

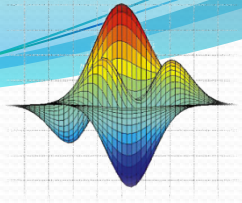
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Μετασχηματισμός Z

Κυριακίδης Ιωάννης

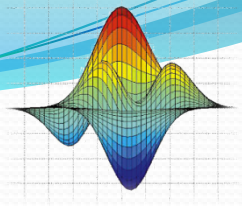
2011

Τελευταία ενημέρωση: 11/12/2011



Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός-z είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί:
 - Για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές.
 - Στον υπολογισμό της απόκρισης ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος σε δεδομένη είσοδο.
 - Στη σχεδίαση γραμμικών φίλτρων.



Εισαγωγή

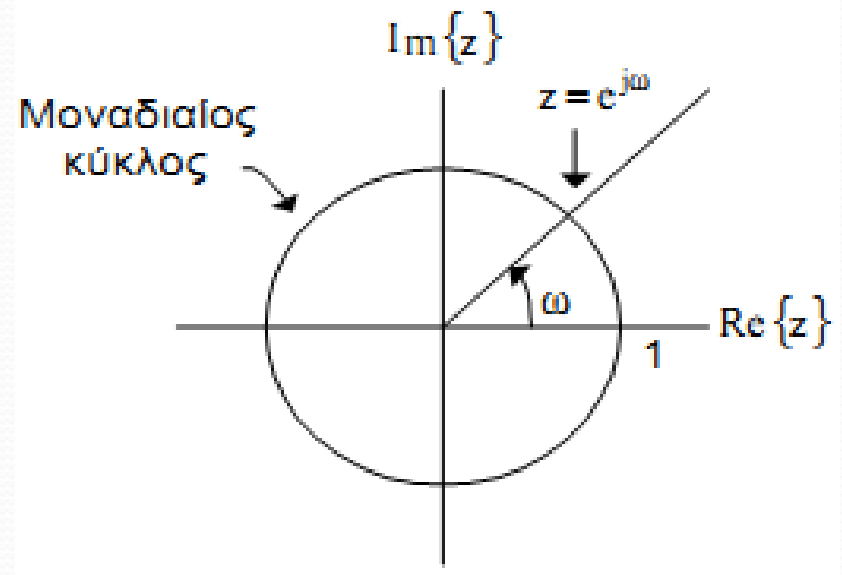
- Ο μετασχηματισμός Z, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου $x(n)$ ορίζεται από τη σχέση:

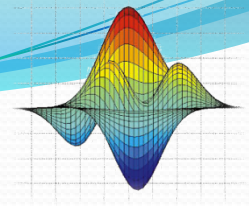
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Το z είναι μιγαδικός αριθμός,
- Οπότε σε πολική μορφή:

$$z = \text{Re}(z) + j\text{Im}(z) = re^{j\omega}$$

Το r είναι το μέτρο της z ενώ το ω είναι η γωνία.





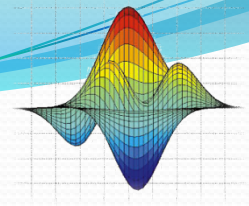
Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός Z, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου $x(n)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Αν μια ακολουθία $x(n)$ έχει μετασχηματισμό Z τη $X(z)$, τότε γράφουμε:

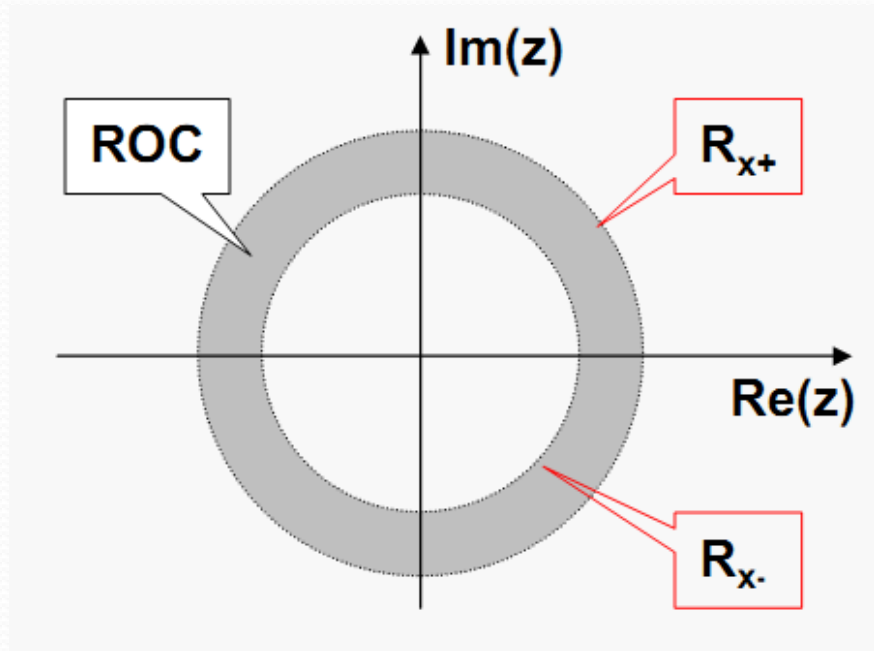
$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

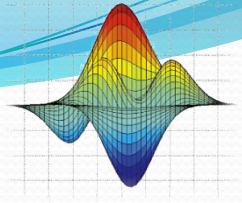


Περιοχή Σύγκλισης

- Το σύνολο των τιμών του z που ο $X(z)$ υπάρχει ορίζουν μια περιοχή στο επίπεδο z , η οποία ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** ή Region Of Convergence (ROC).
- Καθορίζεται από δύο θετικούς αριθμούς R_{x+} και R_{x-} :

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$





Παράδειγμα 1

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της διακριτής ακολουθίας $\delta(n)$.
- Λύση:

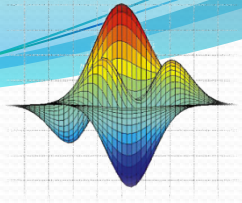
$$\delta(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} \Rightarrow$$

Ιδιότητα:
Είναι 0 (μηδέν) επειδή το $x(n)=0$ για κάθε $n > 0$

$$\Rightarrow \delta(0)z^0 + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} + \dots$$

$$\Rightarrow 1 * 1 + 0 + 0 + \dots$$

$$= 1$$



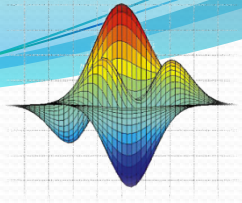
Ιδιότητα της Μετατόπισης

- Μετατοπίζοντας μια ακολουθία (με καθυστέρηση ή προπόρευση) ο μετασχηματισμός Z πολλαπλασιάζεται με μια δύναμη του z .
- Δηλαδή, αν η $x(n)$ έχει μετασχηματισμό Z τη $X(z)$, τότε:

$$x(n - n_0) \stackrel{Z}{\leftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

- Άρα, για παράδειγμα:

$$\delta(n - n_0) \stackrel{Z}{\leftrightarrow} z^{-n_0} X(z) = z^{-n_0} * 1 = z^{-n_0}$$



Παράδειγμα 2

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της βηματικής ακολουθίας $u(n)$.
- Λύση:

$$u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} \Rightarrow$$

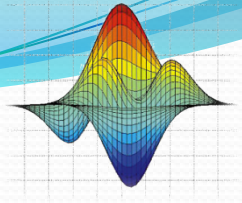
$$\Rightarrow u(-\infty)z^{-(-\infty)} + \dots + u(0)z^{-0} + u(1)z^{-1} + \dots + u(\infty)z^{-\infty}$$

$$\Rightarrow 0 * z^{+\infty} + \dots + 1 * 1 + 1 * z^{-1} + 1 * z^{-2} + 1 * z^{-3} \dots + 1 * z^{-\infty}$$

$$\Rightarrow 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-\infty}$$

$$\Rightarrow 1 + (z^{-1})^1 + (z^{-1})^2 + (z^{-1})^3 + \dots + (z^{-1})^{+\infty}$$

$$\Rightarrow 1/1-z^{-1}$$



Υπενθύμιση Ταυτότητας

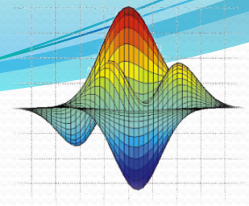
- Στην προηγούμενη άσκηση χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω ταυτότητα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ax^n = \frac{A}{1-x} \quad |x| < 1$$

- Αν θυμηθούμε τον παρακάτω τύπο από τις γεωμετρικές σειρές:

$$A + Ax + Ax^2 + \dots + Ax^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} Ax^n = \frac{A - Ax^N}{1-x}$$

Βλέπουμε ότι αν $|x| < 1$ τότε $x^N \rightarrow 0$ καθώς το $N \rightarrow \infty$ και έτσι παίρνουμε την αρχική μας σχέση.



Παράδειγμα 3

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της παρακάτω ακολουθίας

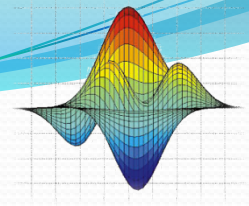
$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 0.8, 0.64, 0.512, \dots \}$$

Το βελάκι δείχνει την τιμή για την χρονική στιγμή $n=0$

- Λύση:

$$x(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} X(z) &= x(0)z^{-0} + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots \\ &= 1 * 1 + 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2} + 0.512z^{-3} + \dots \\ &= 1 + (0.8z^{-1})^1 + (0.8z^{-1})^2 + (0.8z^{-1})^3 + \dots \\ &= 1/1-0.8z^{-1} \end{aligned}$$

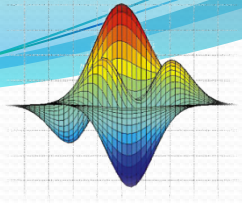


Πίνακας Μετασχηματισμών Z

- Μετασχηματισμοί Z γνωστών ακολουθιών:

Ακολουθία	Μετασχηματισμός Z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλες οι τιμές του z
$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}	Όλες οι τιμές του z, εκτός $z=0$ αν $n_0>0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $

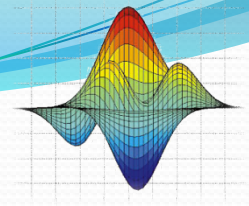
Μετασχηματισμός Z



- Ο μετασχηματισμός Z ως μια ρητή συνάρτηση του z:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}} = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}$$

- Οι ρίζες του αριθμητή β_k καλούνται μηδενικά (zeros) ενώ οι ρίζες του παρονομαστή α_k καλούνται πόλοι (poles).
- Οι πόλοι και τα μηδενικά παρέχουν μια σύντομη αναπαράσταση της $X(z)$ η οποία συχνά παριστάνεται γραφικά με τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών.
- Οι θέσεις των πόλων συμβολίζονται με “x” και οι θέσεις των μηδενικών με “o”.
- Η περιοχή σύγκλισης συμβολίζεται με τη σκίαση της αντίστοιχης περιοχής στο μιγαδικό επίπεδο-z.



Η συνάρτηση tf2zp

- Από το menu πατήστε Help > Using the Desktop
- Αναζητήστε την συνάρτηση tf2zp:

tf2zp

Convert transfer function filter parameters to zero-pole-gain form

Syntax

Syntax

`[z, p, k]=tf2zp(b, a)`

Description

tf2zp finds the zeros, poles, and gains of a continuous-time transfer function.

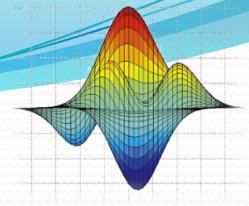
Note You should use tf2zp when working with positive powers ($s^2 + s + 1$), such as in continuous-time transfer functions. A similar function, tf2zpk, is more useful when working with transfer functions expressed in inverse powers ($1 + z^{-1} + z^{-2}$), which is how transfer functions are usually expressed in DSP.

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}$$

you can use the output of tf2zp to produce the single-input, multioutput (SIMO) factored transfer function form:

The vector `a` specifies the coefficients of the denominator polynomial $A(s)$ (or $A(z)$) in descending powers of s (z^{-1}).

The k th row of the matrix `b` represents the coefficients of the k th numerator polynomial (the k th row of $B(s)$ or $B(z)$). Specify as many rows of `b` as there are outputs.



Παράδειγμα

- Βρείτε τα μηδενικά, τους πόλους και τον συντελεστή C της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις του Matlab:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 0.4z + 1}$$

- Λύση:

$$b = [2 \ 3];$$

$$a = [1 \ 0.4 \ 1];$$

%Για να έχουν το ίδιο μέγεθος:

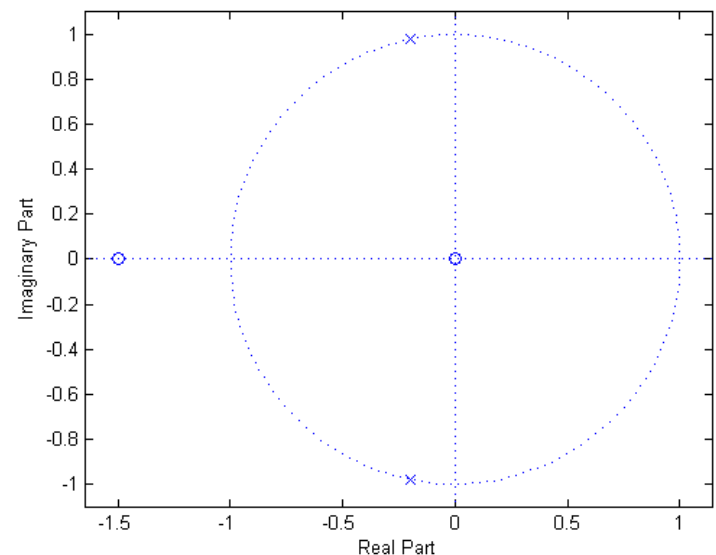
$$[b, a] = \text{eqtflength}(b, a);$$

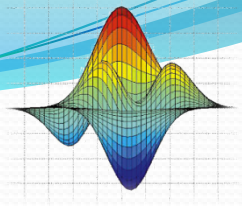
% Πραγματοποίηση υπολογισμών:

$$[z, p, c] = \text{tf2zpr}(b, a)$$

%Σχεδίαση γραφικής παράστασης:

$$\text{zplane}(z, p);$$





Εξάσκηση 1

- Να βρείτε τον μετασχηματισμό Z της παρακάτω ακολουθίας:

$$x(n) = 3\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$$

- Λύση:

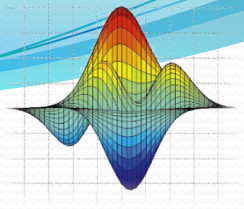
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-2}^2 x(n)z^{-n}$$

$$= x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2}$$

$$= z^2 + 0 + 3 + 0 + z^{-2}$$

$$= z^2 + 3 + z^{-2}$$

- Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι, $x(-2)=1$, $x(-1)=0$, $x(0)=3$, $x(1)=0$ και $x(2)=1$



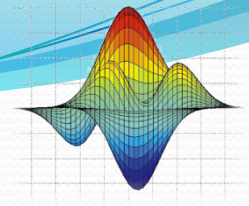
Εξάσκηση 2

- Να βρείτε τον μετασχηματισμό Z της παρακάτω ακολουθίας:

$$x(n) = 5u(n)$$

- Λύση:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5u(n)z^{-n} = 5 \frac{1}{1-z^{-1}}$$



Εξάσκηση 3

- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς.

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

- Λύση:

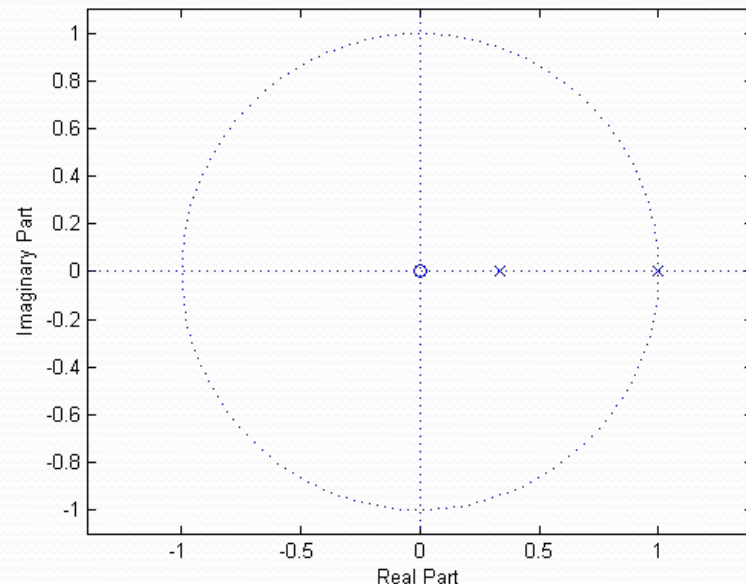
`b=[0 1];`

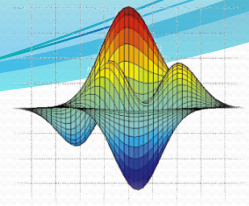
`a=[3 -4 1];`

`[b, a] = eqtflength(b, a);`

`[z, p, c] = tf2zpk(b, a);`

`zplane(z, p);`





Εξάσκηση 4

- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$$

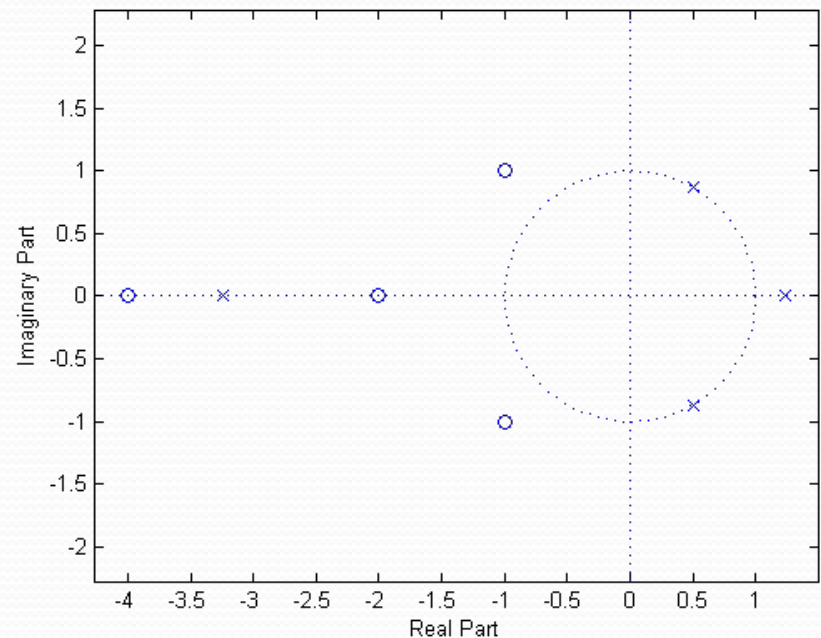
- Λύση:

`b=[2 16 44 56 32];`

`a=[3 3 -15 18 -12];`

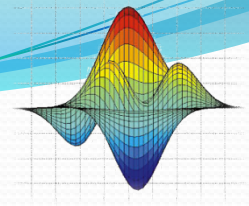
`[z, p, c] = tf2zpk(b, a);`

`zplane(z, p);`





Απορίες - Ερωτήσεις ;



Ασκήσεις για το σπίτι



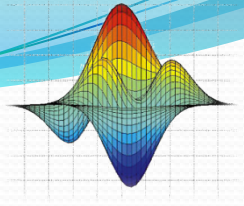
Οι ασκήσεις είναι ατομικές !!!

Αποστέλλετε όλα τα αρχεία m-file σε ένα συμπιεσμένο

αρχείο με όνομα: lab07_OMX_YYYY

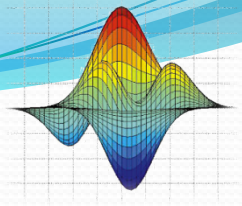
(όπου X ο αριθμός ομάδας εργαστηρίου και YYYY το ΑΜ σας)

Στο email: kyriakidis@teicrete.gr



Άσκηση 1

- Να βρείτε τον μετασχηματισμό Z των παρακάτω ακολουθιών:
 - $x(n) = 6\delta(n-3) - 3\delta(n+2) - 2\delta(n) + \delta(n-2)$
 - $x(n) = 5(0.9)^n u(n)$
 - $x(n) = 0.35^n u(n)$
- Παρατήρηση: Οι απαντήσεις να γραφτούν σε ένα αρχείο *.doc*



Άσκηση 2

- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης των παρακάτω συναρτήσεων μεταφοράς:

- $$X(z) = \frac{4 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

(Χρησιμοποιήστε την εντολή `tf2zpk`)

- $$X(z) = \frac{z + 2z^2 + z^3}{1 - 3z^4 + z^5}$$