Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ψηφιακά Φίλτρα

Κυριακίδης Ιωάννης

2011

Συνέλιξη (Convolution)

- Με το **άθροισμα της συνέλιξης** μπορούμε να βρούμε την απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο x(n), αν γνωρίζουμε την κρουστική του απόκριση h(n).
- Η έξοδος y(n) του συστήματος θα ισούται με την συνέλιξη της εισόδου x(n) και της κρουστικής h(n) του συστήματος και ορίζεται ως εξής:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

όπου το σύμβολο * αντιστοιχεί στο τελεστή της συνέλιξης.

Το Άθροισμα της Συνέλιξης

- Το Άθροισμα της Συνέλιξης μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Όταν το σύστημα και η ακολουθία εισόδου είναι αιτιατά (δηλαδή h(n)=x(n)=0, για κάθε n<0 <u>και</u> έχουν μήκος δείγματος M και N αντίστοιχα) τότε αλλάζουν τα όρια του αθροίσματος και η εξίσωση της συνέλιξης παίρνει τη μορφή:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

Για n=0,….,N+M-2

- Άρα η απόκριση y έχει μέγεθος N+M-1

Η Συνάρτηση conv του Matlab

- Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της συνέλιξης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **conv** του Matlab.

- >> help conv

  CONV Convolution and polynomial multiplication.

  C = CONV(A, B) convolves vectors A and B.

  The resulting vector is length MAX([LENGTH(A) + LENGTH(B) - 1, LENGTH(A), LENGTH(B)]).

  <u>If A and B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.</u>

Παράδειγμα υπολογισμού Συνέλιξης

- Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σήμα εισόδου x(n) και την κρουστική του απόκριση h(n). Να υπολογίσετε την συνέλιξη χρησιμοποιώντας την συνάρτηση conv του Matlab.

  $x(n) = 3n^3 + n^2 + 2n + 1$

  $h(n) = n^2 + 2n + 3$

- Αρχικά βρίσκουμε τα διανύσματα a και b όπου θα πρέπει να εισάγουμε ως ορίσματα στην συνάρτηση conv.

```
a = [3 1 2 1];
b = [1 2 3];
y = conv(a, b)
y =
     3     7    13     8     8     3
```

Παράδειγμα υπολογισμού Συνέλιξης

- Πραγματοποιήστε τον υπολογισμό της συνέλιξης για ίδια σήματα x(n) και h(n) στο χαρτί.

  $x(n) = 3n^3 + n^2 + 2n + 1$

  $h(n) = n^2 + 2n + 3$

- Άρα $y(n) = x(n)*h(n) =$

$=(3n^3 + n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 3)$

$=3n^5 + 6n^4 + 9n^3 + n^4 + 2n^3 + 3n^2 +2n^3 + 4n^2 + 6n + n^2 + 2n + 3$

$=\underline{3}n^5 + \underline{7}n^4 + \underline{13}n^3 + \underline{8}n^2 + \underline{8}n + \underline{3}$

Απόκριση Συχνότητας

- Είδαμε ότι το άθροισμα της συνέλιξης είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Αν ως είσοδο είχαμε σήμα της μορφής: $x(n) = e^{jn\omega}$
- Τότε:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega n}e^{-j\omega k} = e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

- Αν ορίσουμε: $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$

- Άρα η μόνιμη απόκριση είναι: $y_{ss}(n) = e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$

Απόκριση Συχνότητας

- Η $H(e^{j\omega})$ είναι στη γενική περίπτωση, μιγαδικός αριθμός και εξαρτάται από τη συχνότητα ω της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.
- Επομένως, χαρακτηρίζει πλήρως την y(n) από το πεδίο ορισμού του χρόνου σε αυτό των συχνοτήτων.
- Η συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ είναι πολύ χρήσιμη και σημαντική για το χαρακτηρισμό των ΓΧΑ συστημάτων και ονομάζεται **Απόκριση συχνότητας**.
- Η απόκριση συχνότητας προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται μια μιγαδική εκθετική ακολουθία ως προς το (μιγαδικό) πλάτος της, όταν αυτή φιλτράρεται από το σύστημα.

Η Συνάρτηση freqz του Matlab

- Η συνάρτηση υπολογισμού την απόκρισης συχνότητας στο Matlab είναι η **freqz**.

>> help freqz

FREQZ Digital filter frequency response.

[H,W] = FREQZ(B,A,N) returns the N-point complex frequency response vector H and the N-point frequency vector W in radians/sample of the filter:

```
                   jw                  -jw                   -jmw
         jw    B(e)      b(1) + b(2)e +  ....  + b(m+1)e
     H(e)  =  ----    = ------------------------------------
                   jw                  -jw                  -jnw
               A(e)      a(1) + a(2)e +  ....  + a(n+1)e
```

given numerator and denominator coefficients in vectors B and A. The frequency response is evaluated at N points equally spaced around the upper half of the unit circle. If N isn't specified, it defaults to 512.

Άσκηση 1 (Εξάσκηση)

- Για το παρακάτω σύστημα με εξίσωση διαφορών:

  y(n) = 1.1y(n-1)-0.5y(n-2)-0.3y(n-4)+0.5x(n)-0.2x(n-1)

- Να υπολογίσετε:

a) Την κρουστική απόκριση για το διάστημα [0,10].

b) Την απόκριση του συστήματος για την παρακάτω είσοδο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση conv.

   x = [5 1 1 1 0 0 1 1 1 0]

c) Την απόκριση για την παραπάνω είσοδο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση filter.

- Τι παρατηρείτε από τα αποτελέσματα;

Άσκηση 1 (Λύση a.)

$$y(n) = 1.1y(n-1)-0.5y(n-2)-0.3y(n-4)+0.5x(n)-0.2x(n-1)$$

- Από την εξίσωση διαφορών παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση με δικό μας κώδικα θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες για n=[0,4].

$$h(n) = 1.1h(n-1)-0.5h(n-2)-0.3h(n-4)+0.5\delta(n)-0.2\delta(n-1)$$

- $h(0) = 0 -0 -0 +0.5 -0 = 0.5$
- $h(1) = 1.1(0.5) -0 -0 +0 -0.2= 0.55 -0.2 = 0.35$
- $h(2) = 1.1(0.35) -0.5(0.5) -0 +0 -0 = 0.385 -0.25 = 0.135$
- $h(3) = 1.1(0.135) -0.5(0.35) -0 +0 -0 = 0.1485 -0.175 = -0.0265$
- $h(4) = 1.1(-0.0265) -0.5(0.135) -0.3(0.5) +0 - 0$

  $= -0.0215 -0.0675 -0.15 = -0.24665$

Άσκηση 1 (Λύση a.)

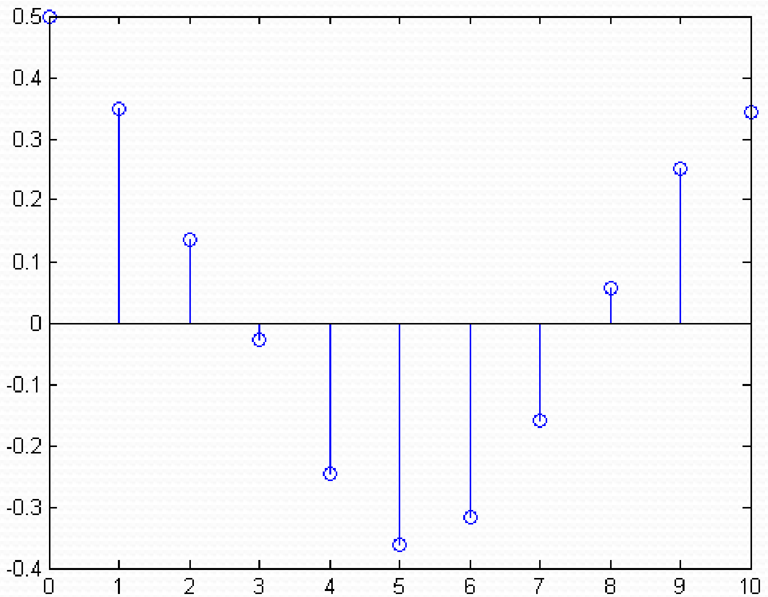
$$y(n) = 1.1y(n-1)-0.5y(n-2)-0.3y(n-4)+0.5x(n)-0.2x(n-1)$$

- Χωρίζουμε την είσοδο από την έξοδο:

$$y(n) -1.1y(n-1)+0.5y(n-2)+0.3y(n-4) = 0.5x(n)-0.2x(n-1)$$

- Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση filter του Matlab:

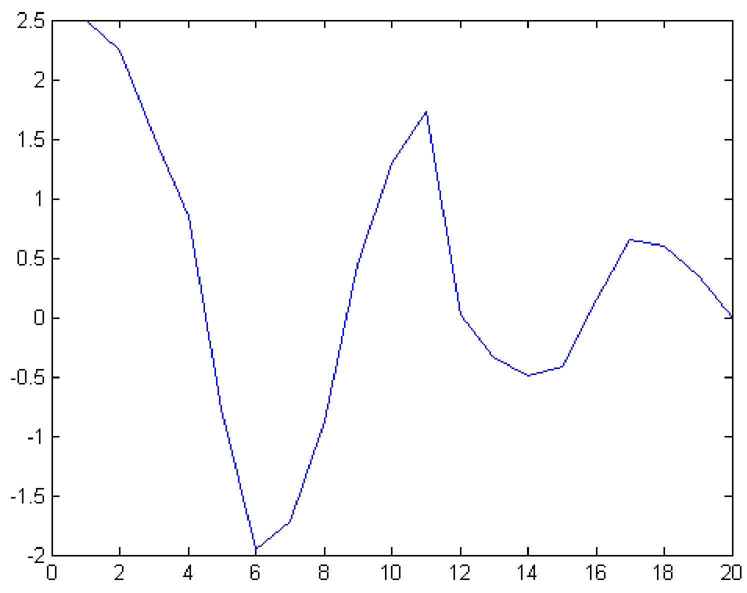
```
n=0:10;
d=inline('n==0');

a=[1 -1.1 0.5 0 0.3];
b=[0.5 -0.2 0 0 0];

h=filter(b, a, d(n));
stem(n, h);
```



Άσκηση 1 (Λύση b.)

- Για τον υπολογισμό της απόκρισης (χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **conv**) προσθέτουμε στο τέλος του προηγούμενο κώδικα:
- Έστω ότι η είσοδος μας είναι: x = [5 1 1 1 0 0 1 1 1 0]

```
x=[5 1 1 1 0 0 1 1 1 0];
y=conv(x, h);
figure;
plot(y);
```

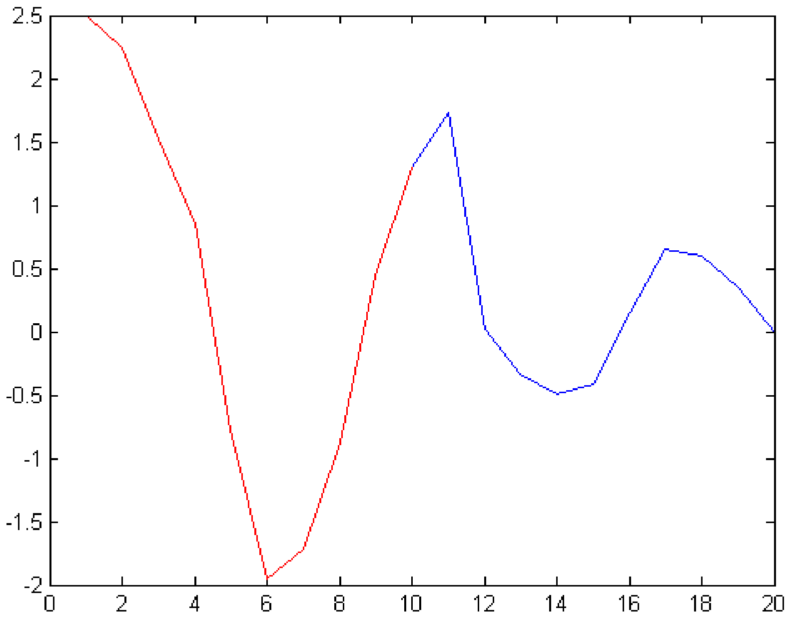


- Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 1 (Λύση c.)

- Για τον υπολογισμό της απόκρισης (χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **filter**) προσθέτουμε στο τέλος του προηγούμενο κώδικα:

```
y2=filter(b, a, x);
hold on;
plot(y2,'r');
```



- Τι παρατηρείτε;

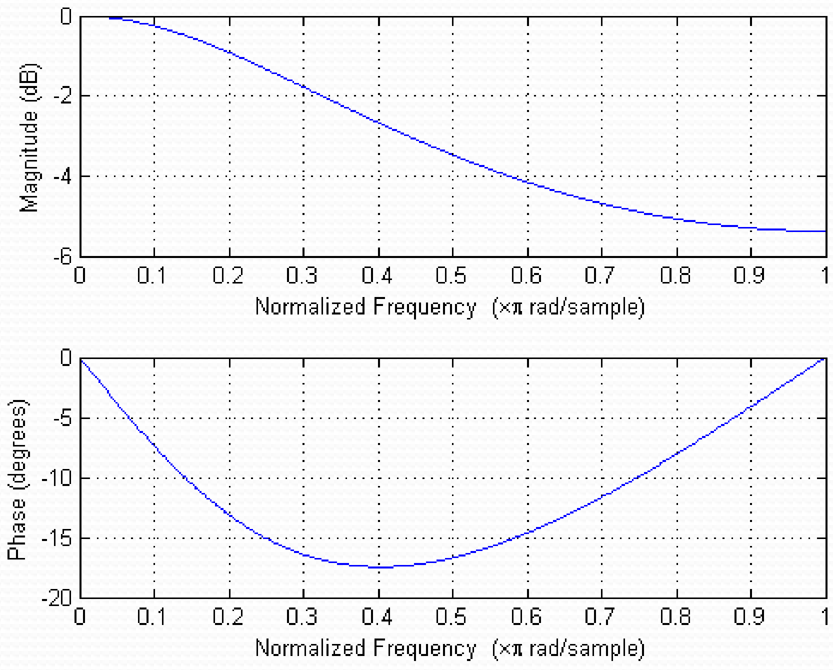
Άσκηση 2

- Να υπολογιστεί και να παρασταθεί γραφικά η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) του παρακάτω φίλτρου.

$$y(n) = 0.3y(n-1) + 0.7x(n) \quad \text{Για } n>=0$$

- Λύση

```
% y(n)- 0.3y(n-1) = 0.7x(n)
a=[1 -0.3];
b=[0.7 0];

freqz(b, a);
```



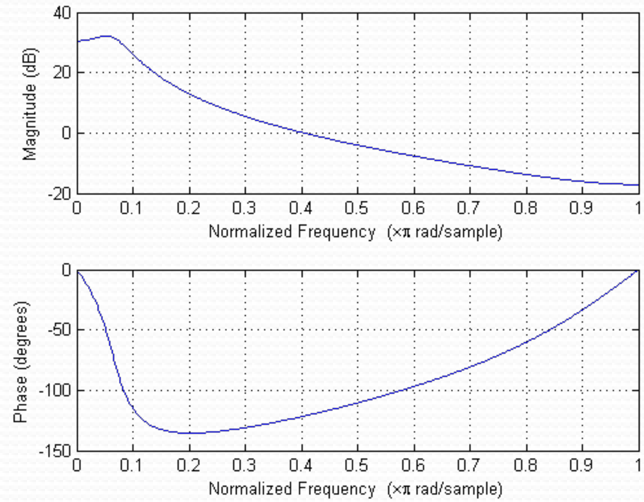
Άσκηση 3

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) <u>με 512 δείγματα στο άνω ήμισυ του μοναδιαίου κύκλου (ω=0-π)</u> του φίλτρου με την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς.

$$H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}}{1-1.8\cos(\frac{\pi}{16})z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

- Λύση

```
a=[1 -1.8*cos(pi/16) 0.81];
b=[1 0.5 0];

freqz(b, a);
```



Απορίες - Ερωτήσεις ;

Ασκήσεις για το σπίτι

Οι ασκήσεις είναι *ατομικές* !!!

Αποστείλετε όλα τα αρχεία m-file σε ένα συμπιεσμένο αρχείο με όνομα: lab05_OMX_YYYY

(όπου X ο αριθμός ομάδας εργαστηρίου και YYYY το AM σας)

Στο email: kyriakidis@teicrete.gr

Δεν θα έχετε… ☺