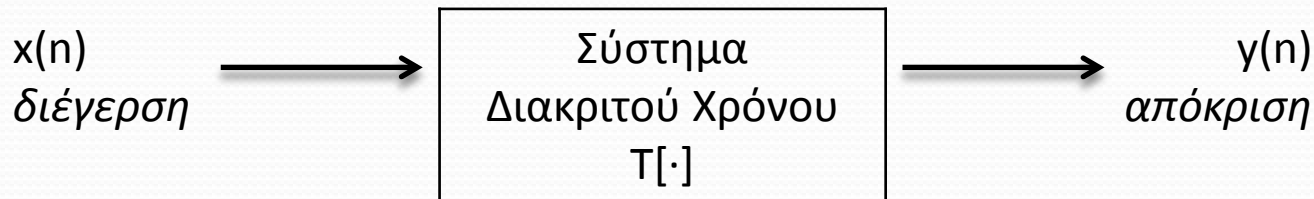
- Το παραπάνω σήμα μπορεί να γραφεί σε μορφή αθροισμάτων διακριτών συναρτήσεων δέλτα ως:

$$x(n) = 0.5 * \delta(n+1) + 0.9 * \delta(n) + 0.75 * \delta(n-2) + \delta(n-3)$$



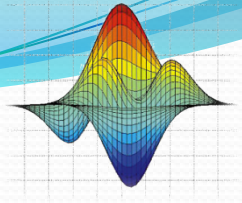
Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- Ένα σύστημα διακριτού χρόνου δέχεται μια είσοδο διακριτού χρόνου $x(n)$ και παράγει μια έξοδο διακριτού χρόνου $y(n)$, μετασχηματίζοντας το $x(n)$.
- Το σήμα εισόδου μπορεί να ονομαστεί ως διέγερση ενώ το σήμα εξόδου ως απόκριση.



- Αυτή η διαδικασία συμβολίζεται ως εξής:

$$y(n) = T[x(n)]$$



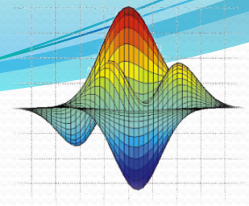
Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

Αιτιατά Συστήματα

- Αιτιατό είναι το σύστημα στο οποίο η έξοδος για κάθε χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την είσοδο τη χρονική στιγμή n_0 και παρελθοντικές χρονικές στιγμές (όχι μελλοντικές).
- Για παράδειγμα το παρακάτω σύστημα είναι αιτιατό:

$$y(n) = \alpha x(n) - \beta x(n-1)$$

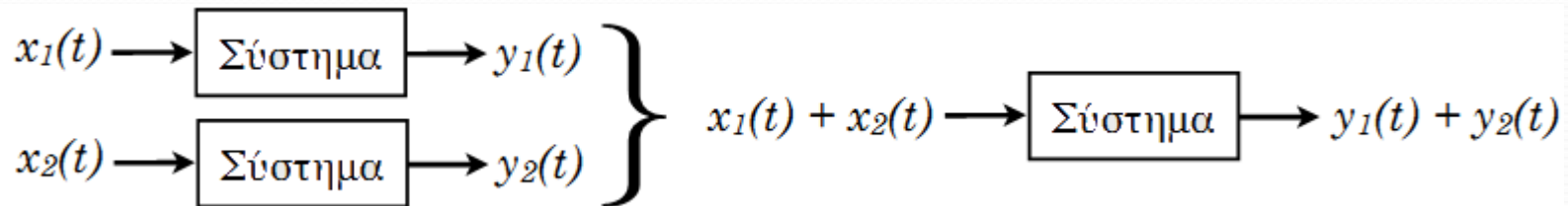
- Μη αιτιατό είναι το σύστημα στο οποίο η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές στην είσοδο.



Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

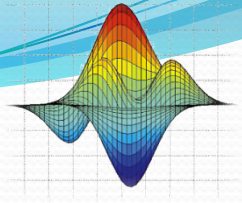
Αρχή της Υπέρθεσης ή Επαλληλίας

- **Η αρχή της Υπέρθεσης ή Επαλληλίας:** ορίζεται εάν το άθροισμα των εξόδων πολλαπλών συστημάτων είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος όπου ως είσοδο έχει το άθροισμα των εισόδων αυτών των συστημάτων.



- Η αρχή της υπέρθεσης ορίζεται όταν σε ένα σύστημα ισχύει:

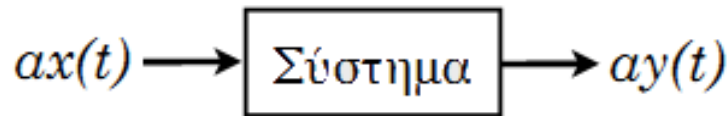
$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$



Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

Ομογένεια

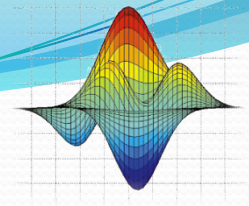
- Ένα σύστημα ονομάζεται **Ομογενές** εάν ο πολλαπλασιασμός της εισόδου με μία σταθερά οδηγεί τον πολλαπλασιασμό της εξόδου με την ίδια ακριβώς σταθερά.



- Ένα σύστημα καλείται Ομογενές όταν:

$$T[\alpha x(n)] = \alpha T[x(n)]$$

όπου α μια σταθερά



Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

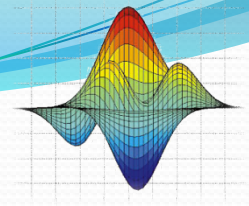
Γραμμικά Συστήματα

- Ένα σύστημα είναι γραμμικό εάν είναι **ομογενές** και για το οποίο ισχύει η **αρχή της υπέρθεσης**.

- Άρα για να είναι γραμμικό ένα σύστημα θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 T[x_1(n)] + \alpha_2 T[x_2(n)]$$

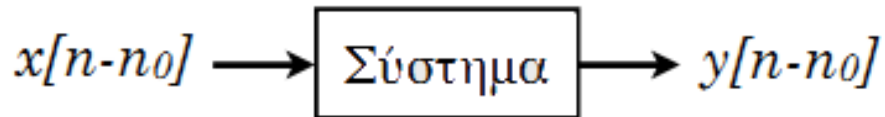
- Στις σημειώσεις της θεωρίας μπορείτε να βρείτε διάφορα παραδείγματα με γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα.



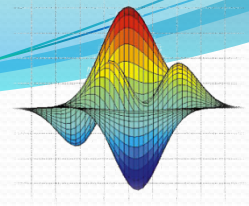
Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

- Αν σε ένα σύστημα υπάρχει μια μετατόπιση (καθυστέρηση) στην είσοδο κατά n_0 και παράγει μια έξοδο με την ίδια μετατόπιση n_0 , τότε το σύστημα ονομάζεται **Χρονικά Αμετάβλητο** ή **Αμετάβλητο στην μετατόπιση**.

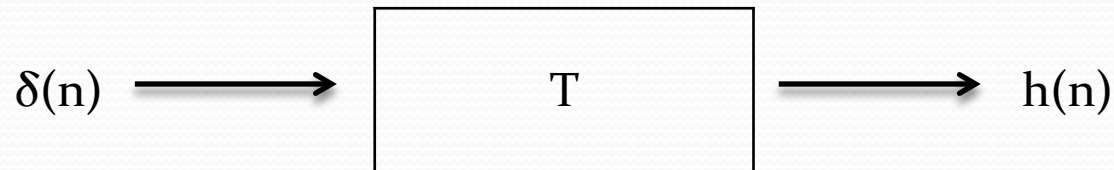


- Εάν ένα σύστημα είναι και Γραμμικό και Χρονικά αμετάβλητο θα το γράφουμε για συντομία ως: **ΓΧΑ** ή **LSI**, από τις λέξεις Linear Shift Invariant.

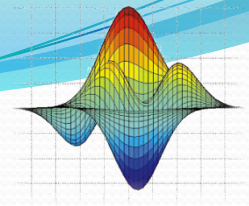


Κρουστική απόκριση (Impulse Response)

- Εάν σε ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα η είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία $\delta(n)$, τότε το σήμα εξόδου(απόκριση) ονομάζεται **Κρουστική απόκριση $h(n)$** .

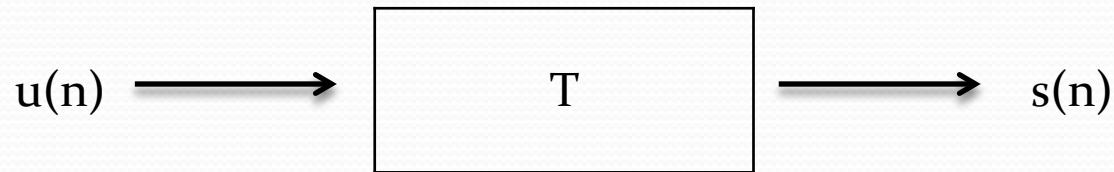


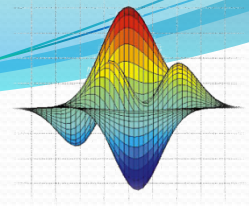
- Η κρουστική απόκριση $h(n)$ θα είναι αιτιατή **αν και μόνο αν** είναι ίση με το μηδέν για κάθε $n < 0$.



Βηματική απόκριση (Step Response)

- Εάν σε ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία $u(n)$, τότε το σήμα εξόδου(απόκριση) ονομάζεται **Βηματική απόκριση $s(n)$** .





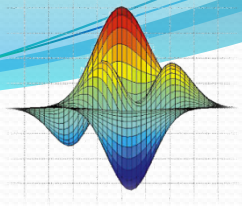
Εξισώσεις Διαφορών

- Η γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k)$$

Όπου $a(k)$ και $b(k)$ είναι σταθερές οι οποίες καθορίζουν το σύστημα

- Οι εξισώσεις διαφορών παρέχουν μια μέθοδο υπολογισμού της απόκρισης ενός συστήματος για μια τυχαία είσοδο $x(n)$.
- Για την λύση τέτοιων εξισώσεων είναι συχνά απαραίτητο να υπολογιστεί ένα σύνολο Αρχικών Συνθηκών.
- Για ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών, η κρουστική του απόκριση $h(n)$, υπολογίζεται λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών για $x(n)=\delta(n)$ και $y(n)=h(n)$.



Εξισώσεις Διαφορών

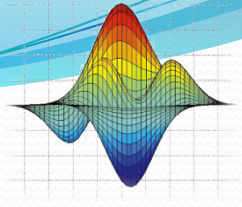
- Η συνάρτηση `filter` στο Matlab μας βοηθά να επιλύσουμε εξισώσεις διαφορών με στόχο να βρούμε την απόκριση του συστήματος:

$y = \text{filter}(b, \alpha, x);$

όπου:

$b = [b_0, b_1, \dots, b_m]$ και $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m]$ είναι οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών, ενώ το διάνυσμα x είναι ο πίνακας με τις τιμές του σήματος εισόδου του συστήματος.

- Το διάνυσμα y έχει ίδιο μήκος με το x .
- Επίσης πρέπει οπωσδήποτε $\alpha_0 \neq 0$.



Η Εντολή “inline” του Matlab

- Με την εντολή “inline” μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικά, με την εξής σύνταξη:

όνομα_συνάρτησης = inline('εκφραση');

- Για παράδειγμα, για να ορίσουμε μια συνάρτηση υπολογισμού τετραγώνου:

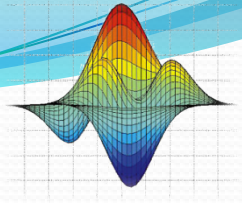
```
>> mySqrt = inline('x^2')
```

- Για να την χρησιμοποιήσουμε:

```
>> mySqrt(2)
```

Το αποτέλεσμα θα είναι ans = 4.

- Η συνάρτηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσωρινά. Αυτό σημαίνει πως όταν κλείσουμε το Matlab η συνάρτηση δεν θα υπάρχει.
- Πρέπει να αναφέρουμε ότι αντί του x θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει οποιοδήποτε έγκυρο όνομα μεταβλητής.



Εξάσκηση

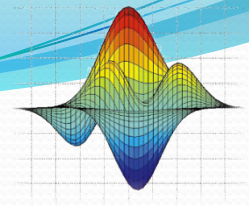
- Να γράψετε στο χαρτί σε μορφή αθροισμάτων διακριτών συναρτήσεων δέλτα $\delta(n)$, και στην συνέχεια να παρασταθεί γραφικά (στο Matlab) το σήμα:

$$x(n) = \left\{ -2, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 3 \right\}$$

↑
Το βελάκι δείχνει την τιμή για την χρονική στιγμή $n=0$

- Λύση:

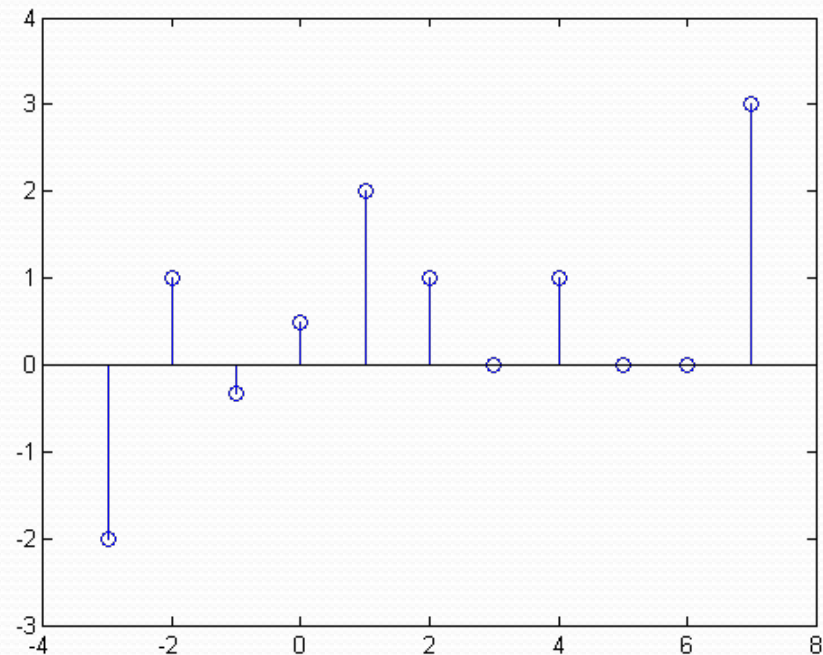
$$x(n) = -2\delta(n+3) + \delta(n+2) - \frac{1}{3}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-4) + 3\delta(n-7)$$

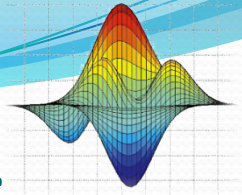


Εξάσκηση

- Για να υπολογιστεί και παρασταθεί γραφικά στο Matlab:

```
n=-3:7;  
x=zeros(1,length(n));  
d=inline('n==0'); %Synartisi delta  
  
for i=1:length(n)  
    x(i) = -2*d(n(i)+3) + d(n(i)+2) - 1/3*d(n(i)+1)  
        + 1/2*d(n(i)) + 2*d(n(i)-1) + d(n(i)-2)  
        + d(n(i)-4) + 3*d(n(i)-7);  
  
end  
  
stem(n,x);
```





Υπολογισμός Κρουστικής απόκρισης

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την κρουστική απόκριση του παρακάτω αιτιατού σήματος:

$$y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$$

- 1^{ος} Τρόπος Λύσης:

Λύνουμε την εξίσωση διαφορών για $x(n)=\delta(n)$ και $y(n)=h(n)$

$$\text{Άρα: } h(n) = -0.9h(n-1) + \delta(n)$$

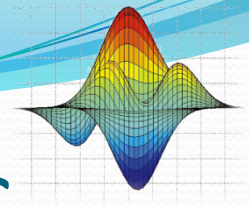
Υπολογισμός αρχικών συνθηκών:

$$h(0) = -0.9 * 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = -0.9 * h(0) + \delta(1) = -0.9 * 1 + 0 = -0.9$$

$$h(2) = -0.9 * h(1) + \delta(2) = -0.9 * -0.9 + 0 = 0,81$$

$$h(3) = -0.9 * h(2) + \delta(3) = -0.9 * 0,81 + 0 = -0,729$$



Υπολογισμός Κρουστικής απόκρισης

- 1^{ος} Τρόπος Λύσης (κώδικας Matlab), μια άλλη πιθανή λύση:

```
d=inline('n==0');
```

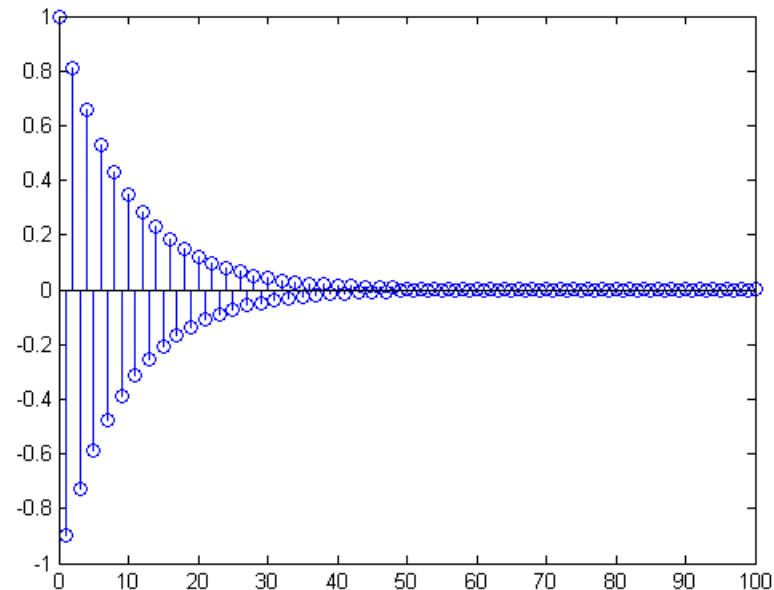
```
h(1)=1;
```

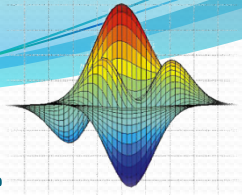
```
for n=2:101
```

```
    h(n)= -0.9 * h(n-1) + d(n);
```

```
end
```

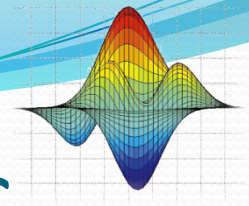
```
stem(0:100,h);
```





Υπολογισμός Κρουστικής απόκρισης

- Ο 2^{ος} Τρόπος Λύσης είναι να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση filter του Matlab.
- Αρχικά θα πρέπει να “βρούμε” τα a και b (συντελεστές της εξίσωσης διαφορών).
- Έχοντας υπόψη την γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές, χωρίζουμε τα y από τα x .
- Έτσι μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές a και b .
- Όπου οι συντελεστές a αντιστοιχούν στους συντελεστές βάρους των y , ενώ οι συντελεστές b αντιστοιχούν στους συντελεστές βάρους των x .



Υπολογισμός Κρουστικής απόκρισης

- $y(n) = -0.9y(n-1) + x(n) \Rightarrow$

$$y(n) + 0.9y(n-1) = x(n)$$

χωρίζουμε τα y από τα x

- Άρα:

$$a=[1, 0.9] \text{ και } b=[1, 0]$$

βρίσκουμε τα a και b

```
n=0:100;
```

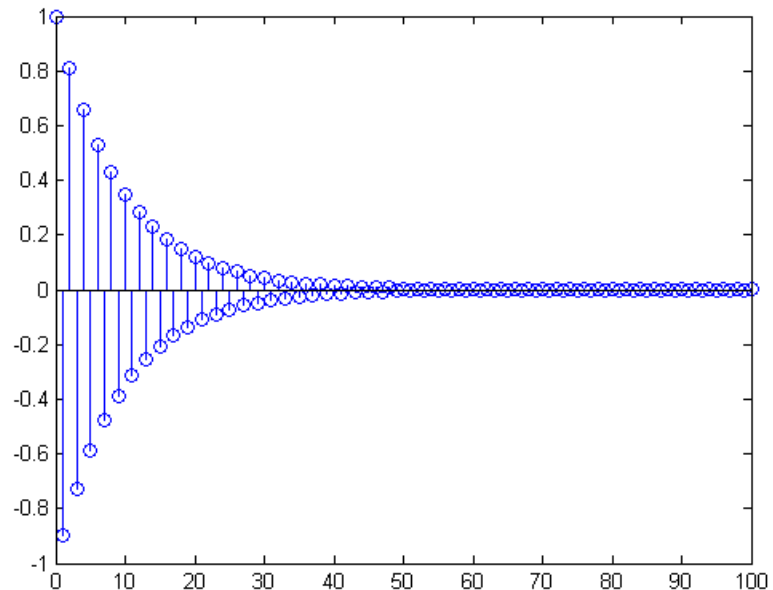
```
d=inline('n==0');
```

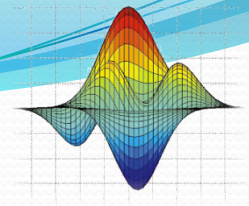
```
a=[1 0.9];
```

```
b=[1 0];
```

```
y=filter(b, a, d(n));
```

```
stem(n, y);
```





Υπολογισμός Βηματικής απόκρισης

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την βηματική απόκριση του παρακάτω αιτιατού σήματος:

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-8)$$

- 1^{ος} Τρόπος Λύσης:

Λύνουμε την εξίσωση διαφορών για $x(n)=u(n)$ και $y(n)=s(n)$

$$\text{Άρα: } s(n) = s(n-1) + u(n) - u(n-8)$$

Υπολογισμός αρχικών συνθηκών:

$$s(0) = s(-1) + u(0) - u(-8) = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$s(1) = s(0) + u(1) - u(-7) = 1 + 1 - 0 = 2$$

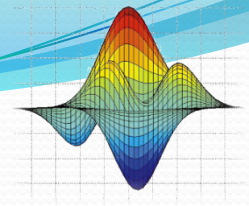
$$s(2) = s(1) + u(2) - u(-6) = 2 + 1 - 0 = 3$$

....

$$s(7) = s(6) + u(7) - u(-1) = 7 + 1 - 0 = 8$$

$$s(8) = s(7) + u(8) - u(0) = 8 + 1 - 1 = 8$$

$$s(9) = s(8) + u(9) - u(1) = 8 + 1 - 1 = 8$$



Υπολογισμός Βηματικής απόκρισης

- 1^{ος} Τρόπος Λύσης (κώδικας Matlab), μια πιθανή λύση:

```
n=0:100;
```

```
s=zeros(1,length(n));
```

```
u=inline('n>=0');
```

```
s(1)=1;
```

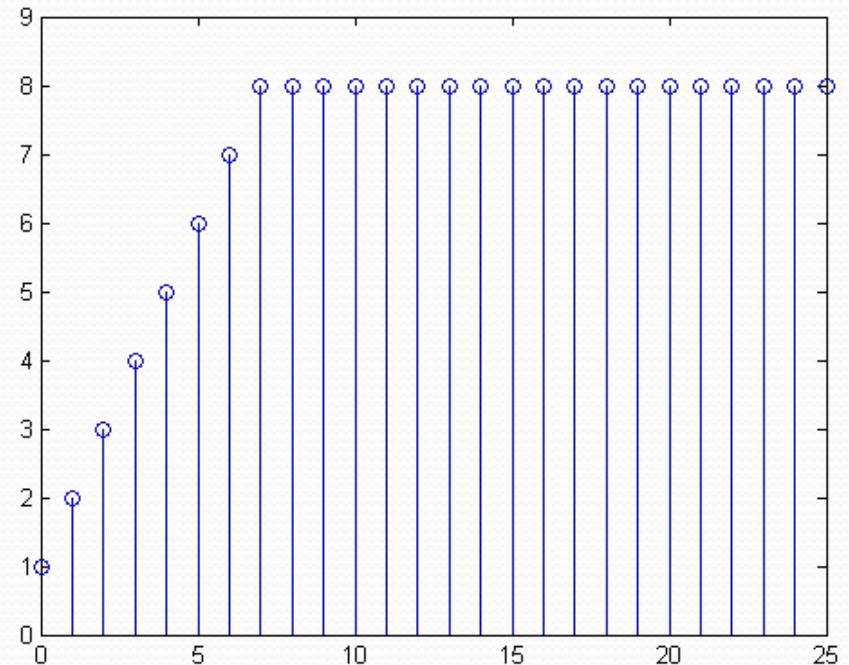
```
for i=2:length(n)
```

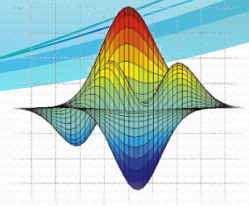
```
    s(i)=s(i-1) + u(n(i)) - u(n(i)-8);
```

```
end
```

```
stem(n,s);
```

```
axis([0 25 0 9]);
```





Υπολογισμός Βηματικής απόκρισης

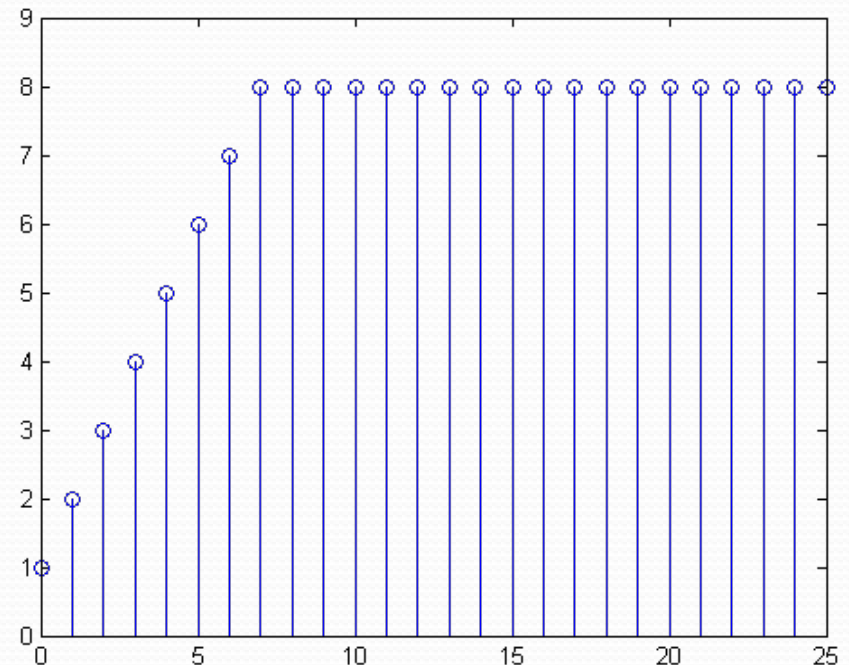
- Ο 2^{ος} Τρόπος Λύσης χρησιμοποιώντας την συνάρτηση filter του Matlab.
 - $y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-8) \Rightarrow$
 $y(n) - y(n-1) = x(n) - x(n-8)$
- χωρίζουμε τα y από τα x

```
n=0:100;  
u=inline('n>=0');
```

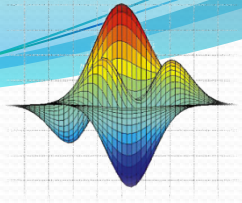
```
a=[1 -1 0 0 0 0 0 0]; %apo to y  
b=[1 0 0 0 0 0 0 -1]; %apo to x
```

```
y=filter(b, a, u(n));
```

```
stem(n, y);  
axis([0 25 0 9]);
```

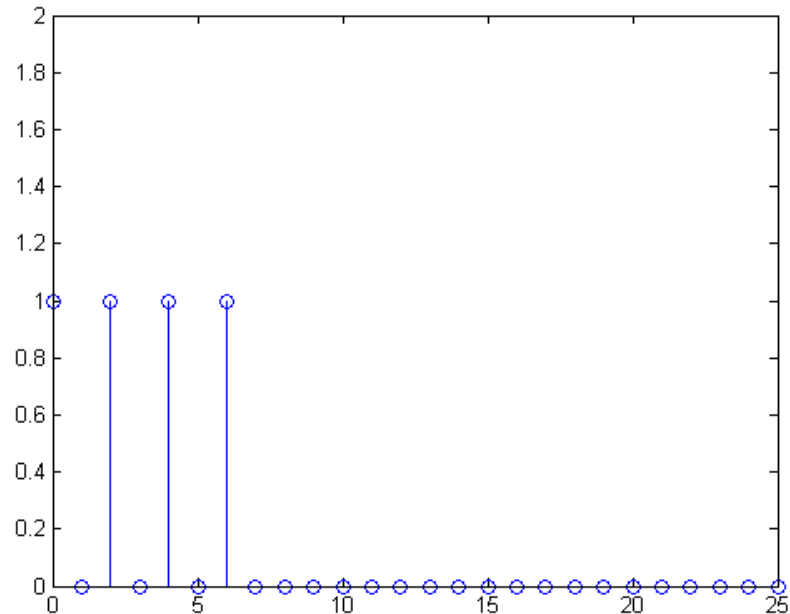


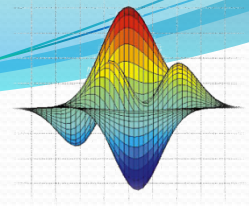
Εξάσκηση



- Σχεδιάστε την απόκριση του προηγούμενου συστήματος για είσοδο $x(n) = a^n u(n)$, για $a=-1$ και $a=1$.
- $y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-8)$
- Αντικαθιστώντας έχουμε: $y(n) = y(n-1) + a^n u(n) - a^{n-8} u(n-8)$

```
n=0:100;  
s=zeros(1,length(n));  
u=inline('n>=0');  
  
a=-1;  
s(1)=1;  
for i=2:length(n)  
    s(i) = s(i-1) + a^n(i)*u(n(i))  
        - (a^(n(i)-8)*u(n(i)-8));  
end  
stem(n, s);
```

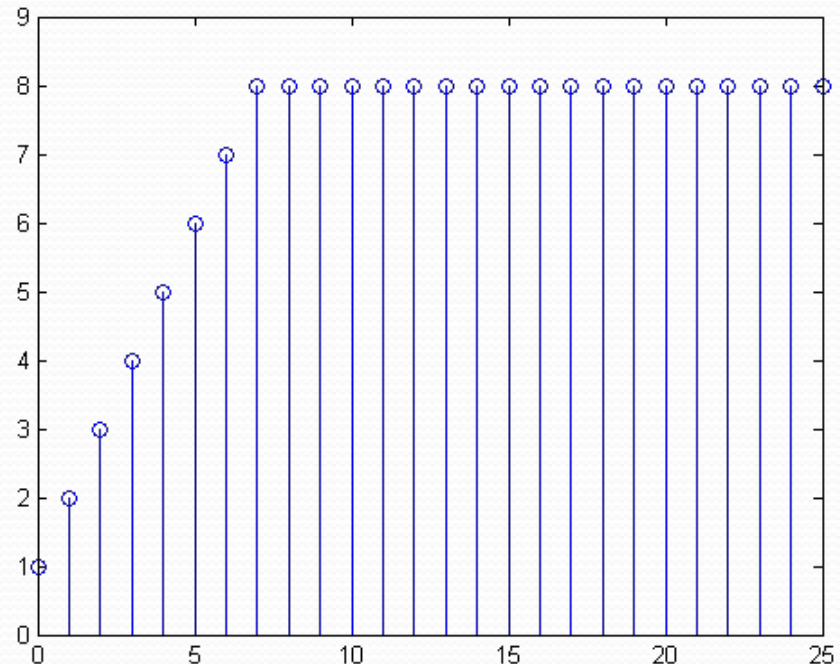


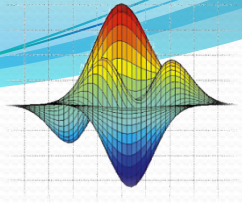


Εξάσκηση

- Για $a=1$, η υλοποίηση μας, μας επιτρέπει να αλλάξουμε απλά την τιμή της μεταβλητής.

```
n=0:100;  
s=zeros(1,length(n));  
u=inline('n>=0');  
  
a= 1;  
s(1)=1;  
for i=2:length(n)  
    s(i) = s(i-1) + a^n(i)*u(n(i))  
        - (a^(n(i)-8)*u(n(i)-8));  
end  
stem(n, s);
```





Εξάσκηση (με συνάρτηση filter)

- Για να λύσουμε την άσκηση με την εντολή filter:

- $y(n) = y(n-1) + a^n u(n) - a^{n-8} u(n-8) \Rightarrow$

$$y(n) - y(n-1) = a^n u(n) - a^{n-8} u(n-8)$$

χωρίζουμε τα y από τα u

```
n=0:100;
```

```
u=inline('n>=0');
```

```
a=-1; ←
```

```
ac=[1 -1 0 0 0 0 0 0 0];
```

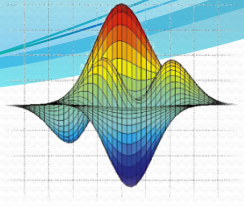
```
bc=[1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
```

```
x=u(n).*(a.^n);
```

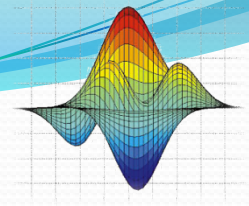
```
y=filter(bc, ac, x);
```

```
stem(n, y);
```

- Για $a=1$ απλά αλλάζουμε την τιμή της μεταβλητής



Απορίες - Ερωτήσεις ;



Ασκήσεις για το σπίτι



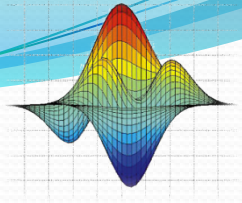
Οι ασκήσεις είναι ατομικές !!!

Αποστέλλετε όλα τα αρχεία m-file σε ένα συμπιεσμένο

αρχείο με όνομα: lab04_OMX_YYYY

(όπου X ο αριθμός ομάδας εργαστηρίου και YYYY το ΑΜ σας)

Στο email: kyriakidis@teicrete.gr



Ασκήσεις για το σπίτι

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την κρουστική και βηματική απόκριση του παρακάτω αιτιατού συστήματος για $n=[0-100]$.

$$y(n) = 0.3x(n) + 0.6x(n-1) + 0.3x(n-2) - 0.9y(n-2)$$

- *Παρατήρηση: Οι υπολογισμοί να πραγματοποιηθούν και με τους δύο τρόπους που έχετε διδαχθεί.*