Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

Κυριακίδης Ιωάννης

2011

Εισαγωγή

- Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ μπορούμε να υπολογίσουμε το σήμα διακριτού χρόνου x(n) όταν γνωρίζουμε το Μετασχηματισμό Ζ αυτού, X(z).

- Για να συμβολίσουμε αυτή την πράξη γράφουμε:

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$$

Υπολογισμός Αντίστροφου Μ.Ζ.

- Για να υπολογίσουμε την x(n) από την X(z) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις παρακάτω προσεγγίσεις:
  - Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα
  - Δυναμοσειρές
  - Μιγαδική Ολοκλήρωση
- Μια πρακτική προσέγγιση του υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Ζ είναι η ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων και στη συνέχεια η χρήση πινάκων με ήδη υπολογισμένους μετασχηματισμούς Ζ συνηθισμένων ακολουθιών.

Η συνάρτηση residuez του Matlab

- Με την συνάρτηση residuez του Matlab μπορούμε να βρούμε τους κατάλληλους συντελεστές για να γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.
- Η συνάρτηση residuez του Matlab δέχεται δύο ορίσματα, τους συντελεστές του αριθμητή (b) και του παρονομαστή (a) σε <u>φθίνουσα</u> τάξη του Z.
- Επιστρέφει τρεις πίνακες συντελεστών (r, p, k).

Η συνάρτηση residuez του Matlab

- >> help residuez

RESIDUEZ Z-transform partial-fraction expansion.

[R,P,K] = RESIDUEZ(B,A) finds the residues, poles and direct terms of the partial-fraction expansion of B(z)/A(z),

```
B(z)      r(1)                    r(n)
---- = ------------     +...  ------------       + k(1) + k(2)z^(-1) ...
A(z)   1-p(1)z^(-1)           1-p(n)z^(-1)
```

Παράδειγμα 1

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

- Λύση:

```
b=[0 1 0];
a=[3 -4 1];
[r,p,k]=residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [0.5000 -0.5000]

p = [1.0000 0.3333]

k = [0]

Παράδειγμα 1

Από το help της συνάρτησης residuez:

```
B(z)       r(1)                          r(n)
---- = ------------       +...  ------------         + k(1) + k(2)z^(-1) ...
A(z)   1-p(1)z^(-1)          1-p(n)z^(-1)
```

- Αν αντικαταστήσουμε τώρα τα r, p, k που υπολογίσαμε στην παραπάνω σχέση, η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5\frac{1}{1 - z^{-1}} - 0.5\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}$$

Παράδειγμα 1

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5\frac{1}{1 - z^{-1}} - 0.5\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Z βλέπουμε ότι:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\} = 1^n u(n) \qquad \text{και} \qquad Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}\right\} = 0.333^n u(n)$$

- Άρα τελικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της G(z) είναι:

$$G(n) = 0.5u(n) - 0.5 \cdot 0.333^n u(n)$$

Παράδειγμα 2

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{32z^2 + 4}{16z^2 + 12z + 2}$$

- Λύση

```
b=[32 0 4];
a=[16 12 2];
[r,p,k]=residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [6 -6]

p = [-0.5 -0.25]

k = [2]

Παράδειγμα 2

- Άρα χρησιμοποιώντας τα r, p και k θα έχουμε το άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$H(z) = \frac{6}{1+0.5z^{-1}} - \frac{6}{1+0.25z^{-1}} + 2$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Z θα έχουμε:

$$Z^{-1}\{H(z)\} = H(n) = 6\cdot(-0.5)^n u(n) - 6\cdot(-0.25)^n u(n) + 2\delta(n)$$

- **Σημείωση:** Αν για <u>παράδειγμα</u> είχαμε k=[2, 4, 1]

  τότε το H(z) = ⋯ + 2 + 4z^{-1} + z^{-2}

  και το H(n) = ⋯ + 2δ(n) + 2δ(n-1) + δ(n-2)

Παράδειγμα 3

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{18z^3}{18z^3 + 3z^2 - 4z - 1}$$

- Λύση:

```
b=[18 0 0 0];
a=[18 3 -4 -1];
[r,p,k]=residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [0.36 0.24 0.4]

p = [0.5 $\boxed{-0.33}$ $\boxed{-0.33}$]

k = [0]

Παράδειγμα 3

Από το help της συνάρτησης residuez παρατηρούμε ότι:

If P(j) = ... = P(j+m-1) is a pole of multiplicity m, then the expansion includes terms of the form

```
      R(j)              R(j+1)                    R(j+m-1)
 --------------  + -----------------   + ... + -----------------
 1 - P(j)z^(-1)    (1 - P(j)z^(-1))^2          (1 - P(j)z^(-1))^m
```

- Δηλαδή αν στον πίνακα p που θα πάρουμε έχουμε παραπάνω από ένα ίδιο πόλο (*όπως στην άσκηση μας που έχουμε 2 φορές το -0.333*) τότε αυτοί οι όροι θα πρέπει να γραφούν όπως φαίνεται παραπάνω. Έτσι έχουμε:

$$H(z) = 0.36\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 0.24\frac{1}{1+0.33z^{-1}} + 0.4\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^{2}}$$

Παράδειγμα 3

$$H(z) = 0.36\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 0.24\frac{1}{1+0.33z^{-1}} + 0.4\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Ζ βλέπουμε ότι:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} = 0.5^n u(n) \quad \text{και} \quad Z^{-1}\left\{\frac{1}{1+0.33z^{-1}}\right\} = -0.33^n u(n)$$

- Το κλάσμα που απομένει θυμίζει τον 5ο Μ.Ζ. από τον πίνακα γνωστών ακολουθιών, άρα:

$$\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33z^{-1}} \cdot \frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33} \cdot z \cdot \frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}$$

Παράδειγμα 3

- Άρα: $z^{-1}\left\{\dfrac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}\right\} = n(-0.33)^n u(n)$
- Όμως παρατηρούμε ότι έχει απομείνει ένα “z” στην προηγούμενη σχέση.
- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης: $x(n-n_0) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$

$$\frac{1}{-0.33}\cdot z\cdot\frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33}\cdot z^{-(-1)}X(z)$$

- Άρα βλέπουμε ότι $\mathbf{n_0 = -1}$, αυτό σημαίνει ότι ο όρος $n(-0.33)^n u(n)$ θα γίνει $(n+1)(-0.33)^{n+1}u(n+1)$
- Έτσι τελικά η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(n) = 0.36\cdot 0.5^n u(n) + 0.24(-0.33)^n u(n) - \frac{0.4}{0.33}(n+1)(-0.33)^{n+1}u(n+1)$$

Παράδειγμα 4

- Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

- Λύση:

```
b=[0,1,0,0];
a=[1,-4,5,-2];
[r, p, k]=residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

```
r =
   2.0000
  -1.0000 - 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i

p =
   2.0000
   1.0000 + 0.0000i
   1.0000 - 0.0000i

k =
     0
```

Παράδειγμα 4

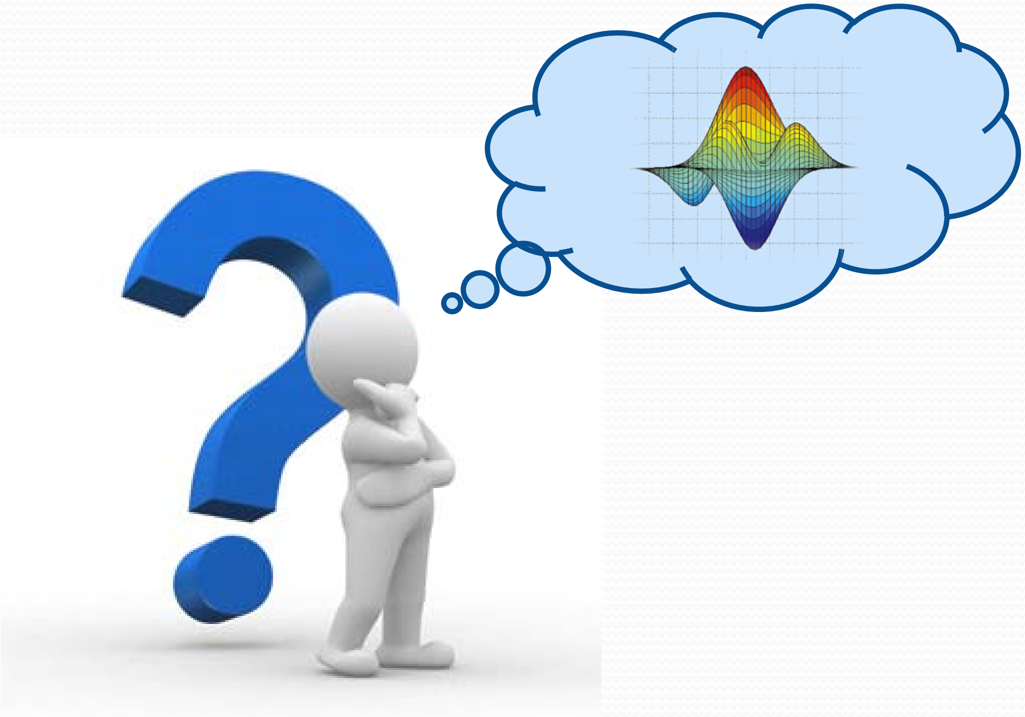
- Άρα χρησιμοποιώντας τα r, p και k θα έχουμε το άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$X(z)=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}-z\cdot\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Z θα έχουμε:

$$x(n)=2\cdot 2^n u(n)-u(n)-(n+1)\cdot u(n+1)$$



Απορίες - Ερωτήσεις ;

Ασκήσεις για το σπίτι

<u>Οι ασκήσεις είναι **ατομικές** !!!</u>

Αποστείλετε όλα τα αρχεία m-file σε ένα συμπιεσμένο αρχείο με όνομα: lab08_OMX_YYYY

(όπου X ο αριθμός ομάδας εργαστηρίου και YYYY το AM σας)

Στο email: kyriakidis@teicrete.gr

Δεν θα έχετε… ☺