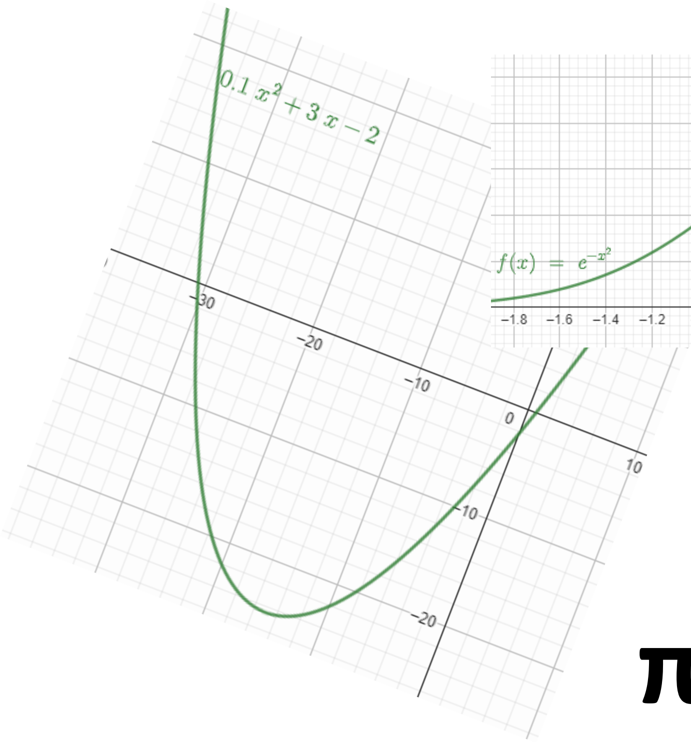
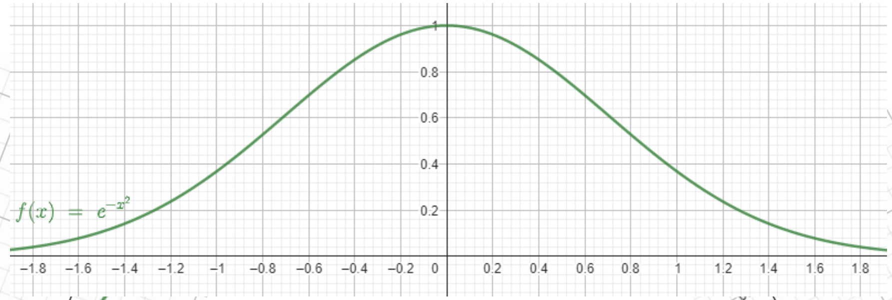
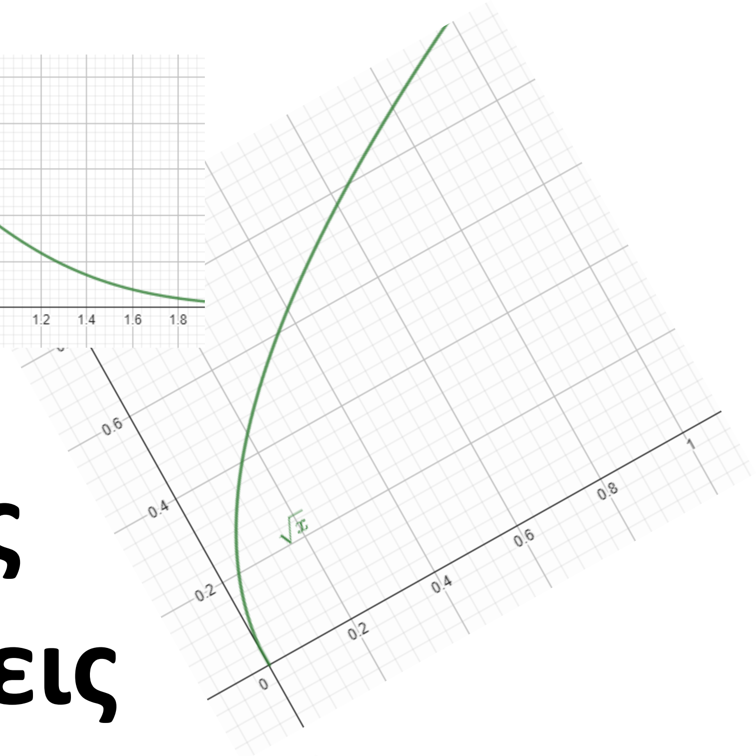
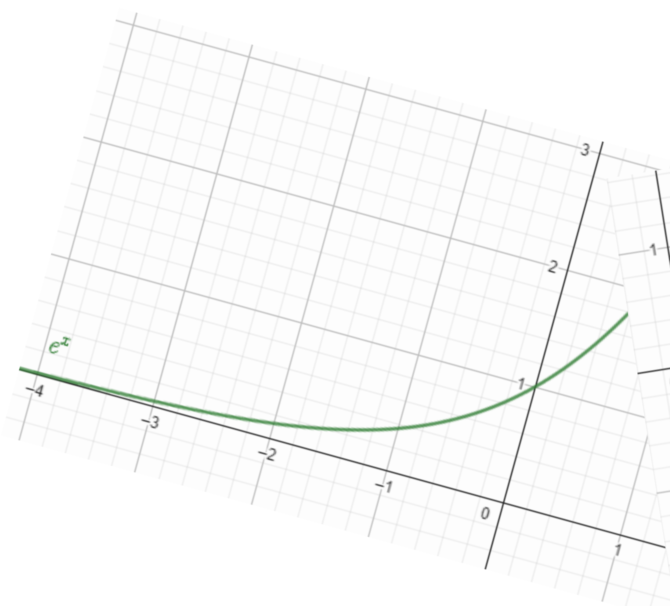
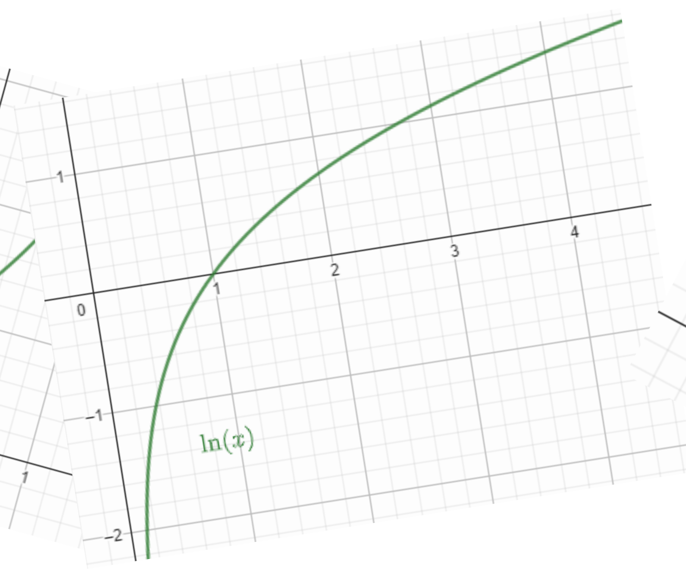


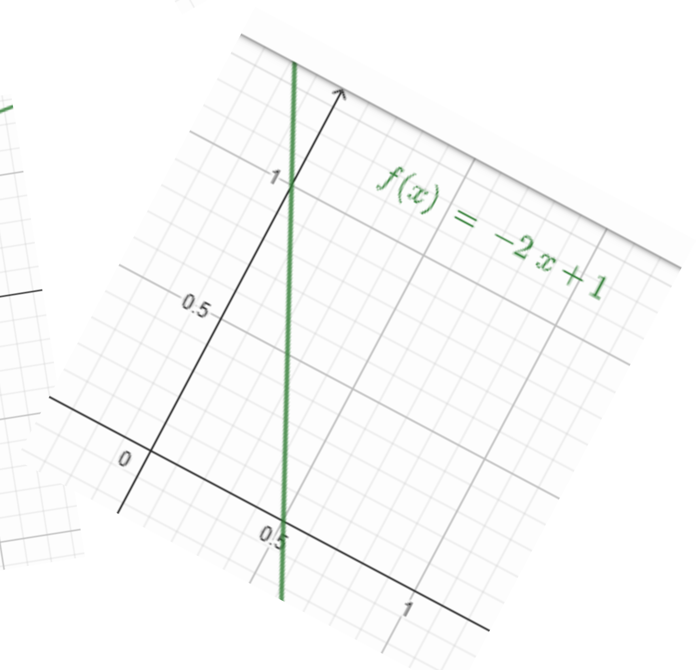




Γραφικές παραστάσεις



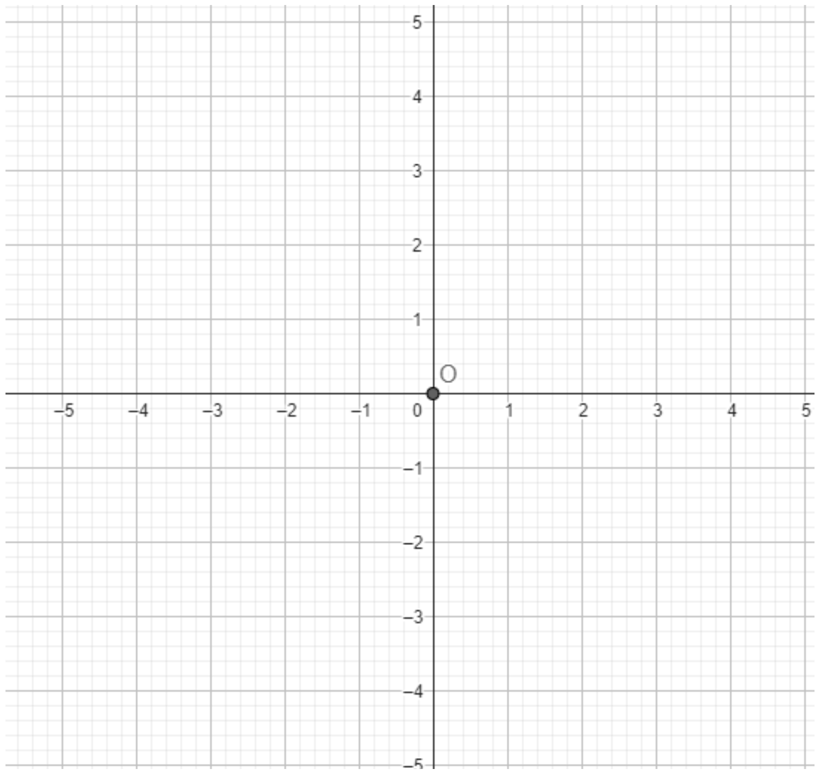




Σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο

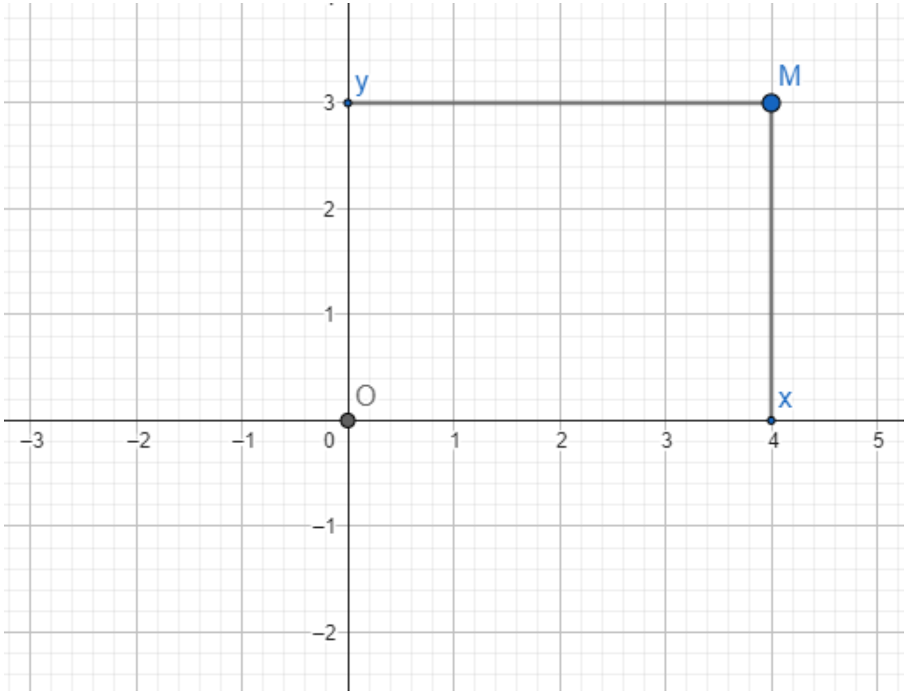
- Θυμίζουμε ότι άξονας είναι μία ευθεία την οποία έχουμε ταυτίσει με τους πραγματικούς αριθμούς,

- Δύο άξονες που τέμνονται κάθετα στο μηδέν, ορίζουν ένα (ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.
- Το σημείο τομής το ονομάζουμε (κοινή) αρχή των αξόνων και το συμβολίζουμε συνήθως με **Ο**.
- Ο «οριζόντιος» άξονας συμβολίζεται με **Ο*x*** και ο «κατακόρυφος» **Ο*y***.
- Ένα επίπεδο με ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται καρτεσιανό επίπεδο προς τιμή του Γάλλου μαθηματικού **Rene Descartes** (1596-1650).



- Και ιδού μία «φωτογραφία» της εποχής του μεγάλου εκείνου μαθηματικού,

- Το καρτεσιανό επίπεδο μας επιτρέπει να ταυτίσουμε κάθε σημείο *Μ* του επιπέδου με ένα **διατεταγμένο** ζεύγος αριθμών **(*x*,*y*)** που ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου *Μ*.
- Ο αριθμός ***x*** ονομάζεται οριζόντια συντεταγμένη ή **τετμημένη** του σημείου *Μ* και ο ***y*** κατακόρυφη συντεταγμένη ή **τεταγμένη** του σημείου *Μ*.



- Έτσι έχουμε

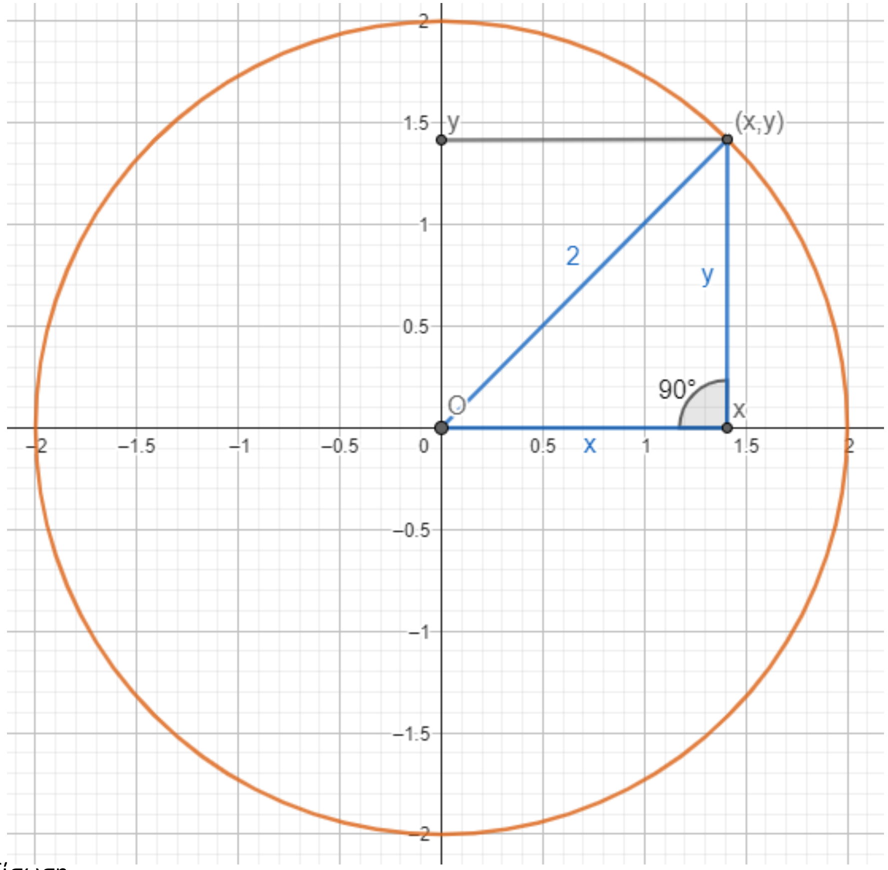
$$M \leftrightarrow (x, y)$$

και όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα (κύκλος, ευθεία, έλλειψη..) είναι τώρα ένα σύνολο συντεταγμένων (*x*,*y*).

- **Παράδειγμα**: κύκλος με κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα 2 είναι το σύνολο των σημείων (*x*,*y*) που ικανοποιούν την εξίσωση

Για να το δείτε αυτό εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο διπλανό ορθογώνιο (μπλε) τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα είναι ακτίνα του κύκλου και έχει μήκος 2.

$$x^2 + y^2 = 2^2$$



είναι το σύνολο των σημείων (*x*,*y*) του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

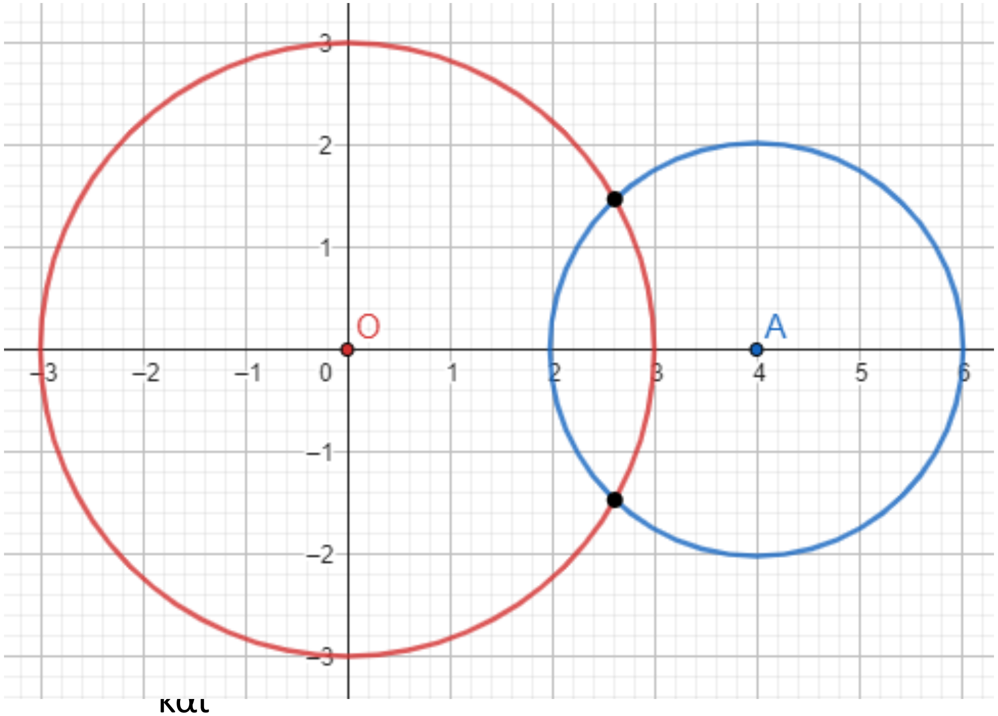
- Επαναστατική για την εποχή ιδέα: Συνέδεσε την **Ευκλείδεια Γεωμετρία** με την **Άλγεβρα** και πολλά προβλήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας «μετασχηματίστηκαν» σε προβλήματα επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων.
- Παράδειγμα: Μπορούμε να βρούμε τα σημεία στα οποία οι διπλανοί κύκλοι τέμνονται. Αρκεί να λύσουμε τις εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

που αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων δευτέρου βαθμού, για να πάρουμε τις λύσεις,

$$x = \frac{21}{8}, \quad y = \pm\frac{9}{4\sqrt{2}}$$

και συνεπώς τα ζητούμενα σημεία είναι

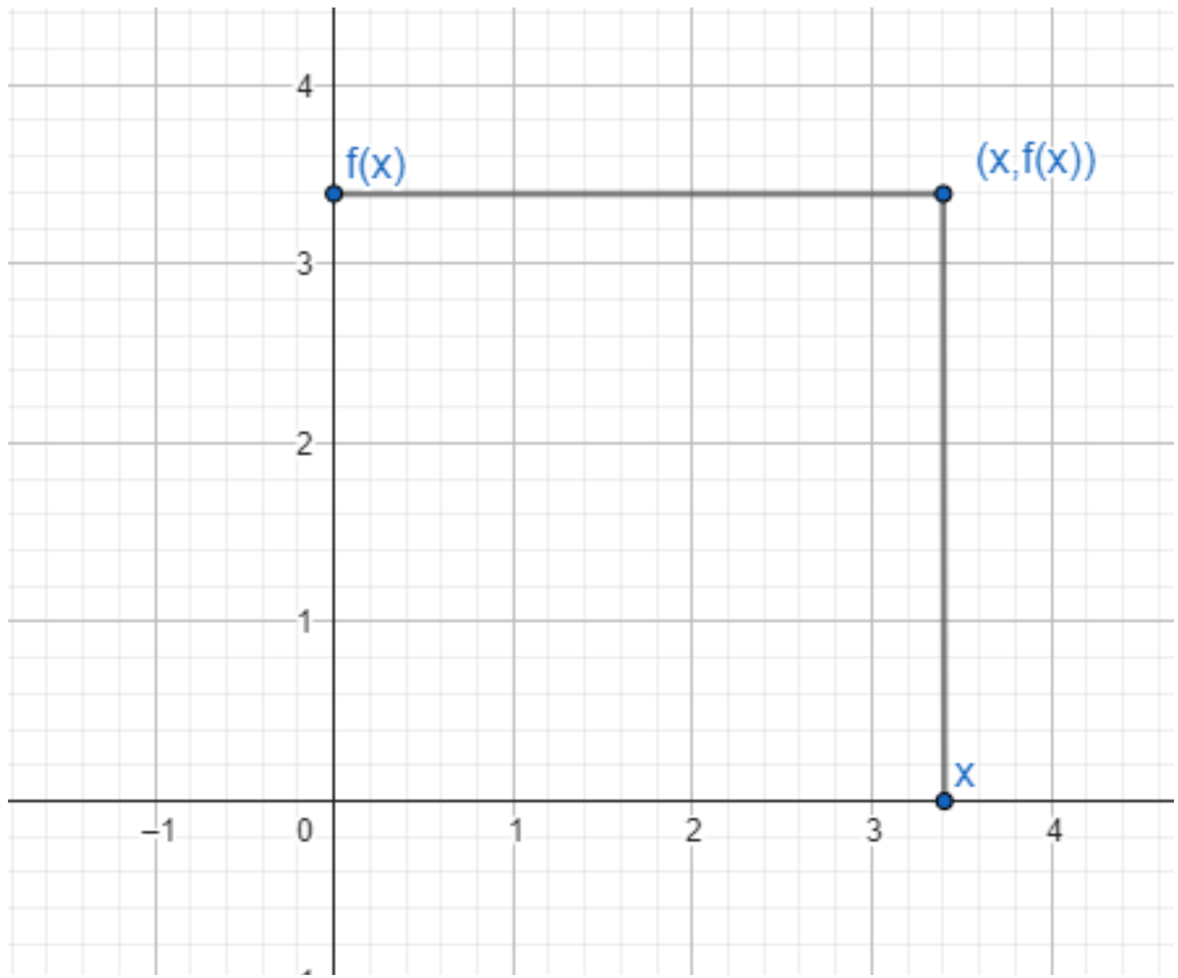


και

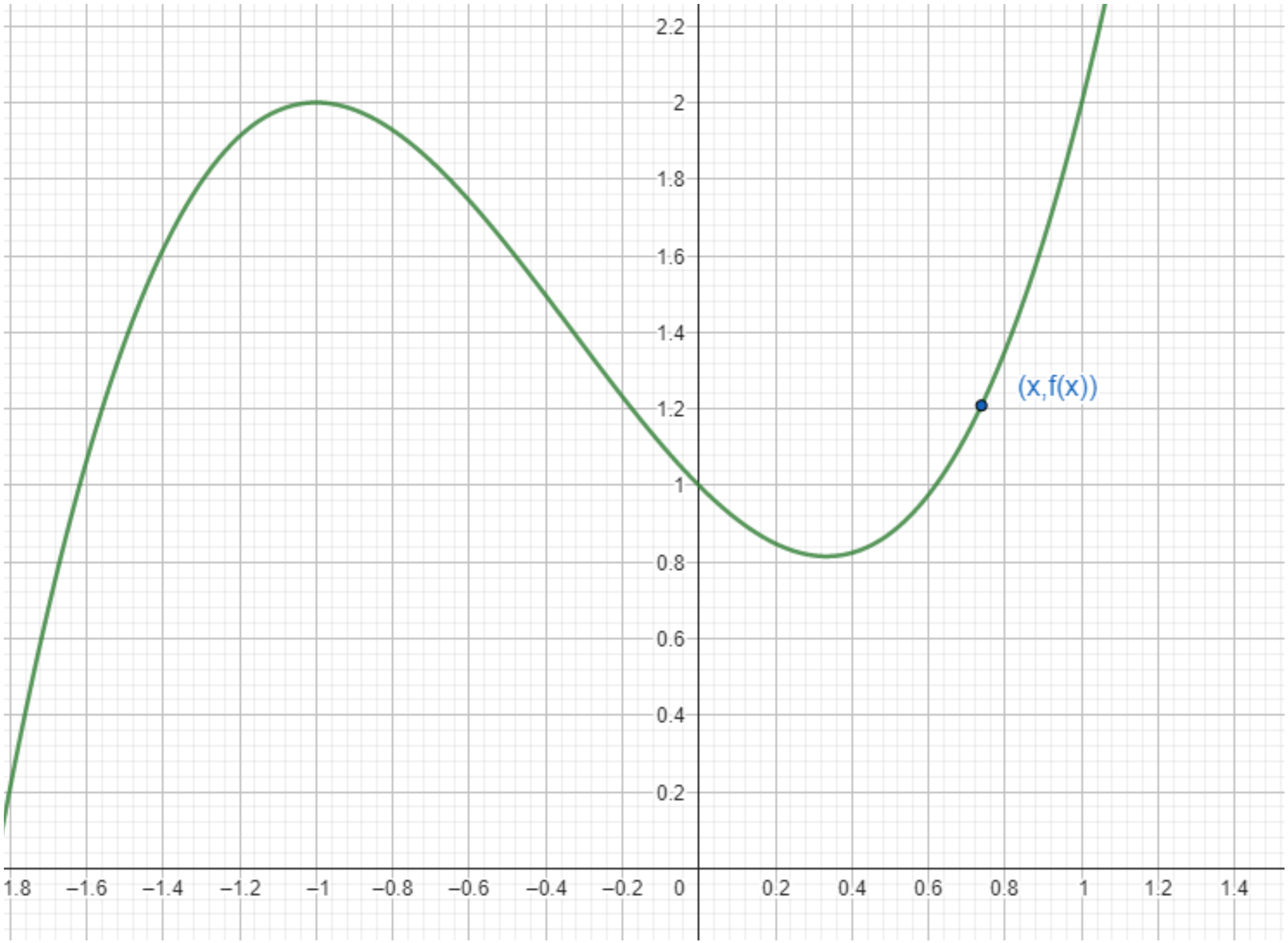
$$\left(\frac{21}{8}, \frac{9}{4\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{21}{8}, -\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Για κάθε *x* από το **πεδίο ορισμού** μίας συνάρτησης ***f*** έχουμε και ένα ζεύγος συντεταγμένων (*x*,*f*(*x*)) το οποίο μπορούμε να αποτυπώσουμε στο καρτεσιανό επίπεδο,

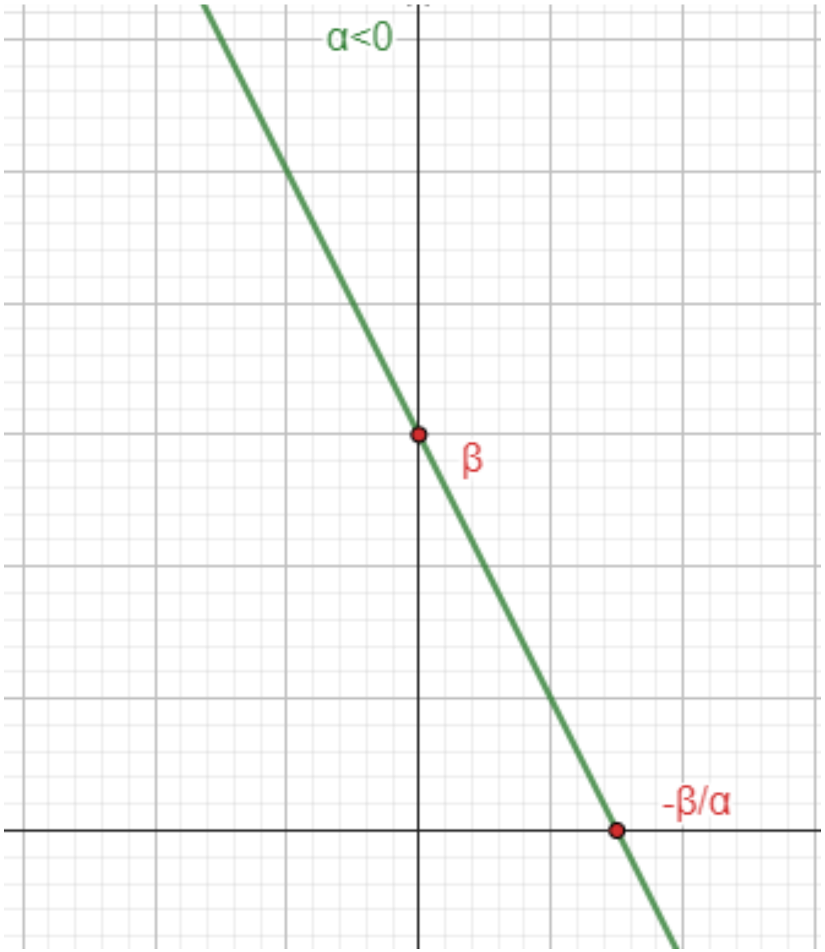


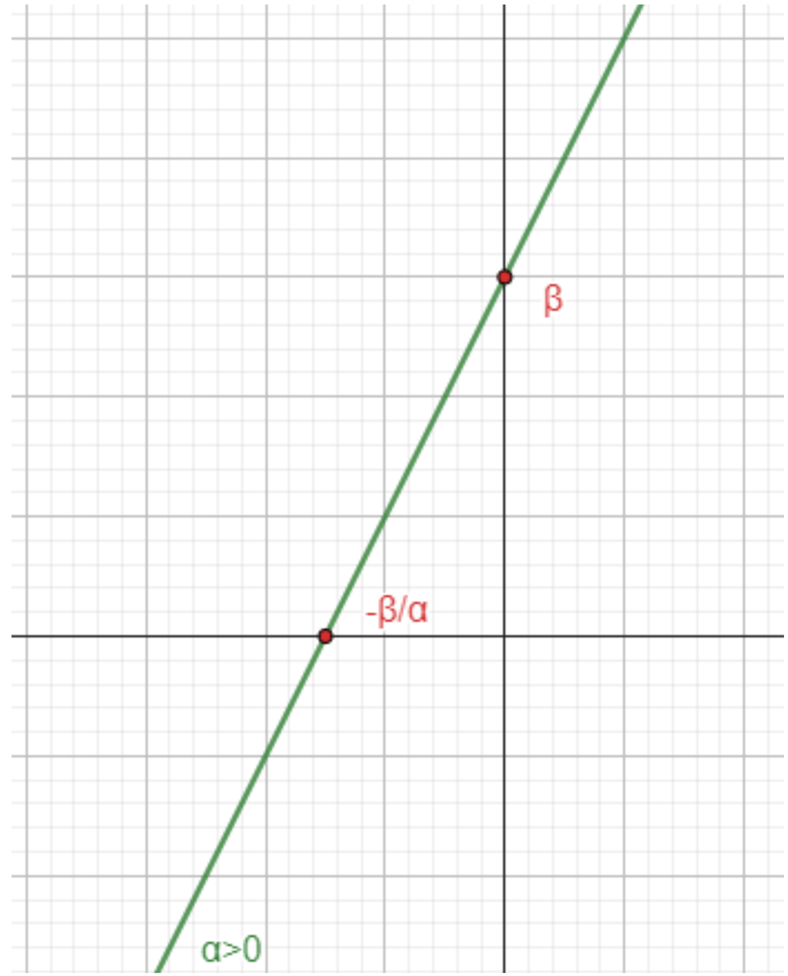
- Γραφική παράσταση της f: Είναι το σύνολο όλων των σημείων $(x,f(x))$ τα οποία αποτυπώνονται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο.



$$f(x) = ax + \beta$$

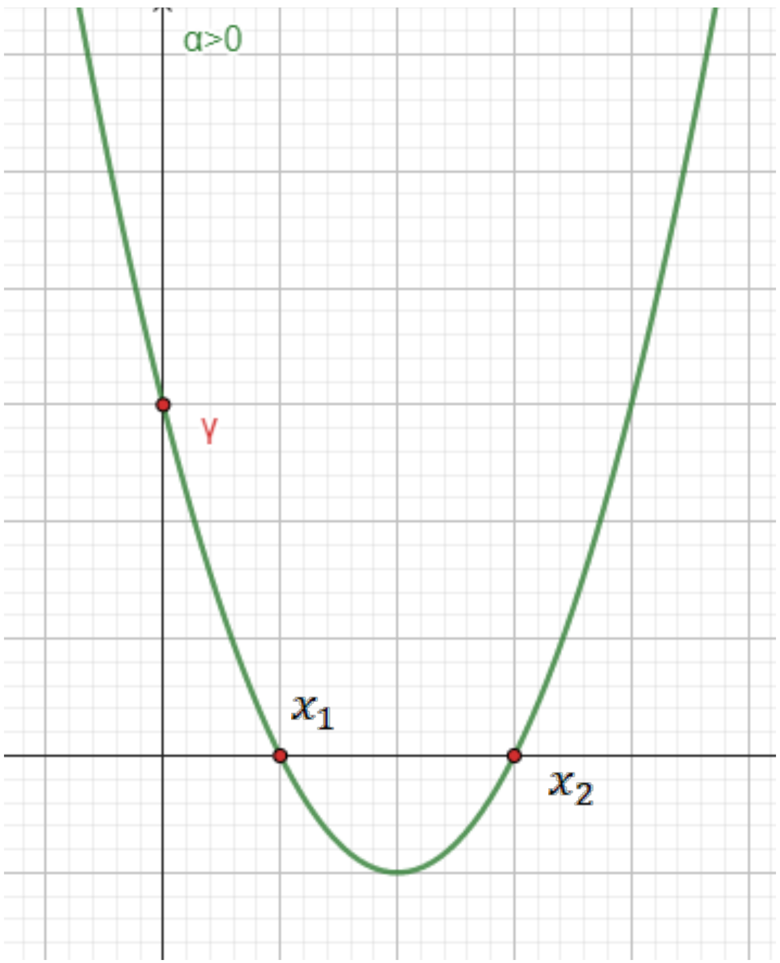
- Είναι μία ευθεία γραμμή
- Είναι αύξουσα όταν α>0 και φθίνουσα όταν α<0.
- Τέμνει τους άξονες Οx και Oy στα σημεία –β/α και β αντιστοίχως.

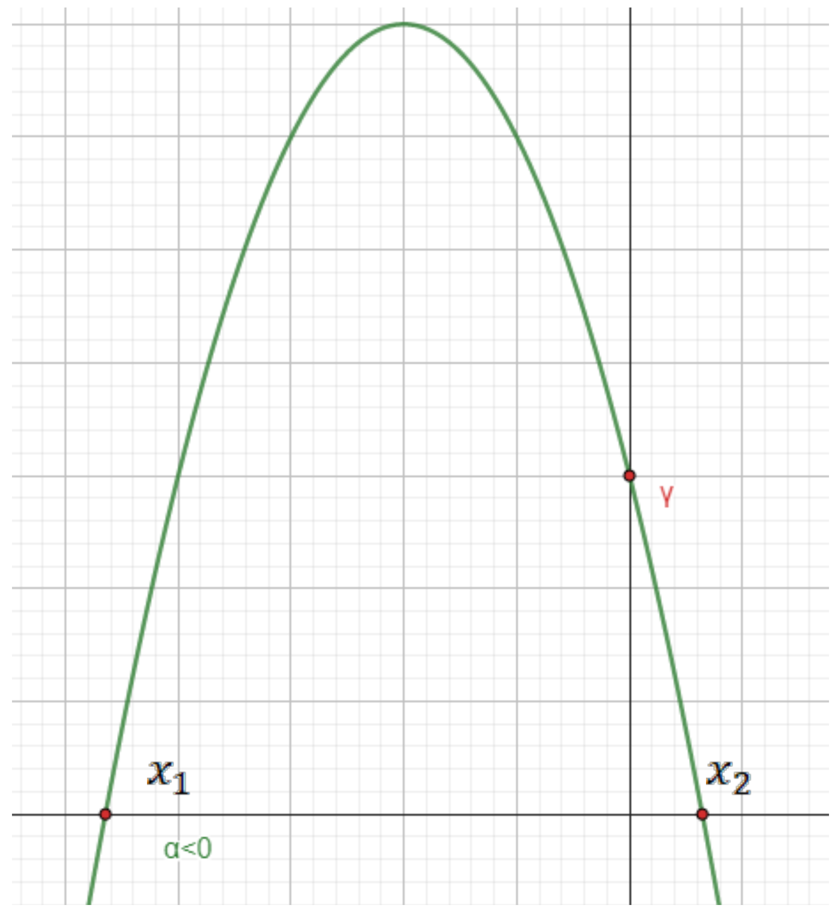




$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$$

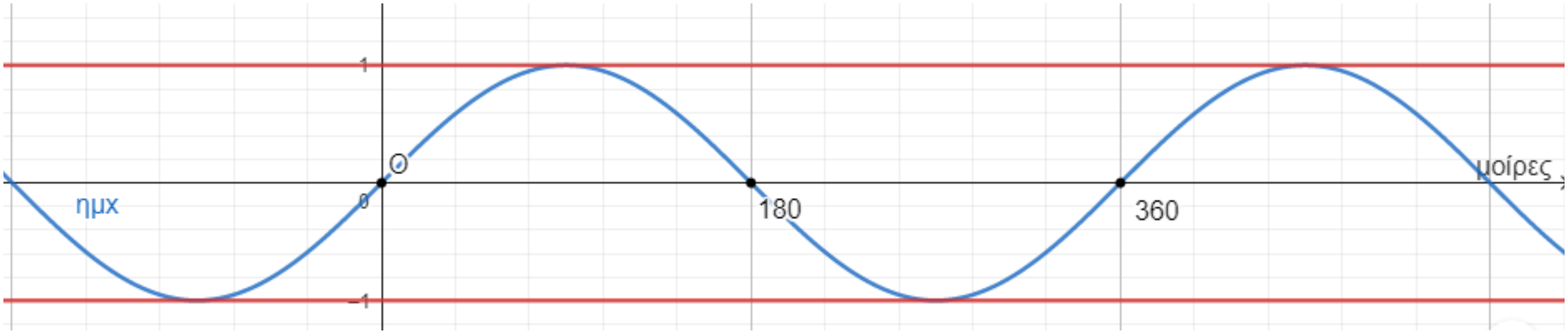
- Ονομάζεται παραβολή
- «Κοιτάζει» πάνω όταν α>0 και κάτω όταν όταν α<0.
- Μπορεί να τέμνει τον άξονα Οx σε ένα, σε δύο ή σε κανένα σημείο.

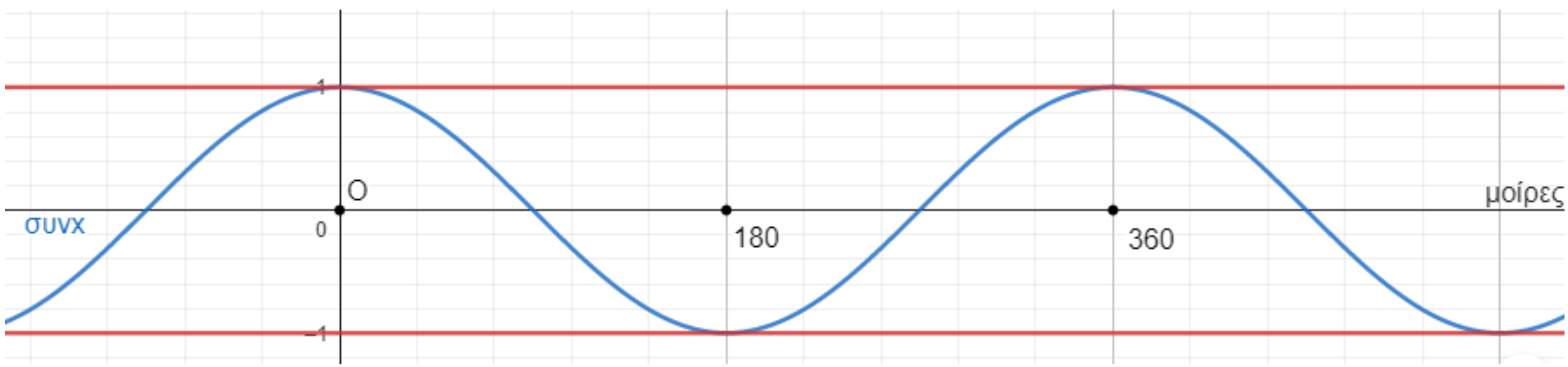




$$\varphi(x) = \eta\mu x,\ \psi(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

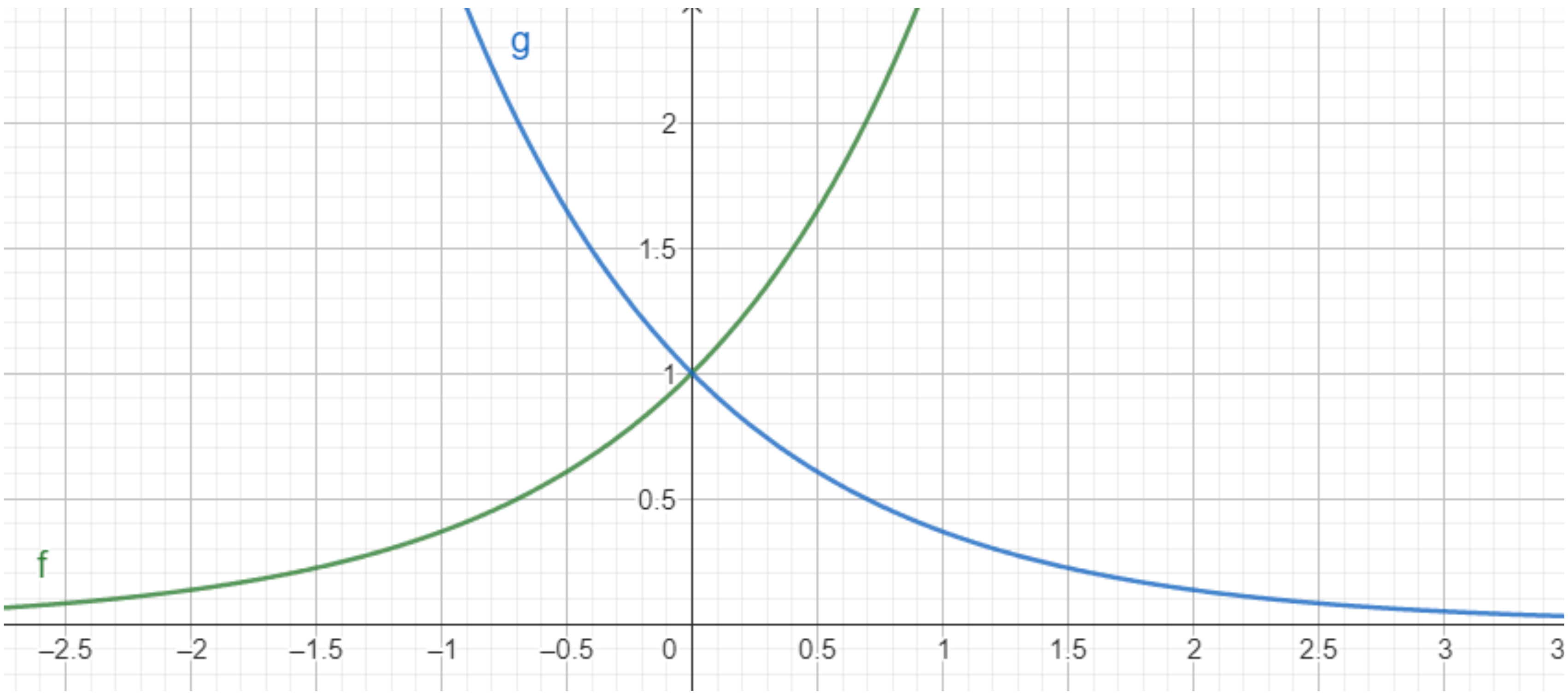
- Μοιάζουν με κύμα το οποίο διαδίδεται στον άξονα O*x*
- Έχουν «διαφορά φάσης» 90 μοίρες
- Επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα μήκους 360 μοιρών





$$f(x) = e^{x} \ , \ g(x) = e^{-x}$$

- Η f είναι η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e και η g είναι η εκθετική με βάση τον $1/e$.
- Η f είναι αύξουσα ενώ η g είναι φθίνουσα.
- Και οι δύο κόβουν τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο 1.
- Η f πλησιάζει τον οριζόντιο άξονα ασυμπτωτικά στο -∞ και η g τον πλησιάζει ασυμπτωτικά στο + ∞.



$$f(x) = \ln x$$

- Είναι η «φυσική» λογαριθμική συνάρτηση και έχει πεδίο ορισμού το διάστημα (0,+ ∞).
- Είναι αύξουσα.
- Τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο 1.
- Πλησιάζει ασυμπτωτικά τον κατακόρυφο άξονα στο -∞.

Νέες συναρτήσεις από παλιές

- Αν μας δώσουν δύο συναρτήσεις f και g τότε μπορούμε να πάρουμε:
- Το άθροισμα ή την διαφορά τους,

$$f(x)+g(x) \ , \ f(x)-g(x)$$

με πεδίο ορισμού την τομή των πεδίων ορισμού των f , g.

- Το γινόμενο τους ή το πηλίκο τους,

$$f(x)\cdot g(x)$$

$$f(x)/g(x) \ , \ g(x)\neq 0$$

με πεδίο ορισμού την τομή των πεδίων ορισμού των f , g.

- Την σύνθεση της f με την g,

$$g(f(x))$$

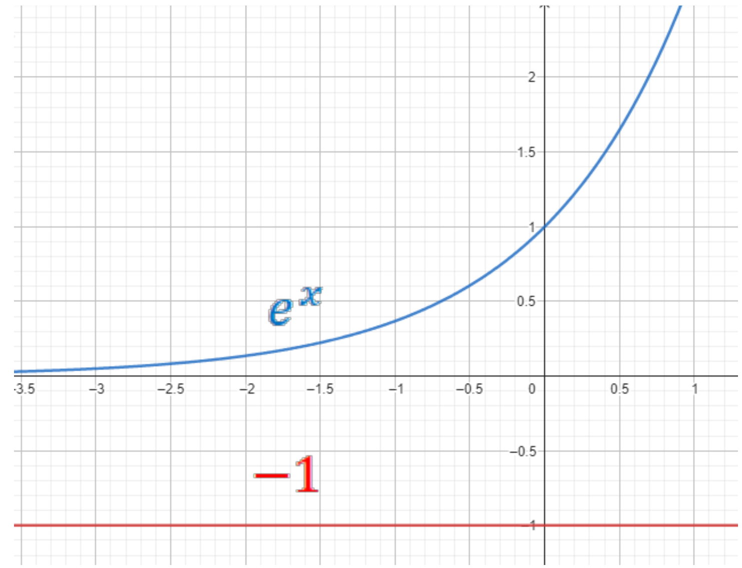
την οποία συμβολίζουμε με

με πεδίο ορισμού εκείνα τα x για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

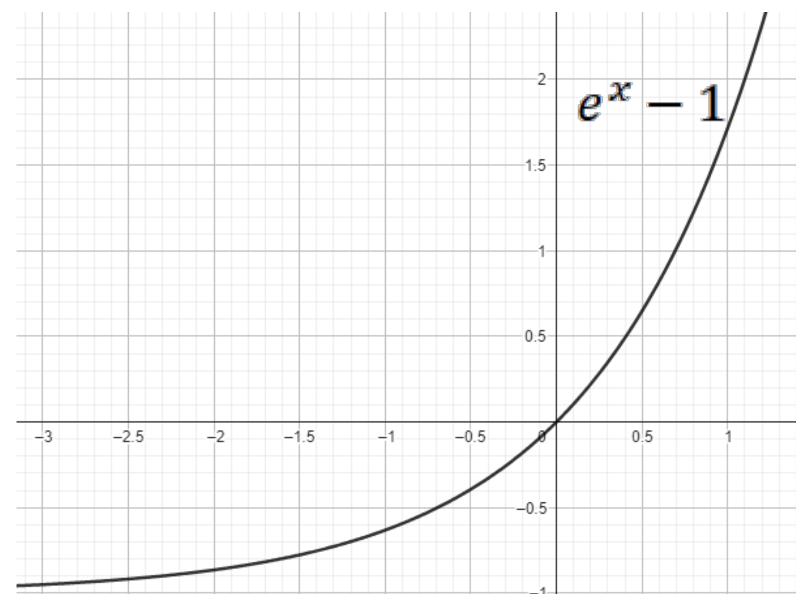
$$g \circ f$$

$e^x - 1$

- Είναι το άθροισμα της e^x και της σταθερής συνάρτησης -1 η οποία είναι μία ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα Ox και τέμνει τον Oy στο -1.



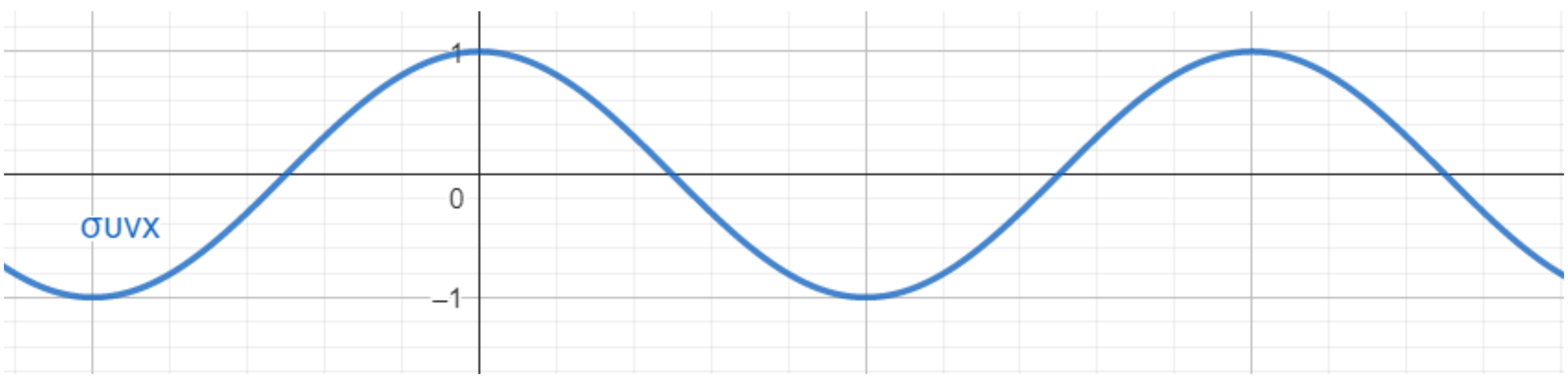
- Το γράφημα της προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση του γραφήματος της f κατά μία μονάδα προς τα κάτω.



$$\eta\mu(x) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

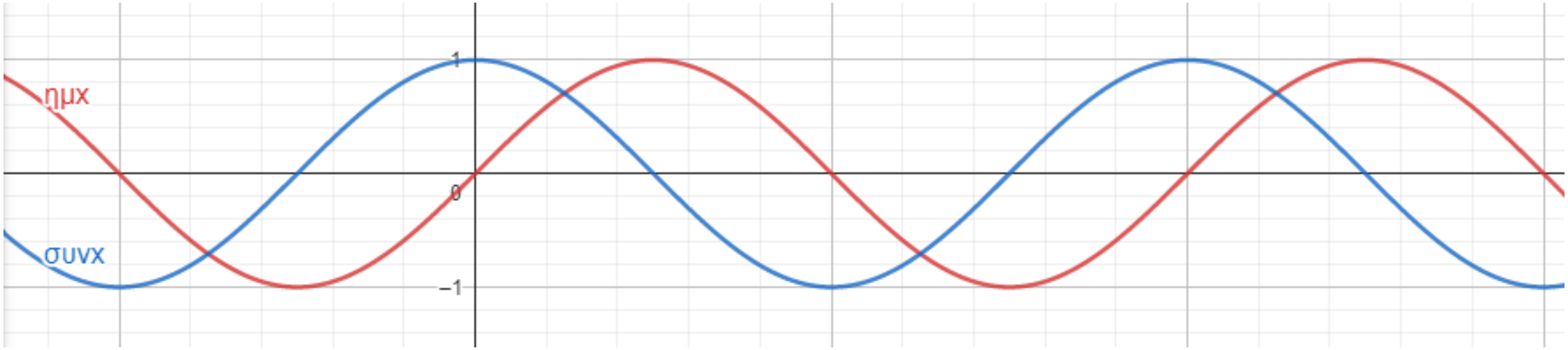
- Πρόσθεση ταλαντώσεων με διαφορά φάσης 90 μοίρες

+

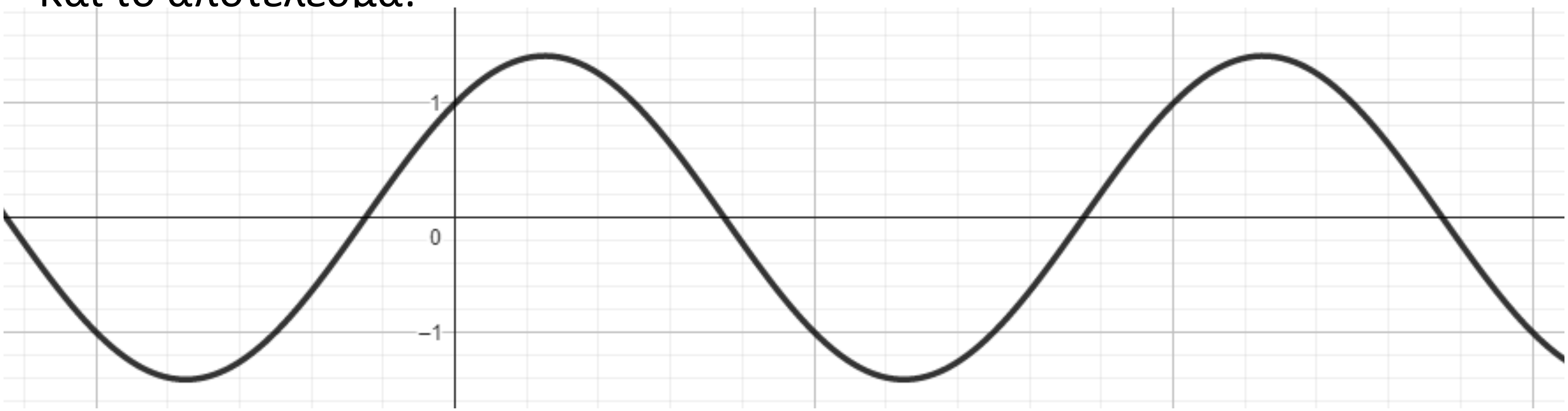


$$\eta\mu(x) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Τις βάζουμε μαζί για να τις συγκρίνουμε καλύτερα,

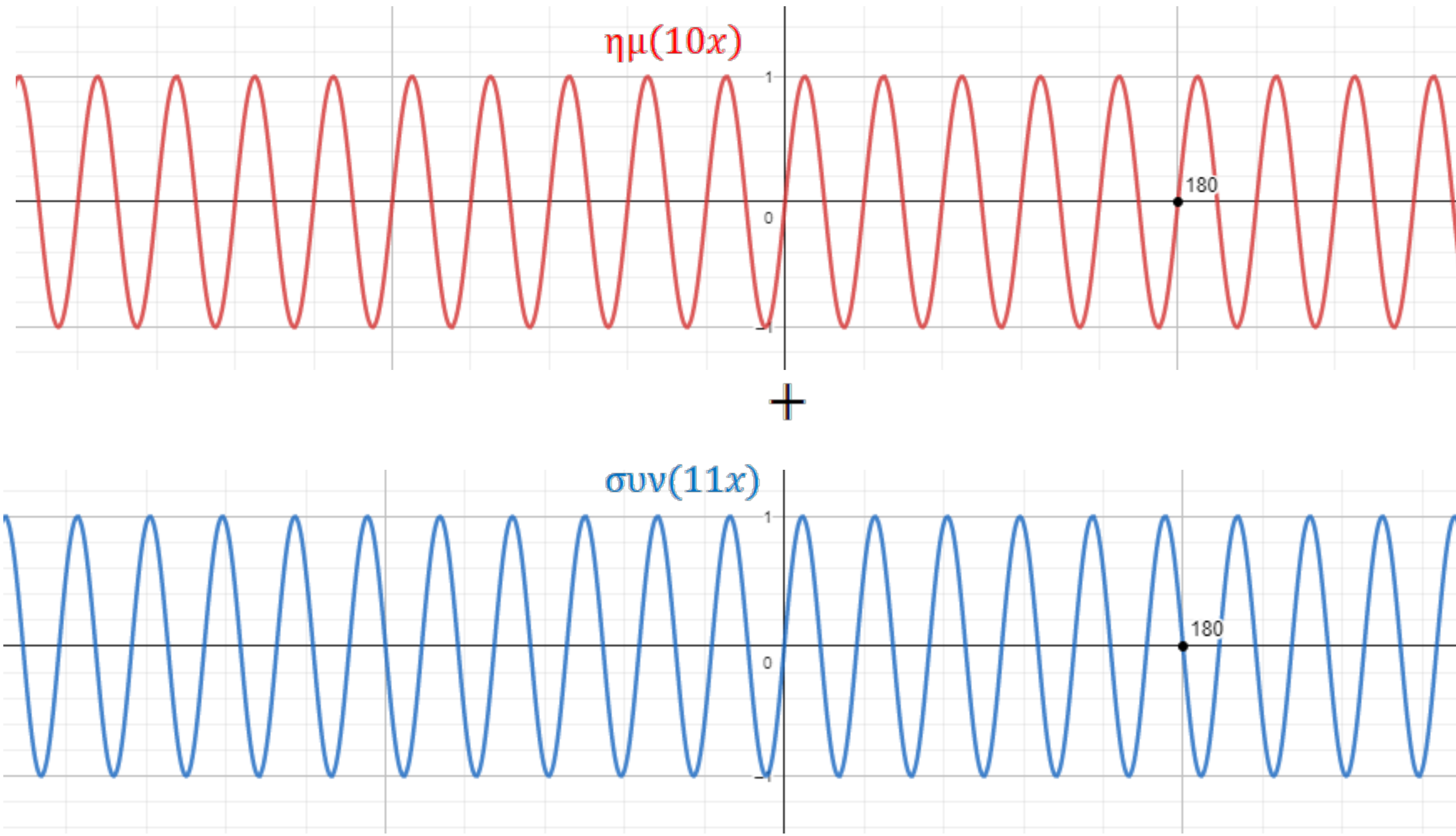


- Και το αποτέλεσμα:

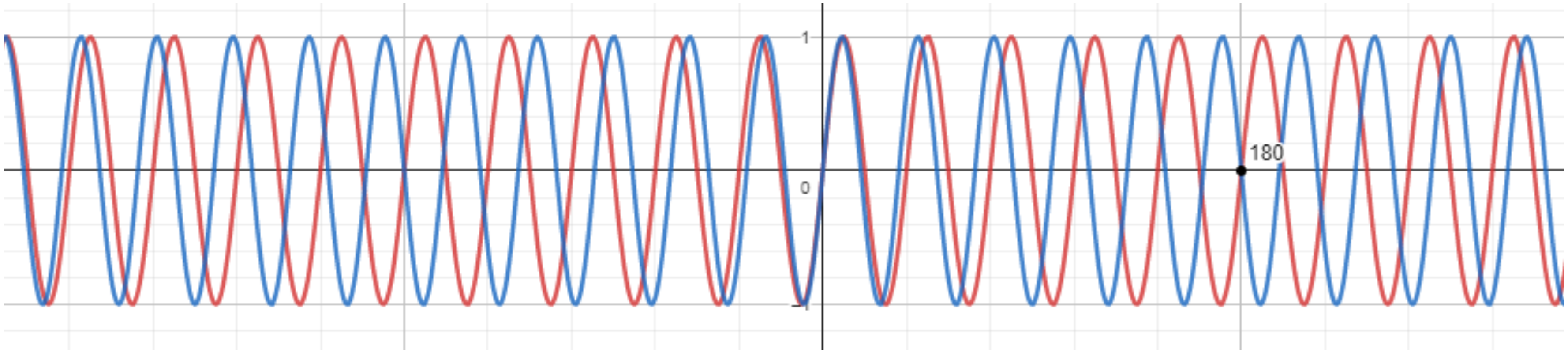


$$ημ(10x) + συν(11x)$$

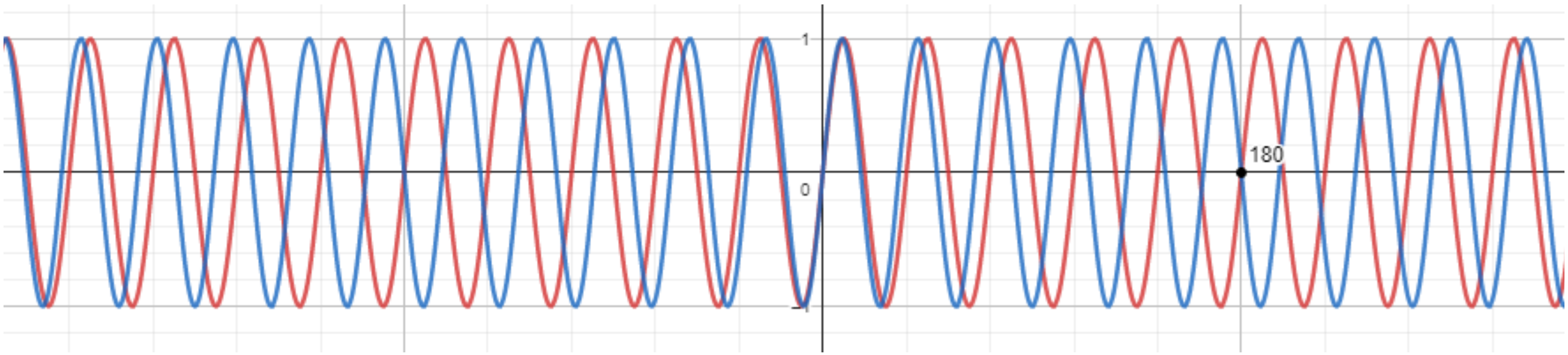
- Είναι το γνωστό διακρότημα που προκύπτει από την σύνθεση ταλαντώσεων με μικρή διαφορά στην κυκλική τους συχνότητα *ω:*

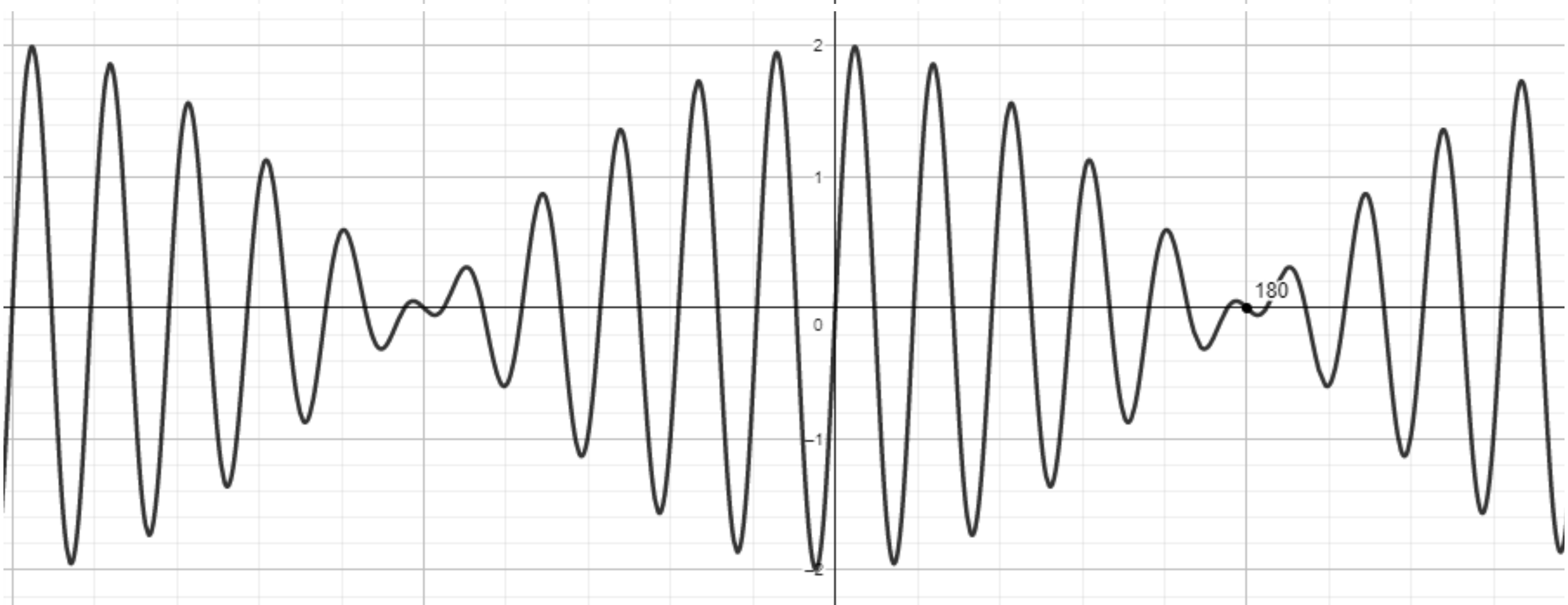


- Βάζοντας τις δύο ταλαντώσεις στο ίδιο γράφημα βλέπουμε πιο ξεκάθαρα σε ποιες περιοχές έχουμε ενίσχυση και σε ποιες περιοχές έχουμε αλληλοαναίρεση. Το αποτέλεσμα είναι το γνωστό διακρότημα.



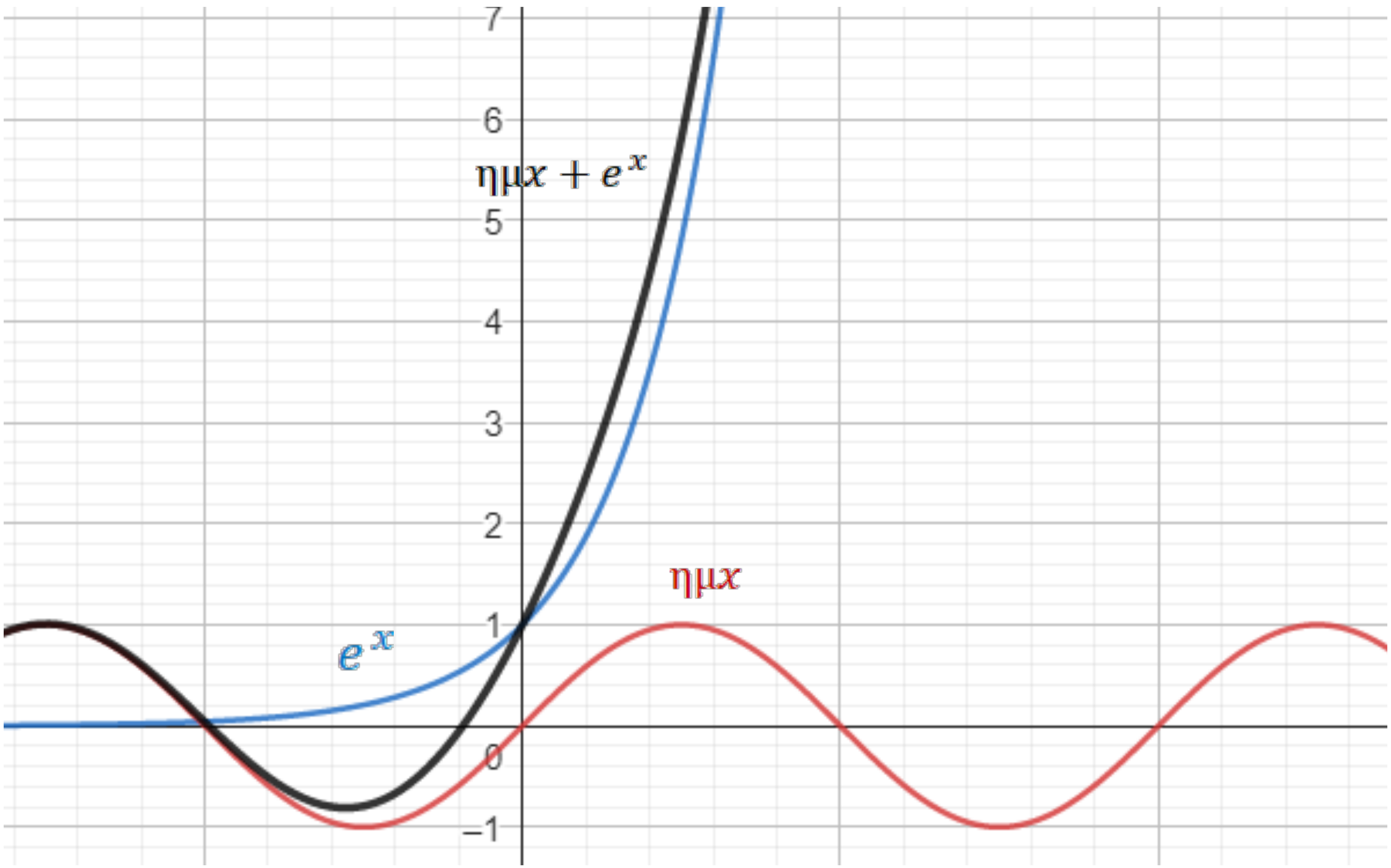
- Βάζοντας τις δύο ταλαντώσεις στο ίδιο γράφημα βλέπουμε πιο ξεκάθαρα σε ποιες περιοχές έχουμε ενίσχυση και σε ποιες περιοχές έχουμε αλληλοαναίρεση. Το αποτέλεσμα είναι το γνωστό διακρότημα.





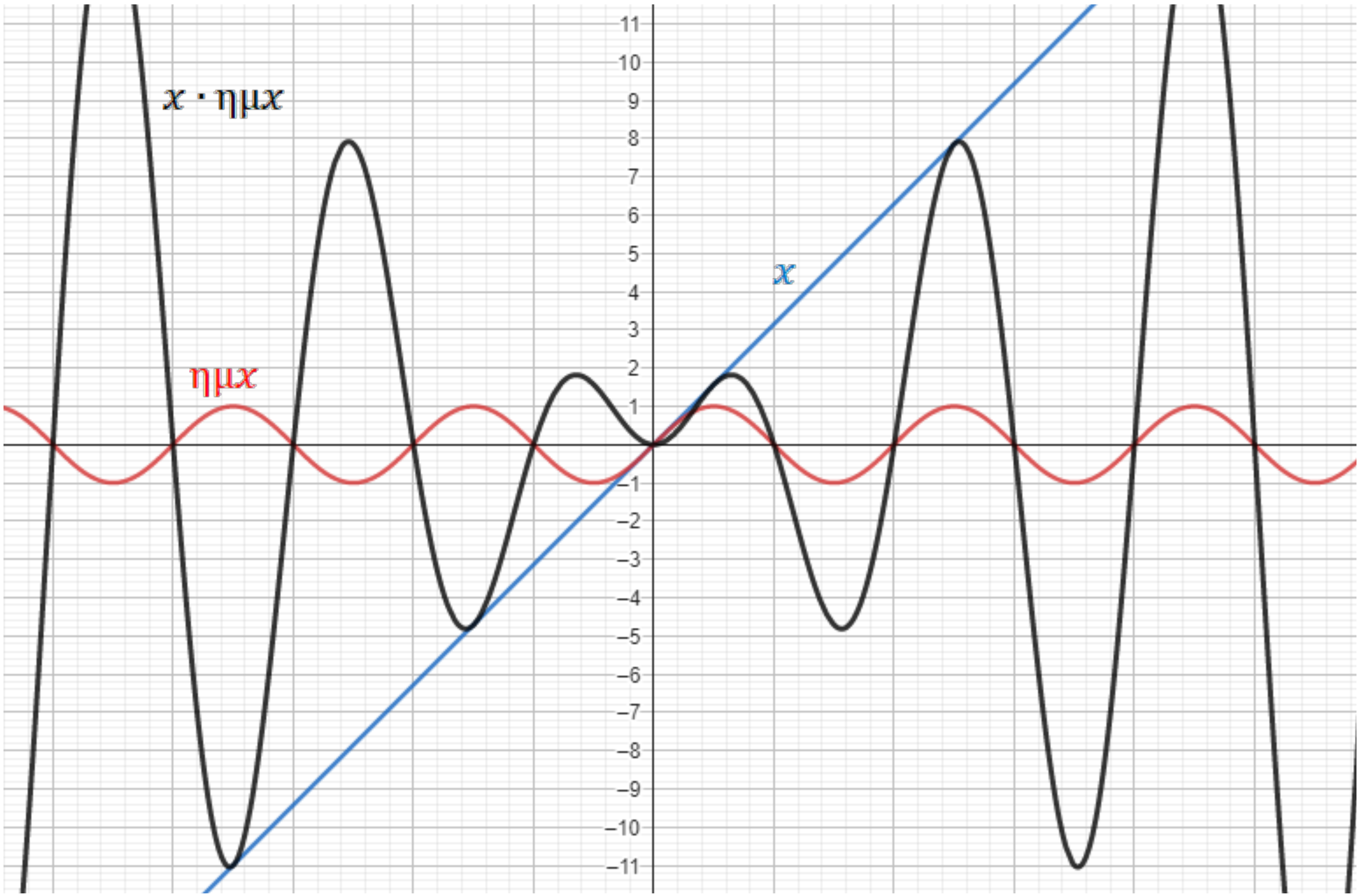
$\eta\mu x + e^{x}$

- Η εκθετική φθίνει πολύ γρήγορα προς το μηδέν και δεν επηρεάζει την τριγωνομετρική για μικρά *x*, αντιθέτως για μεγάλα *x* η εκθετική κυριαρχεί γιατί αυξάνει πολύ γρήγορα ενώ η τριγωνομετρική παίζει από το -1 έως το 1.



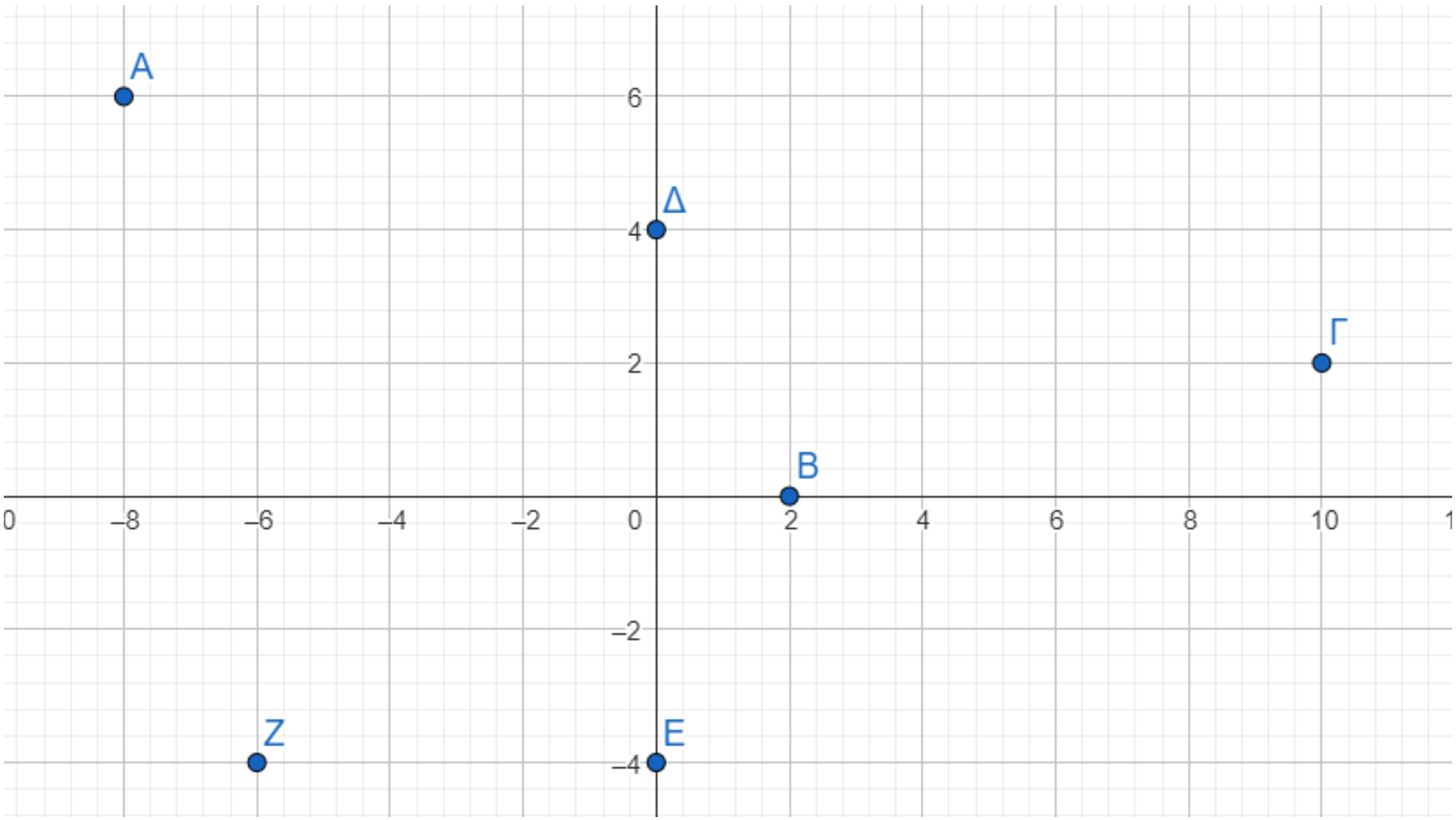
$x \cdot ημx$

- Το πρόσημο του γινομένου εναλλάσσεται και συνεπώς μοιάζει με την ταλάντωση που κάνει το ημίτονο αλλά το πλάτος της συνεχώς αυξάνεται καθώς το *x* αυξάνεται



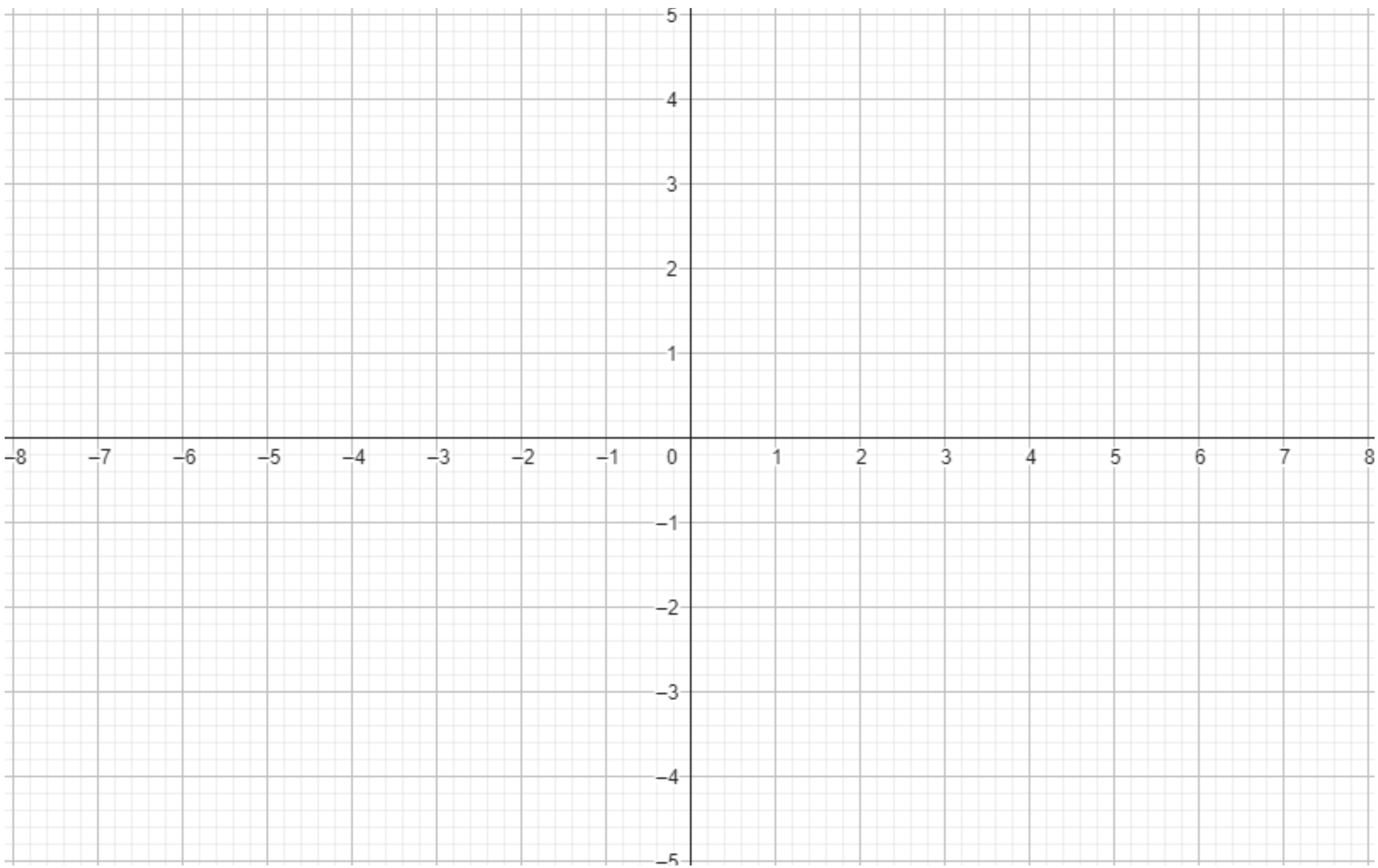
Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων στο παρακάτω καρτεσιανό επίπεδο.



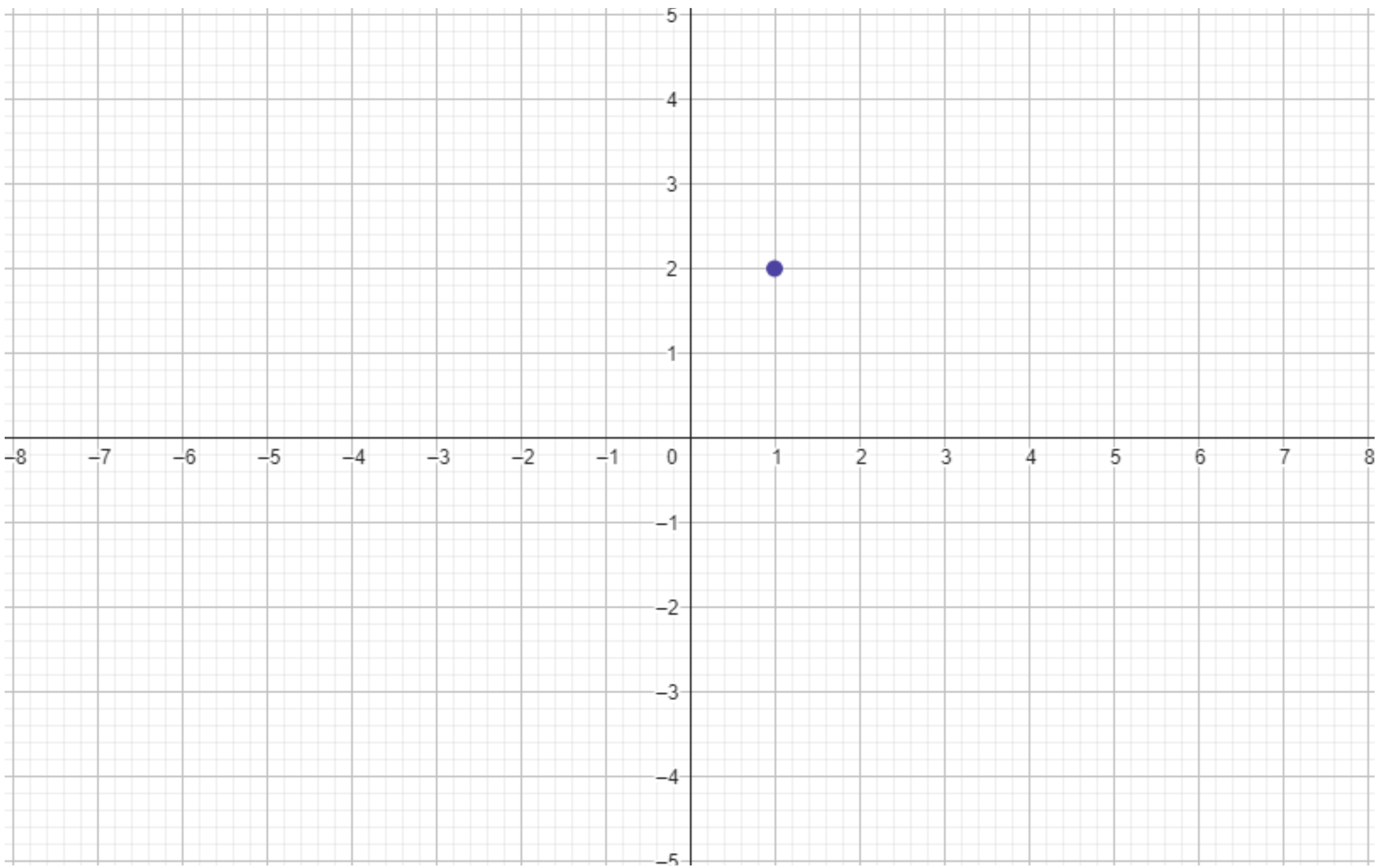
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2), (-1,3), (3,-4), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (\sqrt{2}, -1), (-1, -\pi)$$



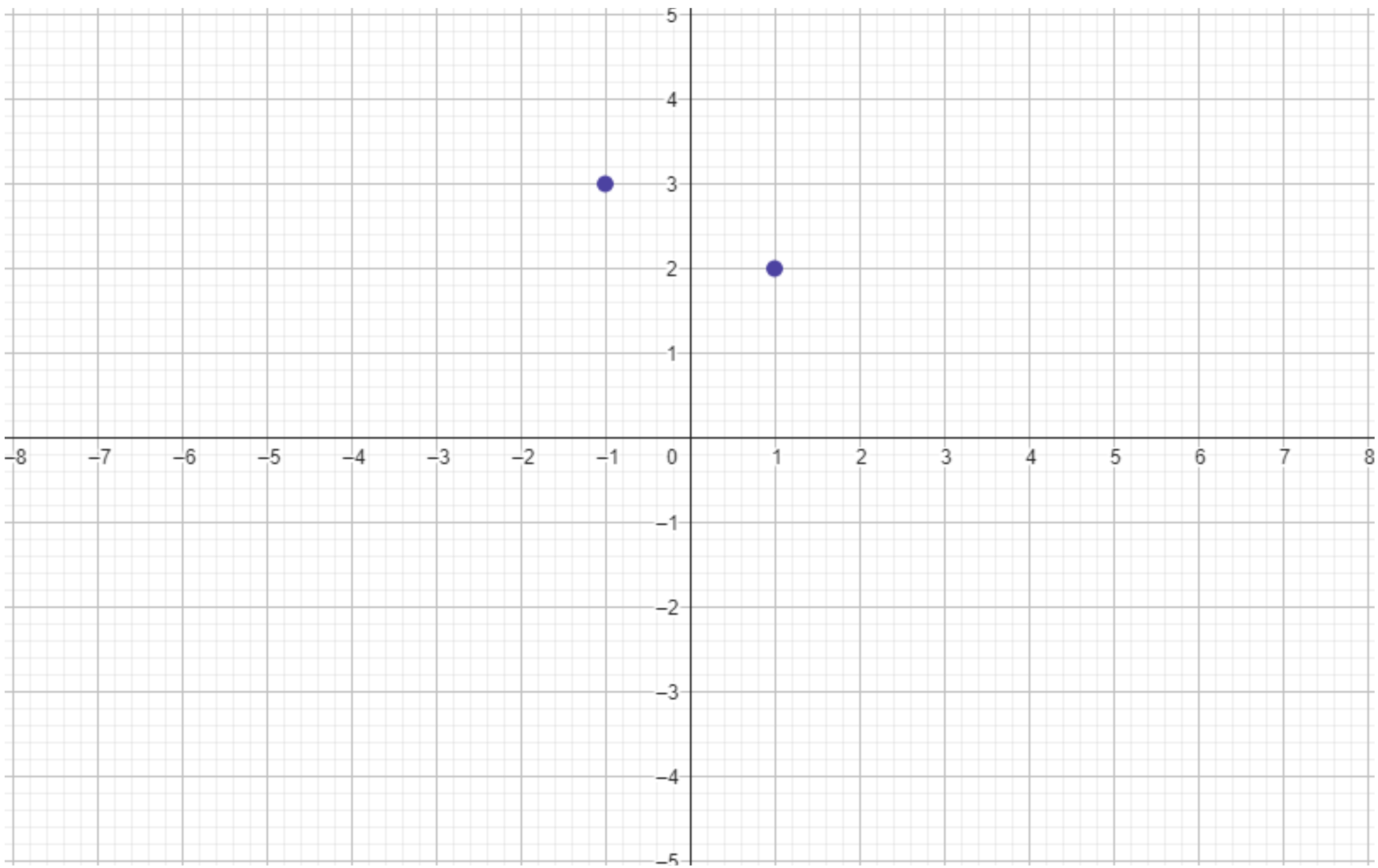
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2), (-1,3), (3,-4), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (\sqrt{2}, -1), (-1, -\pi)$$



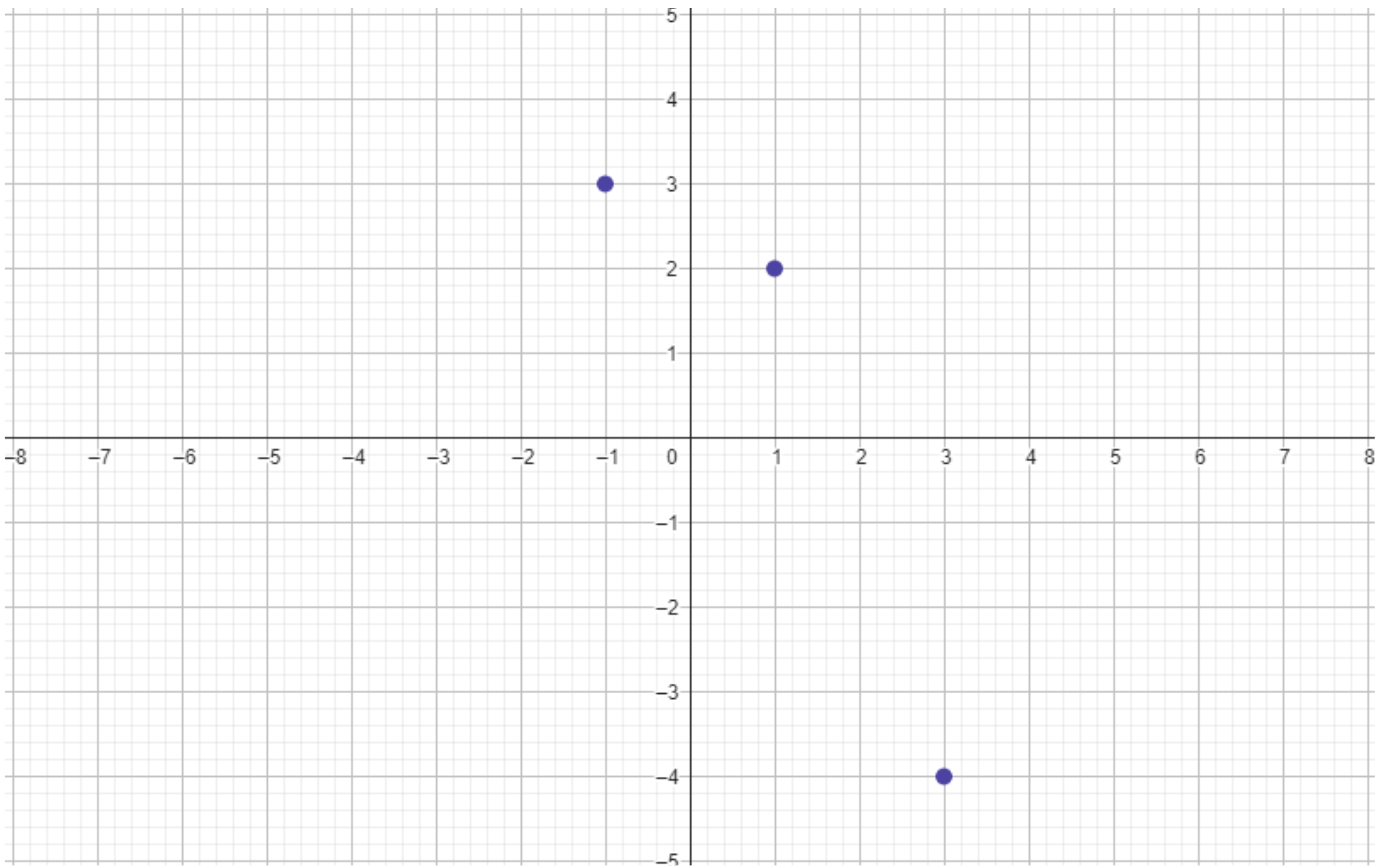
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2),(-1,3),(3,-4),\left(\frac{1}{2},2\right),(\sqrt{2},-1),(-1,-\pi)$$



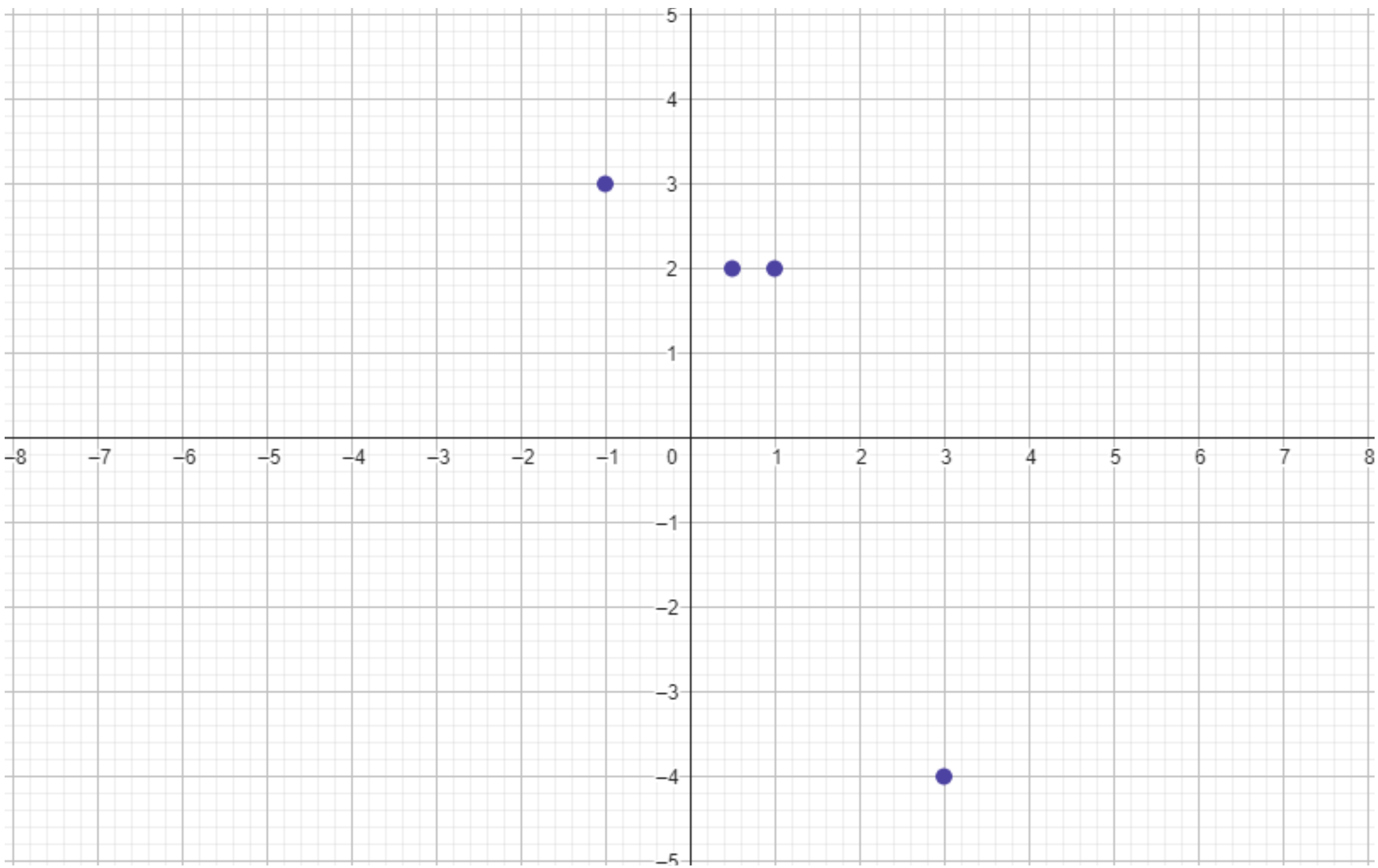
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2), (-1,3), (3,-4), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (\sqrt{2}, -1), (-1, -\pi)$$



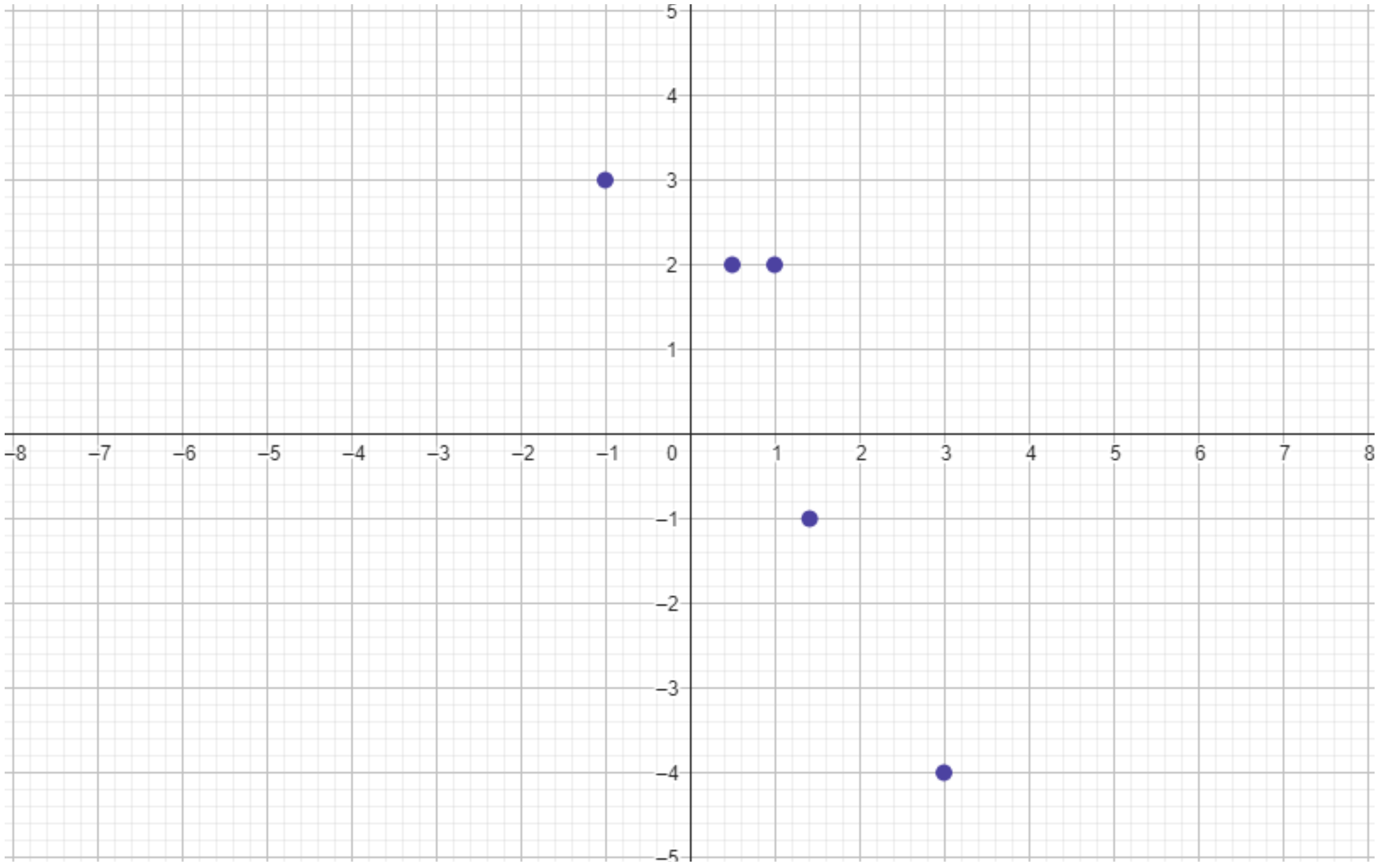
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2),(-1,3),(3,-4),\left(\frac{1}{2},2\right),(\sqrt{2},-1),(-1,-\pi)$$



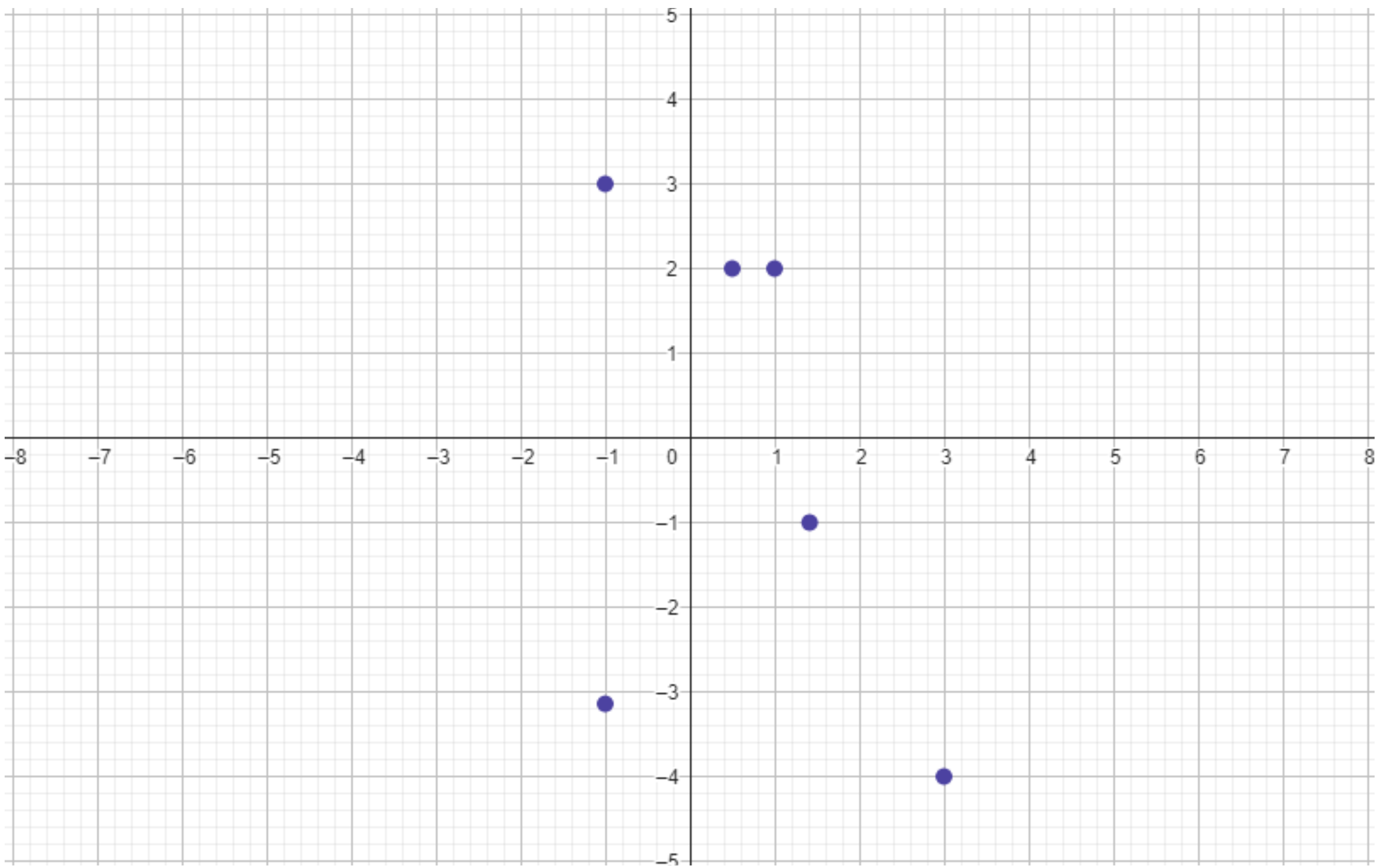
2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

$$(1,2),(-1,3),(3,-4),\left(\frac{1}{2},2\right),(\sqrt{2},-1),(-1,-\pi)$$



2. Να βρείτε πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες,

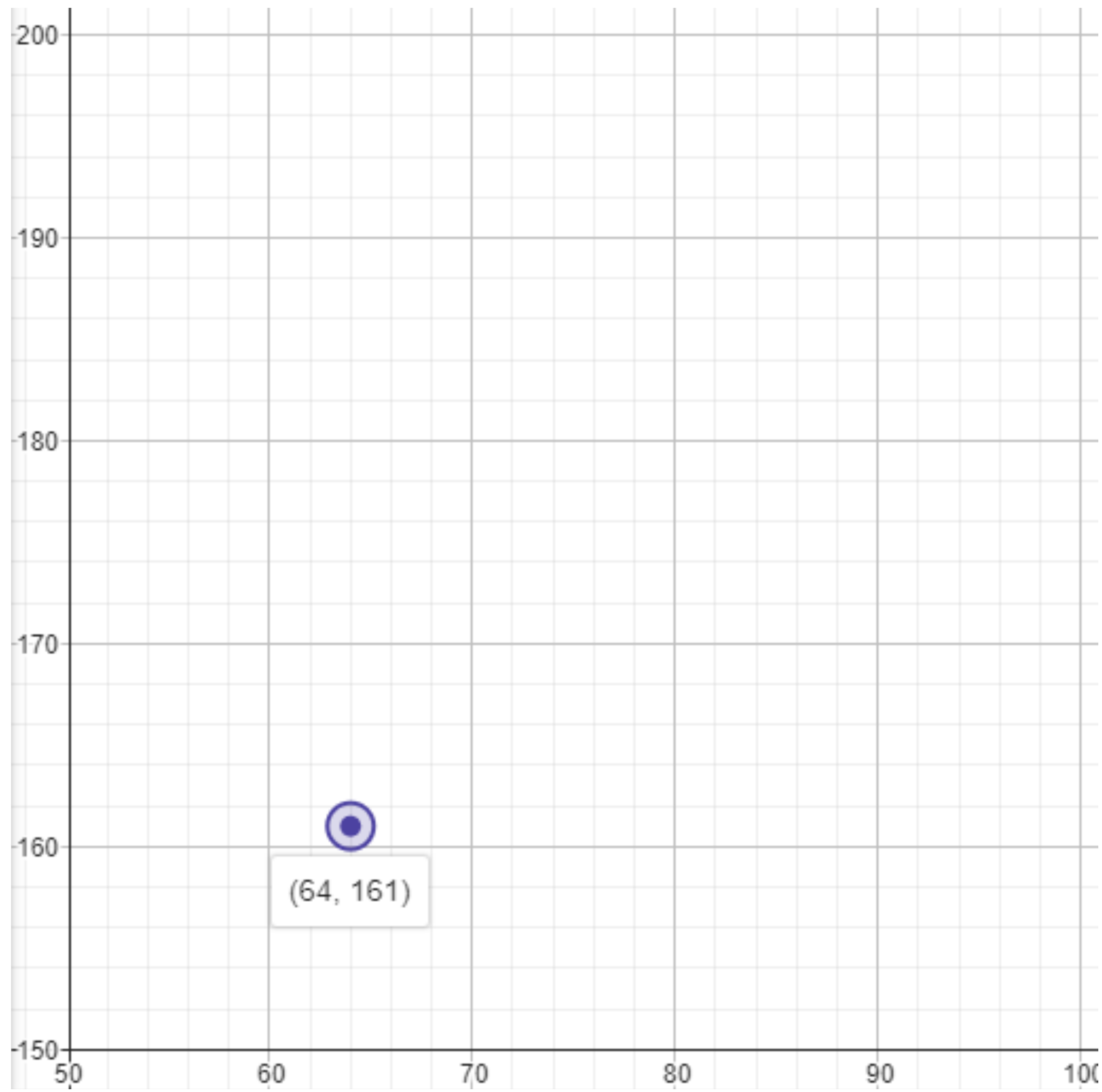
$$(1,2), (-1,3), (3,-4), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\sqrt{2}, -1\right), (-1, -\pi)$$

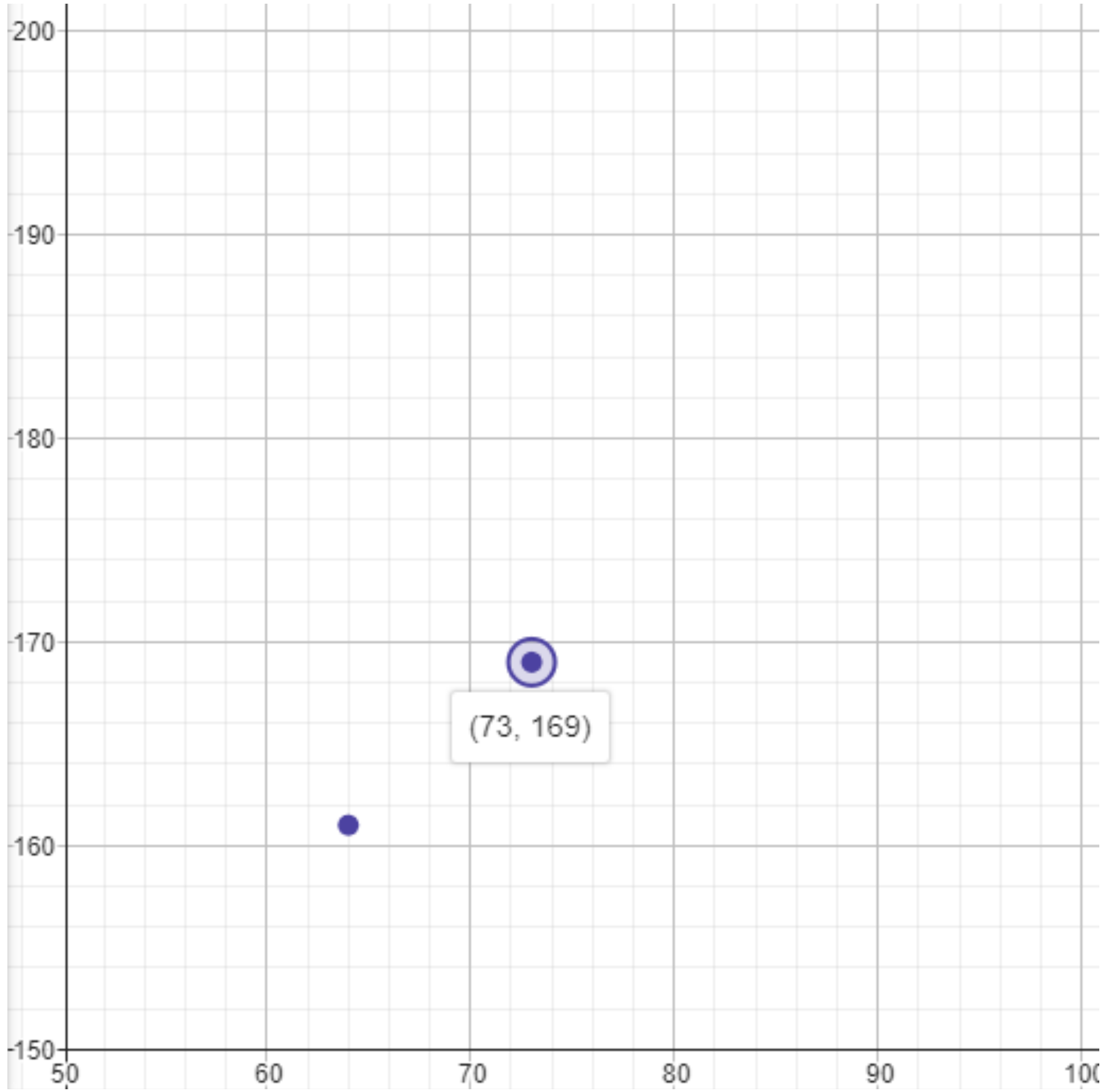


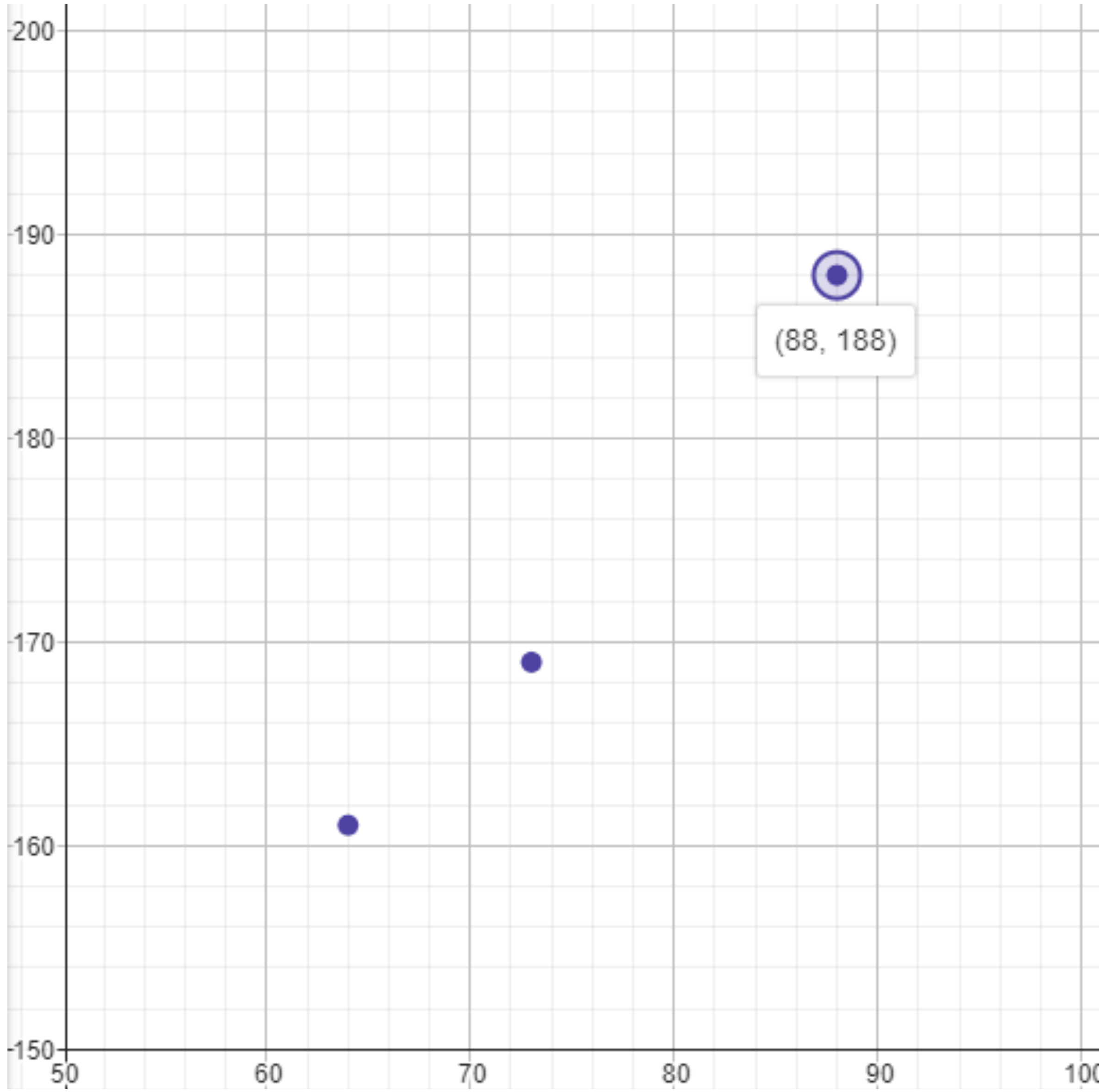
2. Σε μία έρευνα συλλέγουμε τα ακόλουθα δεδομένα για το ύψος και το βάρος των φοιτητών ενός τμήματος,

	Βάρος(kg)	Ύψος(cm)
1	64	161
2	73	169
3	88	188
4	67	171
5	74	177
6	55	159
7	91	189

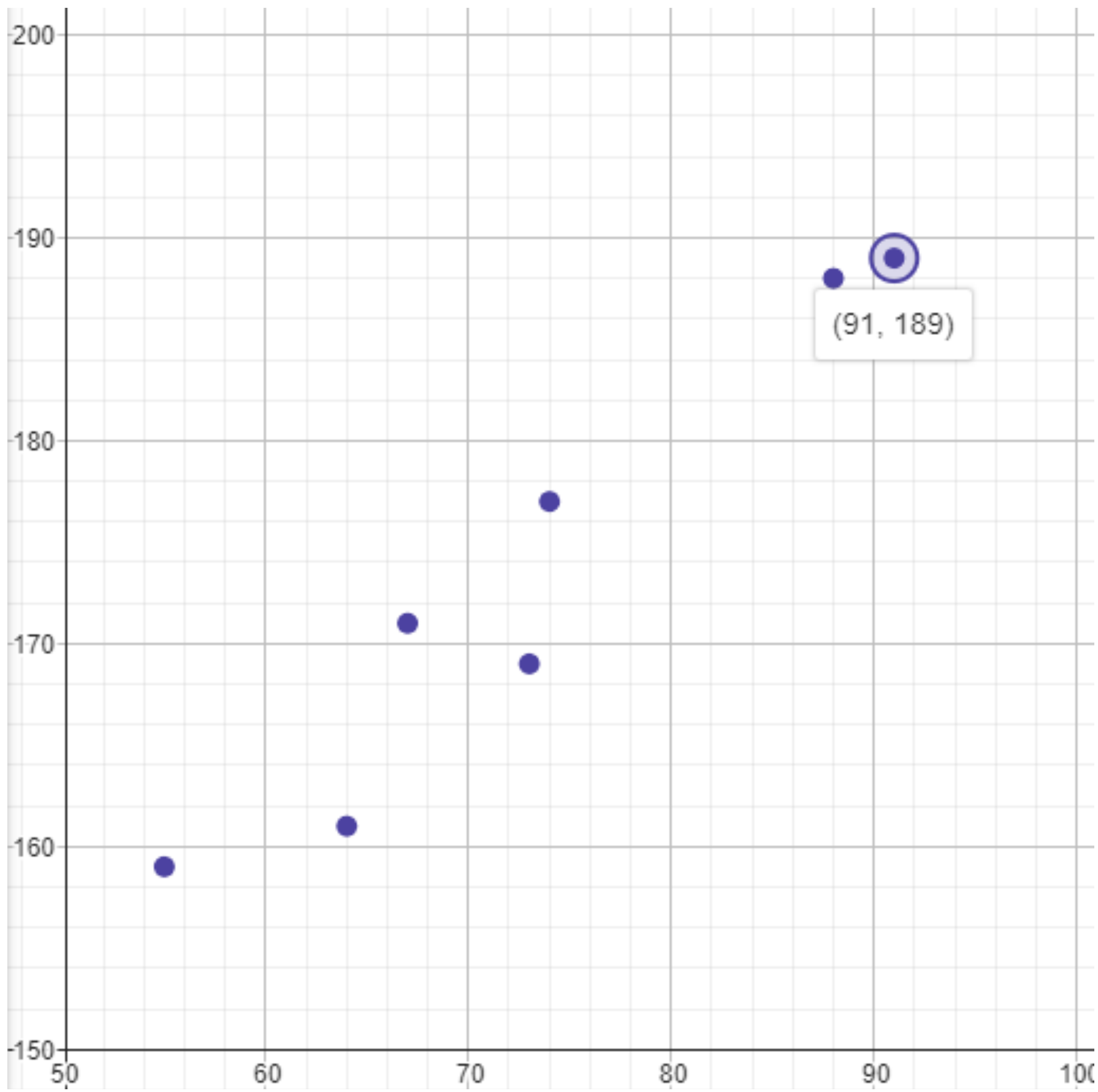
Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς του ύψους με του βάρους. [Το διάγραμμα διασποράς είναι το σύνολο όλων των σημείων (Βάρος,ύψος) στο καρτεσιανό επίπεδο]


200
190
180
170
160
150
50
60
70
80
90
100
(64, 161)

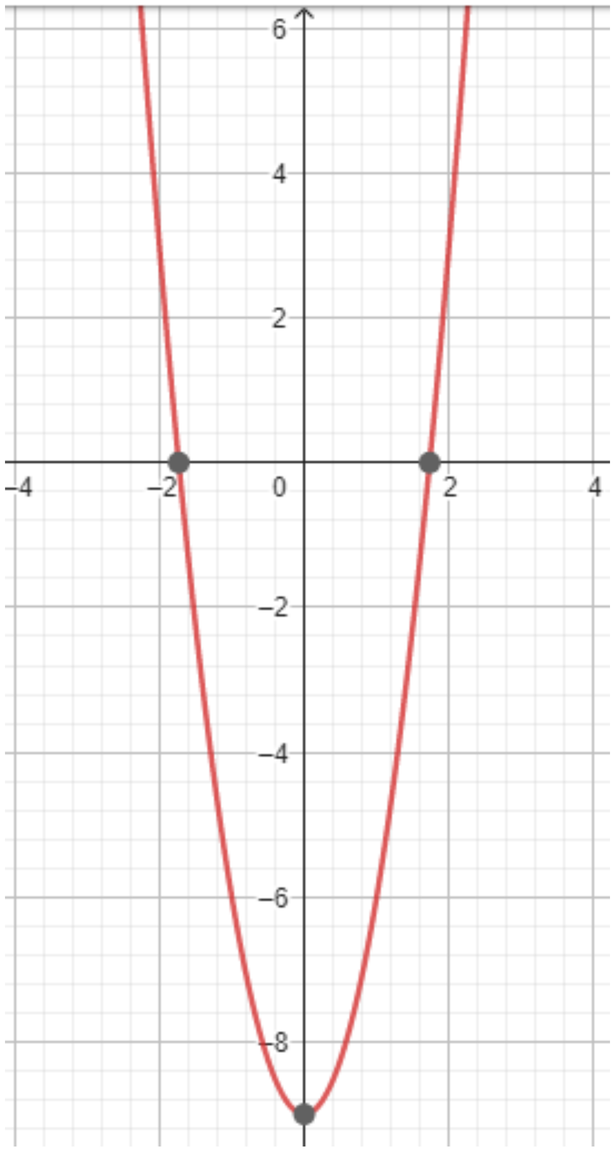

200
190
180
170
160
150
50
60
70
80
90
100
(73, 169)



200
190
180
170
160
150
(88, 188)
50
60
70
80
90
100


200
190
180
170
160
150
50
60
70
80
90
(91, 189)

3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= 3x^2-9$.



3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= 3x^2-9$.

Απάντηση.

- Σημεία τομής με τον άξονα Ox: Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$,

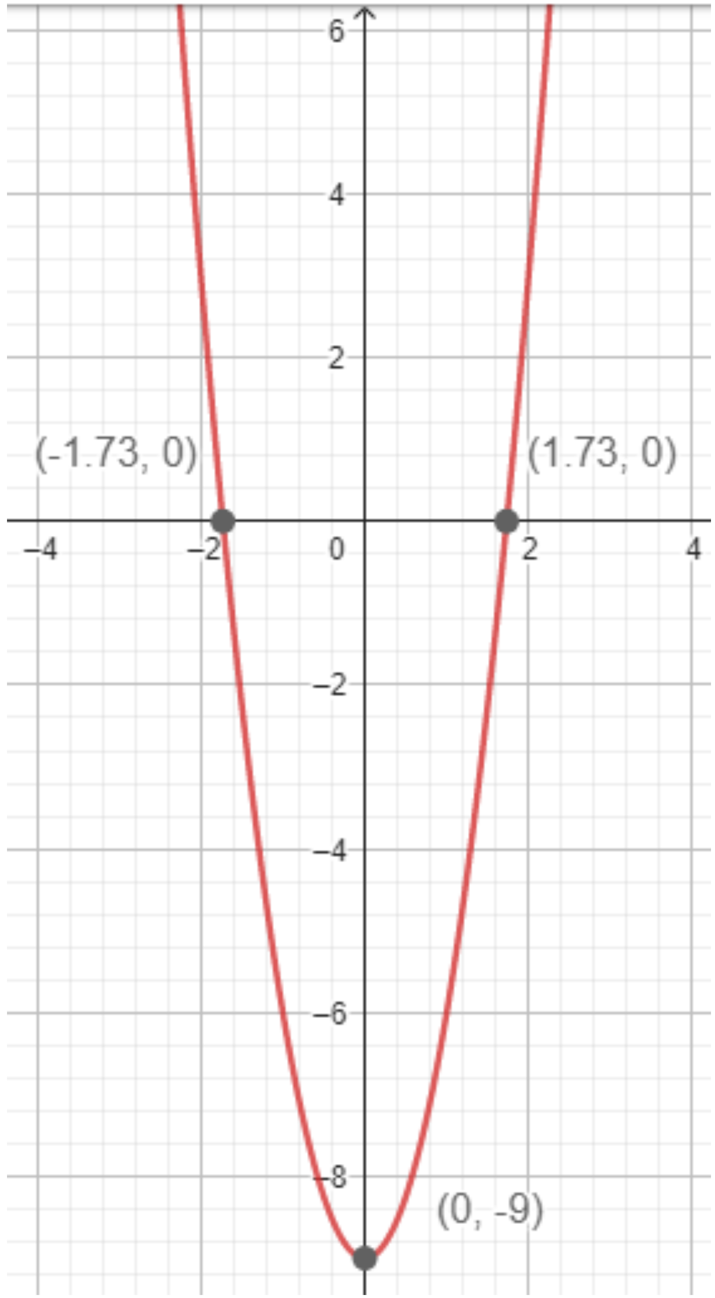
$$\begin{aligned} 3x^2-9=0 &\Leftrightarrow \\ x^2=3 &\Leftrightarrow \\ x=\pm\sqrt{3} & \end{aligned}$$

και βρίσκουμε τα σημεία

$$(\sqrt{3},0), \quad (-\sqrt{3},0)$$

- Σημείο τομής με τον άξονα Oy: Έχει τεταγμένη $f(0)=-9$ και συνεπώς είναι το σημείο

$$(0,-9)$$


6
4
2
(-1.73, 0)
(1.73, 0)
−4
−2
0
2
4
−2
−4
−6
−8
(0, -9)

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$
¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f \circ g$ ·και· $g \circ f$ ·στο· 1988 .¶

Απάντηση.

- $f \circ g(1988)=$

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$

$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$ ¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f \circ g$ ·και· $g \circ f$ ·στο·1988 .¶

Απάντηση.

- $f \circ g(1988)=f(g(1988))$

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$
¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f\circ g$ ·και· $g\circ f$ ·στο· 1988 .¶

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)$

4. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$

Να βρεθούν αν ορίζονται οι τιμές των $f\circ g$ και $g\circ f$ στο 1988.

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)=1988$

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$
¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f\circ g$ ·και· $g\circ f$ ·στο· 1988 .¶

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)=1988$
- $g\circ f(1988)=$

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$
¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f\circ g$ ·και· $g\circ f$ ·στο·1988 .¶

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)=1988$
- $g\circ f(1988)=g(f(1988))=$

4.·Αν·για·τις·συναρτήσεις·f·και·g·ισχύει·ότι¶

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$
¶

Να·βρεθούν·αν·ορίζονται·οι·τιμές·των· $f\circ g$ ·και· $g\circ f$ ·στο· 1988 .¶

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)=1988$
- $g\circ f(1988)=g(f(1988))=g(1989)=$

4. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι

$$f(1986)=1987,\ f(1987)=1988,\ f(1988)=1989,\ f(1989)=2021$$
$$g(1990)=1989,\ g(1989)=1988\ ,\ g(1988)=1987\ ,\ g(1987)=2021$$

Να βρεθούν αν ορίζονται οι τιμές των $f\circ g$ και $g\circ f$ στο 1988.

Απάντηση.

- $f\circ g(1988)=f(g(1988))=f(1987)=1988$
- $g\circ f(1988)=g(f(1988))=g(1989)=1988$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f \circ g(x)=f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f \circ g(x) = f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο {2000,2002,2004}.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f \circ g(x)=f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο {2000,2002,2004}.

  Οι τιμές που παίρνει η $f \circ g$ είναι $f(g(2000))=2002$,

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f{\circ}g(x)=f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο {2000,2002,2004}.

  Οι τιμές που παίρνει η $f{\circ}g$ είναι $f(g(2000))=2002$, $f(g(2002))=2004$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f \circ g(x) = f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο {2000,2002,2004}.

  Οι τιμές που παίρνει η $f \circ g$ είναι $f(g(2000))=2002$, $f(g(2002))=2004$, $f(g(2004))=2006$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ως εξής:

x	1999	2001	2003	2005	2007
$f(x)$	2000	2002	2004	2006	2008

x	2000	2001	2002	2003	2004
$g(x)$	2001	2002	2003	2004	2005

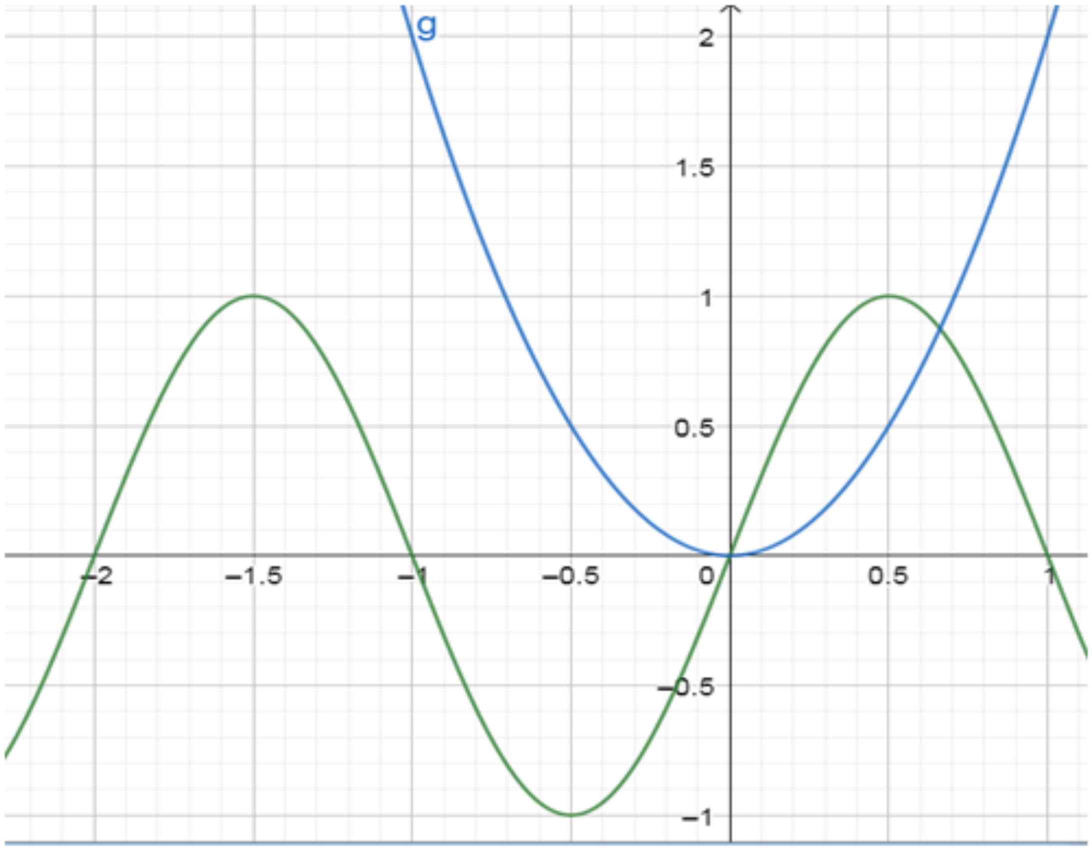
Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Απάντηση.

- Η $f \circ g(x)=f(g(x))$ ορίζεται στα x εκείνα στα οποία ο $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο {2000,2002,2004}.

  Οι τιμές που παίρνει η $f \circ g$ είναι $f(g(2000))=2002$, $f(g(2002))=2004$, $f(g(2004))=2006$ => σύνολο τιμών= {2002,2004,2006}
- Ομοίως για την $g \circ f$.

6. Οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f,g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τα (f∘g)(1/2) και (g∘f)(-1/2).



- **Απάντηση**

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ