Σημειώσεις στις Πιθανότητες

1. Πείραμα τύχης και πιθανότητα

Ένα φυσικό φαινόμενο με χαρακτηριστικά που δεν μπορούμε να τα προβλέψουμε, ονομάζεται στοχαστικό ή τυχαίο. Για παράδειγμα το ύψος των κυμάτων στη θάλασσα, όταν τα παρατηρούμε από κάποιο σταθερό σημείο, όπως επίσης και η περιοχή εκδήλωσης ενός κεραυνού. Ομοίως ένα πείραμα του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα ονομάζεται στοχαστικό ή πείραμα τύχης. Τέτοιο πείραμα μπορεί να είναι η ρήψη ενός κύβου ή η κλήρωση του λόττο.

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται συνήθως με Ω. Κάθε στοιχείο του Ω ονομάζεται απλό ενδεχόμενο και κάθε υποσύνολο του Ω, ενδεχόμενο. Δύο ενδεχόμενα A, B ονομάζονται ξένα μεταξύ τους ή ασυμβίβαστα αν ισχύει $A \bigcap B = \emptyset$.

Παράδειγμα 1. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο νομισμάτων», ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 4 απλά ενδεχόμενα,

$$\Omega = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}, \mathrm{\Gamma K}, \mathrm{\Gamma\Gamma}\}$$

και το υποσύνολο $\{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}, \mathrm{\Gamma K}\}$ του Ω είναι το ενδεχόμενο «να φέρω μια τουλάχιστον κεφαλή».

Παράδειγμα 2. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 36 διατεταγμένα ζεύγη,

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$$

και το ενδεχόμενο «να φέρω διπλές» αποτελείται από 6 στοιχεία και είναι το υποσύνολο $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ του Ω.

Παράδειγμα 3. Έστω ότι μετράμε το ύψος ενός τυχαία επιλεγμένου άνδρα σπουδαστή του τμήματος Διατροφής και Διαιτολογίας του ΤΕΙ Κρήτης. Επειδή το αποτέλεσμα μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός από 140(cm) έως 210(cm), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\Omega = \{[140,150), [160,170), ..., [200,210]\},$$

που περιέχει 7 απλά ενδεχόμενα. Εδώ στην πραγματικότητα το ύψος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[140, 210]$, όμως συνήθως στην πράξη τέτοιους δειγματικούς χώρους οι στατιστικολόγοι τους χωρίζουν σε κλάσεις.

Ο ορισμός της πιθανότητας. Έστω τώρα ότι εκτελούμε ένα πείραμα τύχης και $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος του. Αν σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ του Ω, αντιστοιχίσουμε έναν μη αρνητικό αριθμό p_i έτσι ώστε να ισχύει

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu = 1,$$

τότε έχουμε ορίσει μία πιθανότητα P για κάθε ενδεχόμενο A του πειράματος τύχης ως εξής

$$P(A) = \sum_{\{i | \omega_i \in A\}} p_i .$$

Το παραπάνω άθροισμα σημαίνει ότι αθροίζω τα p_i για όλους τους δείκτες i των στοιχείων ω_i που περιέχονται στο A. Αν το A είναι το κενό σύνολο, δηλαδή δεν περιέχει κανένα στοιχείο, τότε $P(A) = 0$.

Αν θεωρήσουμε όλα τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος τύχης ισοπίθανα μεταξύ τους, τότε θα έχουμε

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_\nu = \frac{1}{\nu}$$

και για κάθε ενδεχόμενο A θα ισχύει

$$P(A) = \frac{N(A)}{\nu},$$

όπου με $N(A)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 4. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο νομισμάτων», όλα τα απλά ενδεχόμενα θεωρούνται ισοπίθανα μεταξύ τους,

ω	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
p	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

και για την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}\}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \end{aligned}$$

Επιλέξαμε την παραπάνω «μοντελοποίηση» γιατί δεν υπάρχει κανένας λόγος μια όψη των νομισμάτων να είναι «πιθανότερη» στην εμφάνιση της από την άλλη.

Παράδειγμα 5. Ομοίως και στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών», εφόσον αυτά είναι «δίκαια», σε κάθε απλό ενδεχόμενο αντιστοιχούμε την πιθανότητα 1/36. Συνεπώς για το ενδεχόμενο $A = \{\text{διπλές}\}$ θα έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{36}.$$

Παράδειγμα 6. Στο παράδειγμα 2 δεν γνωρίζουμε πως κατανέμονται τα ύψη των σπουδαστών στις κλάσεις του δειγματικού χώρου και για τον λόγο αυτό δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στην μοντελοποίηση, δηλαδή να αντιστοιχήσουμε μια πιθανότητα p_i σε κάθε κλάση. Μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε αυτή την πιθανότητα, μετρώντας το ύψος σε ένα τυχαίο δείγμα ν σπουδαστών. Αν ν_{175} είναι η συχνότητα της κλάσης $[170,180)$ στο δείγμα, τότε

$$p_{175} = \frac{\nu_{175}}{\nu}.$$

Όπου p_{175} είναι η πιθανότητα που αντιστοιχούμε στην κλάση $[170,180)$ και ομοίως για όλες τις υπόλοιπες κλάσεις.

Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, όπου έχουμε ορίσει μία πιθανότητα P και A, B δύο ενδεχόμενα. Τότε ισχύει ότι

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Αν θέλετε να δείτε γιατί ισχύει ο παραπάνω τύπος μπορείτε να ξεκινήσετε από τον ορισμό, δηλαδή

$$\begin{aligned} P(A \bigcup B) &= \sum_{\{i | \omega_i \in A \bigcup B\}} p_i \\ &= \sum_{\{i | \omega_i \in A\}} p_i + \sum_{\{i | \omega_i \in B\}} p_i - \sum_{\{i | \omega_i \in A \bigcap B\}} p_i \\ &= P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \end{aligned}$$

και παρατηρήστε ότι προσθέτουμε τα p_i των στοιχείων που ανήκουν στο A μαζί με τα p_i των στοιχείων που ανήκουν στο B και αφαιρούμε τα p_i των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο, δηλαδή στο $A \bigcap B$. Αν κάποιος δυσκολεύεται να καταλάβει τον παραπάνω συμβολισμό αρκεί να καταλάβει ότι

$$N(A \bigcup B) = N(A) + N(B) - N(A \bigcap B).$$

Παράδειγμα 7. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» θεωρούμε τα ενδεχόμενα,

$$\begin{aligned} A &= \{\text{να φέρω διπλές}\} \\ B &= \{\text{το άθροισμα των ενδείξεων είναι } 10\}. \end{aligned}$$

Τότε εφαρμόζοντας τον προσθετικό νόμο θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{8}{36}.
\end{aligned}
$$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Δύο ενδεχόμενα A, B ονομάζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους αν ισχύει

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Στην πράξη όταν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, το ένα δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου. Δηλαδή, δεδομένου της πραγματοποίησης του A, δεν επηρεάζεται η πιθανότητα πραγματοποίησης του B και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 8. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{στο πρώτο ζάρι άρτιο}\} \\
B &= \{\text{στο δεύτερο ζάρι περιττό}\}
\end{aligned}
$$

και βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B) &= \frac{1}{2}, \\
P(A \cap B) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω ορισμό, τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα γιατί ισχύει η ισότητα

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}.$$

Είναι κάτι που το περιμέναμε γιατί το αποτέλεσμα στο ένα ζάρι δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα στο άλλο. Θεωρήστε τώρα και το ενδεχόμενο

$$C = \{\text{άθροισμα ενδείξεων ίσο με } 10\}.$$

Τότε τα ενδεχόμενα A C είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους;

2. Τυχαία μεταβλητή

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε μια τυχαία μεταβλητή X αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο ω_i του Ω έναν αριθμό a_i και γράφουμε $X(\omega_i) = a_i$.

Παράδειγμα 9. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο νομισμάτων» ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή X ως εξής,

ω	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
$X(\omega)$	0	1	2	3

.

Επίσης στο ίδιο πείραμα τύχης μπορούμε να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή Y η οποία να «μετράει» τις Κορώνες, δηλαδή

ω	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
$Y(\omega)$	2	1	1	0

.

Παράδειγμα 10. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» μπορούμε να ορίσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y ως εξής

$$X = \text{άθροισμα των ενδείξεων}$$
$$Y = \text{απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.}$$

Η X μπορεί να πάρει τις τιμές $2,3,...,12$ και η Y τις τιμές $0,1,...,5$. Για παράδειγμα $X(3,5) = 8$ ενώ $Y(3,5) = 2$.

Παράδειγμα 11. Σε μια κάλπη με 8 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες εκτελούμε το πείραμα τύχης «τραβάμε δύο μπάλες διαδοχικά χωρίς επανάθεση». Έχουμε λοιπόν ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΜ}, \text{ΜΚ}, \text{ΜΜ}\}$ και θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$X : \text{Μετράει τις Μαύρες στην πρώτη δοκιμή}$$
$$Y : \text{Μετράει τις Μαύρες στην δεύτερη δοκιμή.}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y παίρνουν τις ακόλουθες τιμές

	ΚΚ	ΚΜ	ΜΚ	ΜΜ
X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1

.

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε δύο σύνολα αριθμών A, B ισχύει

$$P(X \in \mathrm{A}, Y \in \mathrm{B}) = P(X \in \mathrm{A}) \cdot P(Y \in \mathrm{B}),$$

δηλαδή αν για κάθε δύο σύνολα αριθμών A, B, τα ενδεχόμενα $(X \in \mathrm{A})$ και $(Y \in \mathrm{B})$ είναι ανεξάρτητα.

Το ενδεχόμενο $(X \in \mathrm{A})$, του οποίου η πιθανότητα εμφανίζεται στον παραπάνω ορισμό, περιέχει τα στοιχεία εκείνα του Ω για τα οποία η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ανήκει στο σύνολο A. Μην ξεχνάτε ότι η τιμή της X είναι πάντα κάποιος αριθμός. Ομοίως και για το ενδεχόμενο $(Y \in \mathrm{B})$. Τέλος το ενδεχόμενο $(X \in \mathrm{A}, Y \in \mathrm{B})$ είναι η τομή των ενδεχομένων $(X \in \mathrm{A})$, $(Y \in \mathrm{B})$ και ισχύει

$$(X \in \mathrm{A}, Y \in \mathrm{B}) = (X \in \mathrm{A} \text{ και } Y \in \mathrm{B}) = (X \in \mathrm{A}) \bigcap (Y \in \mathrm{B}).$$

Τέλος αν a είναι ένας αριθμός, τότε το ενδεχόμενο $(X = a)$ περιέχει τα στοιχεία του Ω για τα οποία η X παίρνει την τιμή a.

Παράδειγμα 12. Στο πείραμα τύχης «ρήψη δύο ζαριών» θεωρούμε τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{aligned} &X: \text{Μετράει την ένδειξη του πρώτου ζαριού} \\ &Y: \text{Μετράει την ένδειξη του δευτέρου ζαριού,} \end{aligned}$$

οι οποίες μπορούν να πάρουν τις τιμές 1,2,…,6. Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε και μόνοι σας οι X, Y είναι ανεξάρτητες που είναι αναμενόμενο γιατί το αποτέλεσμα στο ένα ζάρι δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα στο δεύτερο.

Παράδειγμα 13. Στο ίδιο πείραμα τώρα, δηλαδή στην ρήψη δύο ζαριών, θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες δύο τυχαίες μεταβλητές,

$$\begin{aligned} &X: \text{Μετράει το άθροισμα των ενδείξεων} \\ &Y: \text{Μετράει την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.} \end{aligned}$$

Η X μπορεί να πάρει τις τιμές 2,3,…,12 και η Y τις 0,1,…,5. Με ένα παράδειγμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} &P(2 \le X \le 5, 0 \le Y \le 1) = \frac{6}{36} \\ &P(2 \le X \le 5) = \frac{10}{36} \\ &P(0 \le Y \le 1) = \frac{16}{36}, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$P(2 \le X \le 5, 0 \le Y \le 1) \ne P(2 \le X \le 5) \cdot P(0 \le Y \le 1).$$

Παράδειγμα 14. Στο πείραμα τύχης του παραδείγματος 11 θα κάνουμε την παρακάτω μοντελοποίηση

ω	ΚΚ	ΚΜ	ΜΚ	ΜΜ
$P(\omega)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15}$

και θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες δύο τυχαίες μεταβλητές

X : Μετράει τις Μαύρες στην πρώτη δοκιμή
Y : Μετράει τις Μαύρες στην δεύτερη δοκιμή.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15}$$
$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$
$$P(Y=1) = \frac{1}{2},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$P(X=1, Y=1) \neq P(X=1) \cdot P(Y=1).$$

Δηλαδή οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες και συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα τις πρώτης δοκιμής επηρεάζει το αποτέλεσμα της δεύτερης□