

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

➤ Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ή αν θέλετε μιας έρευνας, όπου έχουμε ορίσει την πιθανότητα P κάθε πιθανού ενδεχομένου και A , B δύο ενδεχόμενα. Τα ενδεχόμενα A , B ονομάζονται (στοχαστικώς) ανεξάρτητα αν ισχύει,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Μπορούμε να φανταστούμε δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ως δύο ενδεχόμενα που δεν «επηρεάζει» το ένα την έκβαση του άλλου. Δηλαδή δεδομένου της πραγματοποίησης του ενός η πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου δεν αλλάζει.

🎲 (Παράδειγμα 1). θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρήψη ενός νομίσματος και ενός ζαριού ταυτόχρονα» με δειγματικό χώρο Ω τον οποίο μπορούμε να παραστήσουμε ως εξής

	1	2	3	4	5	6
K	(K,1)	(K,2)	(K,3)	(K,4)	(K,5)	(K,6)
Γ	(Γ,1)	(Γ,2)	(Γ,3)	(Γ,4)	(Γ,5)	(Γ,6)

και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{η ένδειξη του νομίσματος είναι K}\}$$

$$B = \{\text{η ένδειξη του ζαριού είναι 4}\}.$$

Επειδή δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε κάποιο απλό ενδεχόμενο πιθανότερο κάποιου άλλου, θα δεχτούμε ότι είναι όλα ισοπίθανα

$$P(K,1) = P(K,2) = \dots = P(K,6) = P(\Gamma,1) = P(\Gamma,2) = \dots = P(\Gamma,6) = \frac{1}{12}.$$

Τα ενδεχόμενα A , B αναλυτικότερα μπορούν να γραφούν ως εξής,

$$A = \{(K,1), (K,2), \dots, (K,6)\}$$

$$B = \{(K,4), (\Gamma,4)\}$$

και συνεπώς θα ισχύει

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Όμως για την τομή τους έχουμε

$$A \cap B = \{(K, 4)\}$$

που συνεπάγει ότι $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ και θα έχουμε λοιπόν την ισότητα

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Τα ενδεχόμενα λοιπόν A, B είναι ανεξάρτητα. Πράγματι αν γνωρίζουμε από πριν ότι το αποτέλεσμα της ρήψης είναι για το κέρμα K , τότε η πιθανότητα να φέρουμε 4 με το ζάρι δεν αλλάζει και παραμένει $1/6$. Αλλά και αντιστρόφως, δεδομένου του αποτελέσματος 4 στο ζάρι, η πιθανότητα να φέρουμε K στο νόμισμα δεν αλλάζει και παραμένει $1/2$.

✚ (Παράδειγμα 2). Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» με δειγματικό χώρο Ω ο οποίος μπορεί να παρασταθεί σε μορφή πίνακα ως εξής,

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{το άθροισμα των ενδείξεων των εδρών είναι } > 5\}$$

$$B = \{\text{φέρνω } 3\}.$$

Ομοίως και σε αυτό το παράδειγμα, όλα τα απλά ενδεχόμενα θεωρούνται ισοπίθανα και συνεπώς θα έχουμε

$$P(A) = \frac{26}{36}$$

$$P(B) = \frac{6}{36}.$$

Για την τομή $A \cap B$ των ενδεχομένων A, B θα έχουμε

$$A \cap B = \{(3,3), (4,3), (5,3), (6,3)\},$$

οπότε $P(A \cap B) = \frac{4}{36}$ και εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Τα

ενδεχόμενα λοιπόν A, B δεν είναι ανεξάρτητα. Αυτό σημαίνει ότι η γνώση της πραγματοποίησης ενός από τα δύο επηρεάζει την έκβαση του άλλου.

➤ Μία συνάρτηση (κανόνας) X , η οποία σε κάθε στοιχείο ω του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί έναν (πραγματικό) αριθμό, ονομάζεται τυχαία μεταβλητή. Σε κάθε πείραμα τύχης μπορούμε να ορίσουμε πολλές (άπειρες) τυχαίες μεταβλητές και κοιτάμε να είναι όσο τον δυνατόν πιο εύχρηστες.

➤ Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y ονομάζονται ανεξάρτητες, αν για κάθε δύο σύνολα (πραγματικών) αριθμών Γ, Δ ισχύει,

$$P(X \in \Gamma, Y \in \Delta) = P(X \in \Gamma) \cdot P(Y \in \Delta)$$

(*). Ο ορισμός αυτός δεν είναι αυστηρός γιατί πρέπει να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των ενδεχομένων $\{X \in \Gamma, Y \in \Delta\}, \{X \in \Gamma\}, \{Y \in \Delta\}$.

🚧 (Παράδειγμα 3). Ας επανέλθουμε στο πείραμα τύχης του παραδείγματος 3. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον παραπάνω ορισμό, θα ορίσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y ως εξής:

X : παίρνει την τιμή 0 αν φέρουμε Κ και την τιμή 1 αν φέρουμε Γ

Y : παίρνει την τιμή της ένδειξης του ζαριού, δηλαδή 1, 2, ..., 6.

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα αν $\Gamma = \{1, 2, 3\}$ και $\Delta = \{4, 5, 6, 33\}$, τότε

$$P(X \in \Gamma, Y \in \Delta) = P(\{(Γ, 4), (Γ, 5), (Γ, 6)\}) = \frac{3}{12}$$

$$P(X \in \Gamma) = P(\{(Γ, 1), (Γ, 2), (Γ, 3), (Γ, 4), (Γ, 5), (Γ, 6)\}) = \frac{6}{12}$$

$$P(Y \in \Delta) = P(\{(Γ, 4), (Γ, 5), (Γ, 6), (Κ, 4), (Κ, 5), (Κ, 6)\}) = \frac{6}{12}$$

και έπεται ότι

$$P(X \in \Gamma, Y \in \Delta) = P(X \in \Gamma) \cdot P(Y \in \Delta) = \frac{3}{12}.$$

Το παραπάνω δεν αποδεικνύει την ανεξαρτησία των X, Y και είναι απλά ένα αριθμητικό παράδειγμα. Για να την αποδείξουμε θα πρέπει να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε δύο σύνολα αριθμών Γ, Δ .

🚧 (Παράδειγμα 4). Στο πείραμα τύχης του παραδείγματος 2 ορίζουμε τις εξής δύο τυχαίες μεταβλητές

$X =$ άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών

$Y =$ ένδειξη του δεύτερου ζαριού.

Σύμφωνα με το παράδειγμα αυτό θα έχουμε

$$P(X > 5, Y = 4) \neq P(X > 5) \cdot P(Y = 4)$$

και συνεπώς οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.