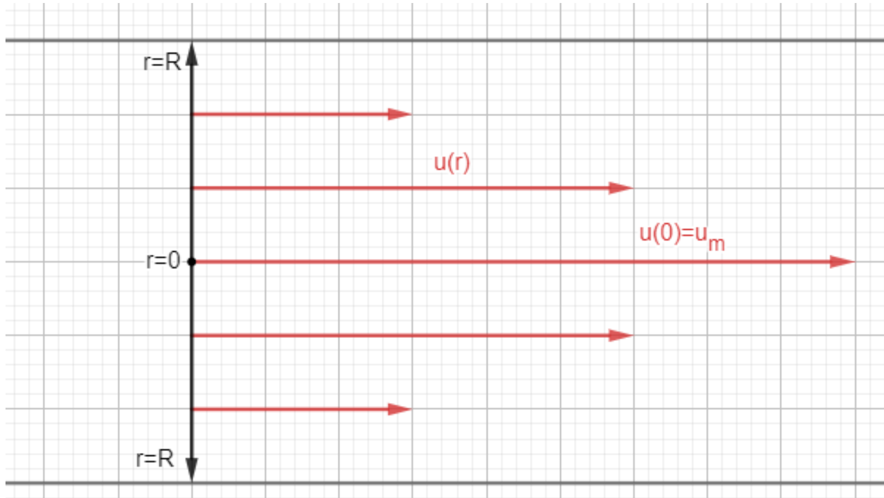
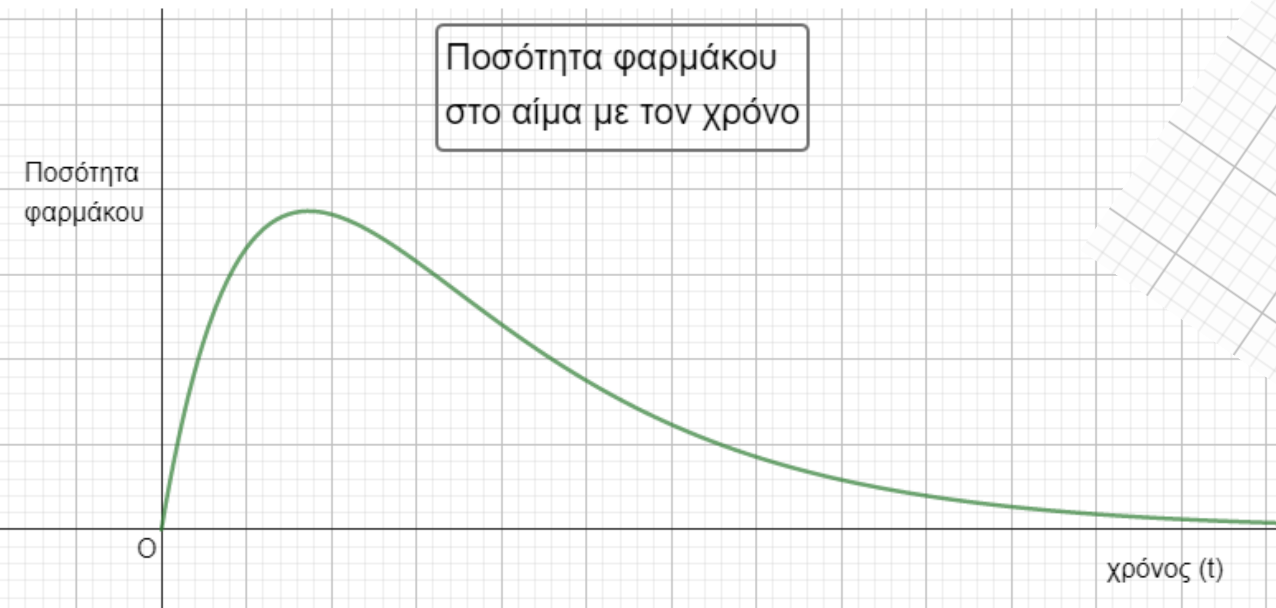
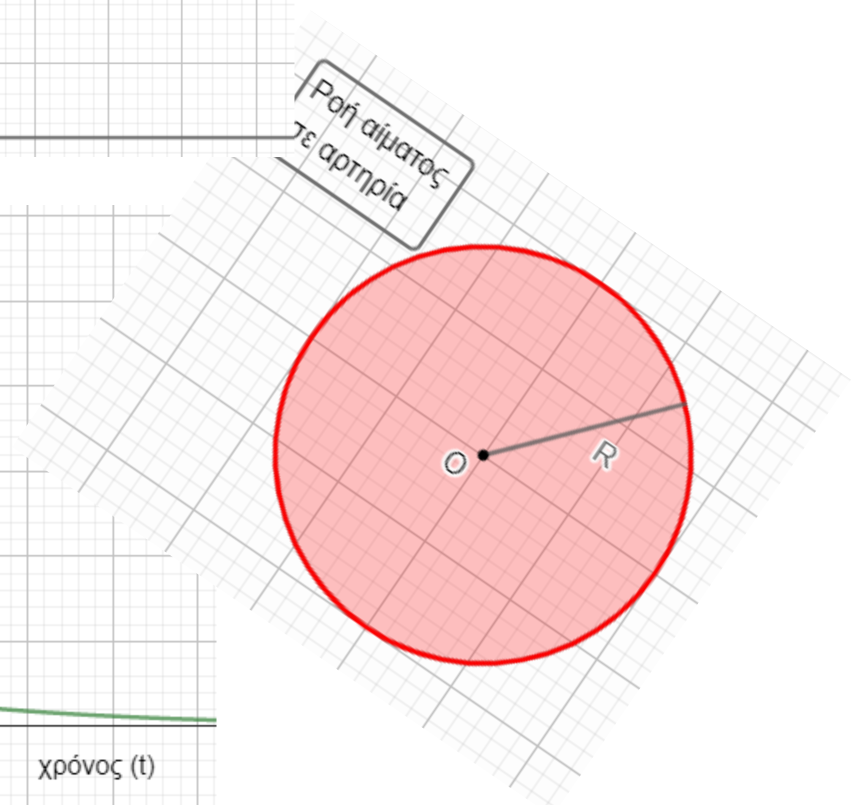
Εφαρμογές της παραγώγου







Ροή αίματος σε αρτηρία

- Η ταχύτητα του αίματος ***u*** μέσα σε μία αρτηρία δεν είναι σταθερή αλλά μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο προς τα τοιχώματά της, λόγω της τριβής με αυτά.
- Θεωρούμε την αρτηρία ως έναν κυλινδρικό σωλήνα μήκους ***L*** και ακτίνας ***R*** μέσα στον οποίο ρέει το αίμα.
- Τότε η συνάρτηση ***u(r)*** που περιγράφει αυτή την μείωση δίνεται από τον τύπο

$$u(r) = \frac{P}{4hL}(R^2 - r^2)$$

- όπου ***P*** είναι η διαφορά της πίεσης μεταξύ των άκρων της αρτηρίας και ***h*** είναι το «ιξώδες» του αίματος.

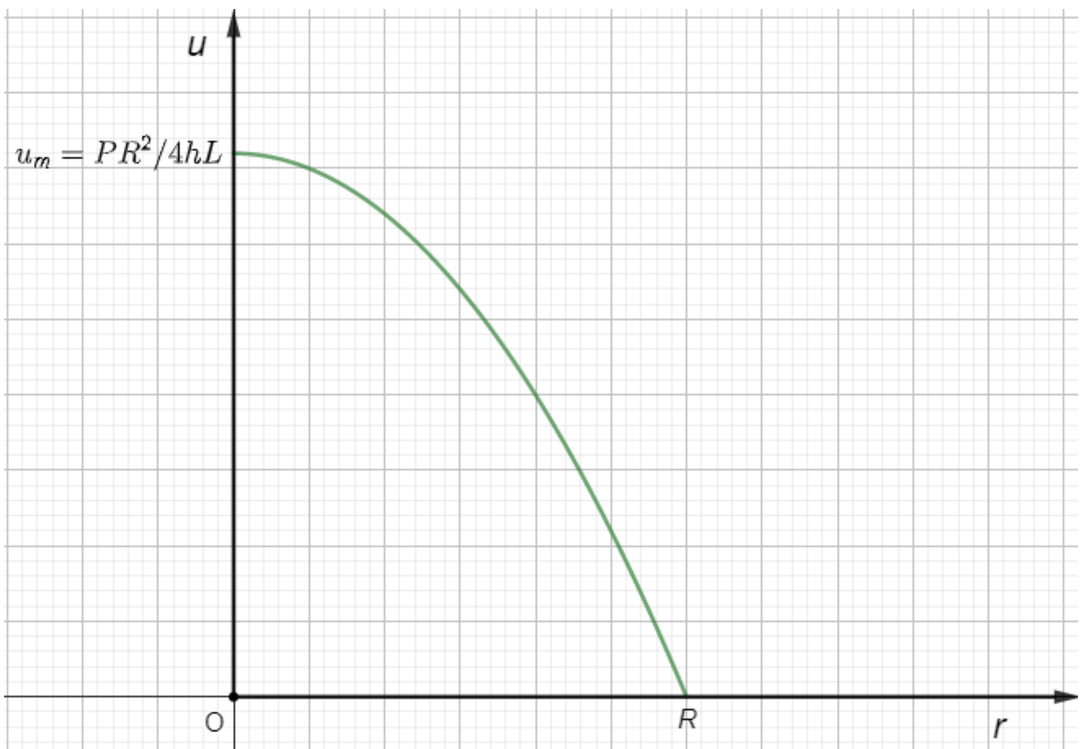
- Η συνάρτηση ***u*(*r*)** έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [*0*,*R*] και η γραφική της παράσταση τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο

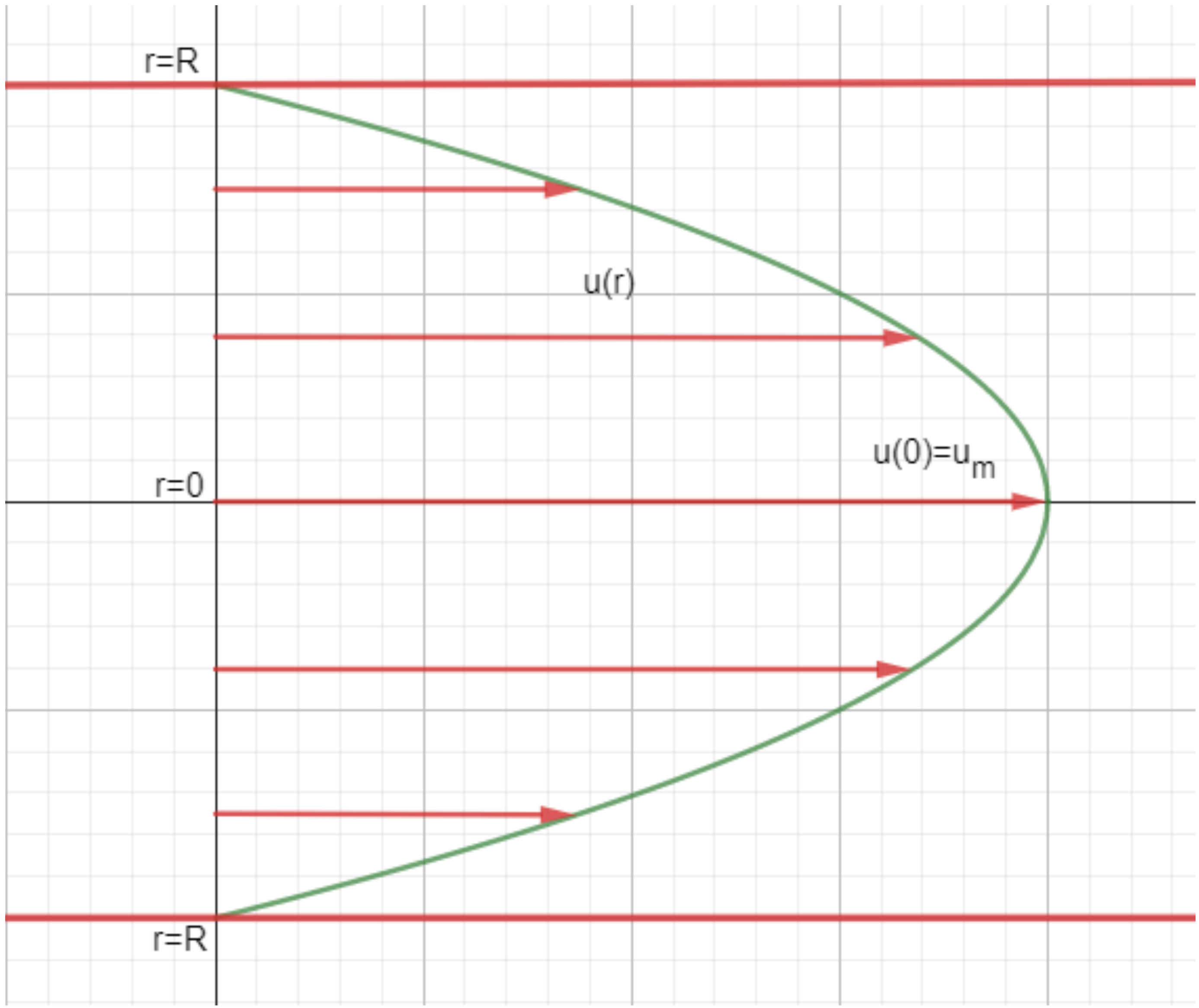
$$u(0) = \frac{P}{4hL}R^2 = u_m$$

που είναι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και τον οριζόντιο στο σημείο *R*,

$$u(R) = 0$$

αφού ακριβώς πάνω στα τοιχώματα η ταχύτητα είναι (θεωρητικά) μηδέν.




r=R
u(r)
u(0)=u_m
r=0
r=R

Η βαθμίδα ταχύτητας

- Υπάρχει λοιπόν μία βαθμίδα ταχύτητας καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της αρτηρίας, δηλαδή ένας ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς την απόσταση από το κέντρο.
- Ο ρυθμός αυτός μεταβολής της ταχύτητας, είναι η παράγωγος της συνάρτησης ***u(r)*** την οποία συμβολίζουμε με

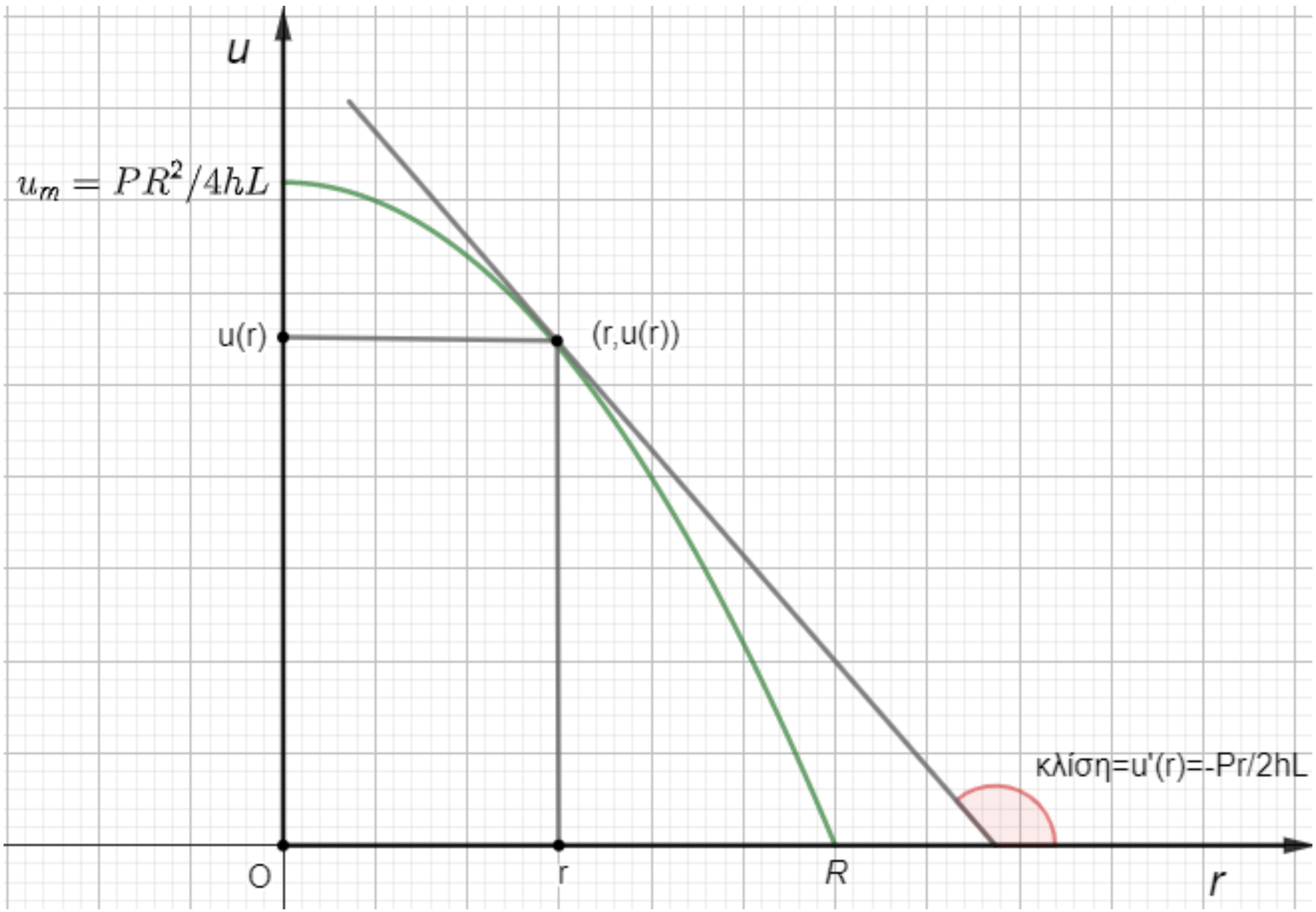
$$u'(r) \text{ ή } \frac{du(r)}{dr}$$

- και σύμφωνα με τους κανόνες παραγώγισης που έχουμε μάθει,

$$\begin{aligned} u'(r) &= \frac{P}{4hL}(R^2 - r^2)' \\ &= \frac{P}{4hL}\left((R^2)' - (r^2)'\right) \\ &= \frac{P}{4hL}(0 - 2r) \\ &= -\frac{P}{2hL}r \end{aligned}$$

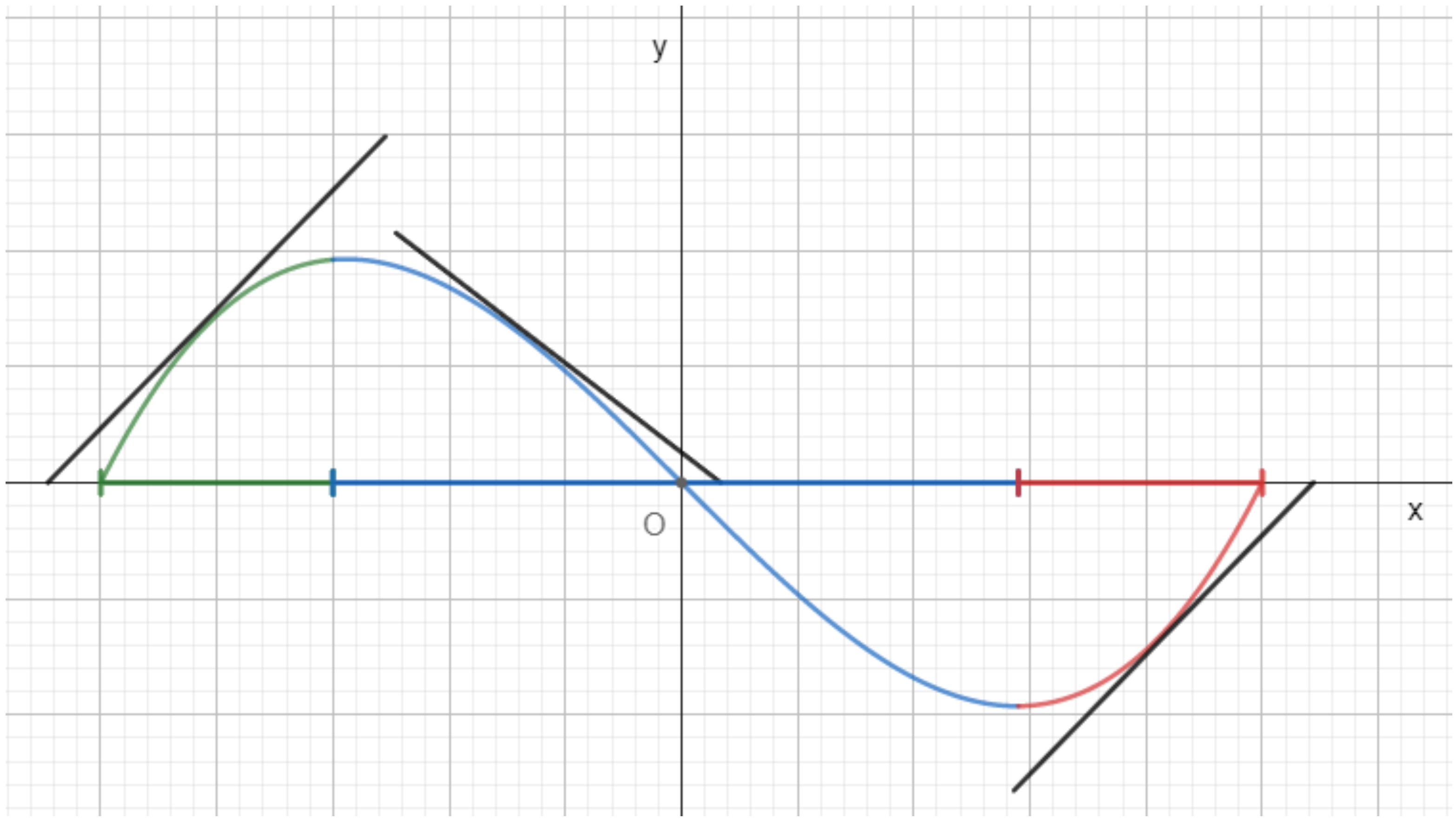
- Μπορείτε να εξηγήσετε το αρνητικό πρόσημο;

- Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της ***u*(*r*)** στο σημείο **(*r*,*u*(*r*))** είναι η γεωμετρική ερμηνεία του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας στο ***r***, δηλαδή της παραγώγου ***u'*(*r*)**.



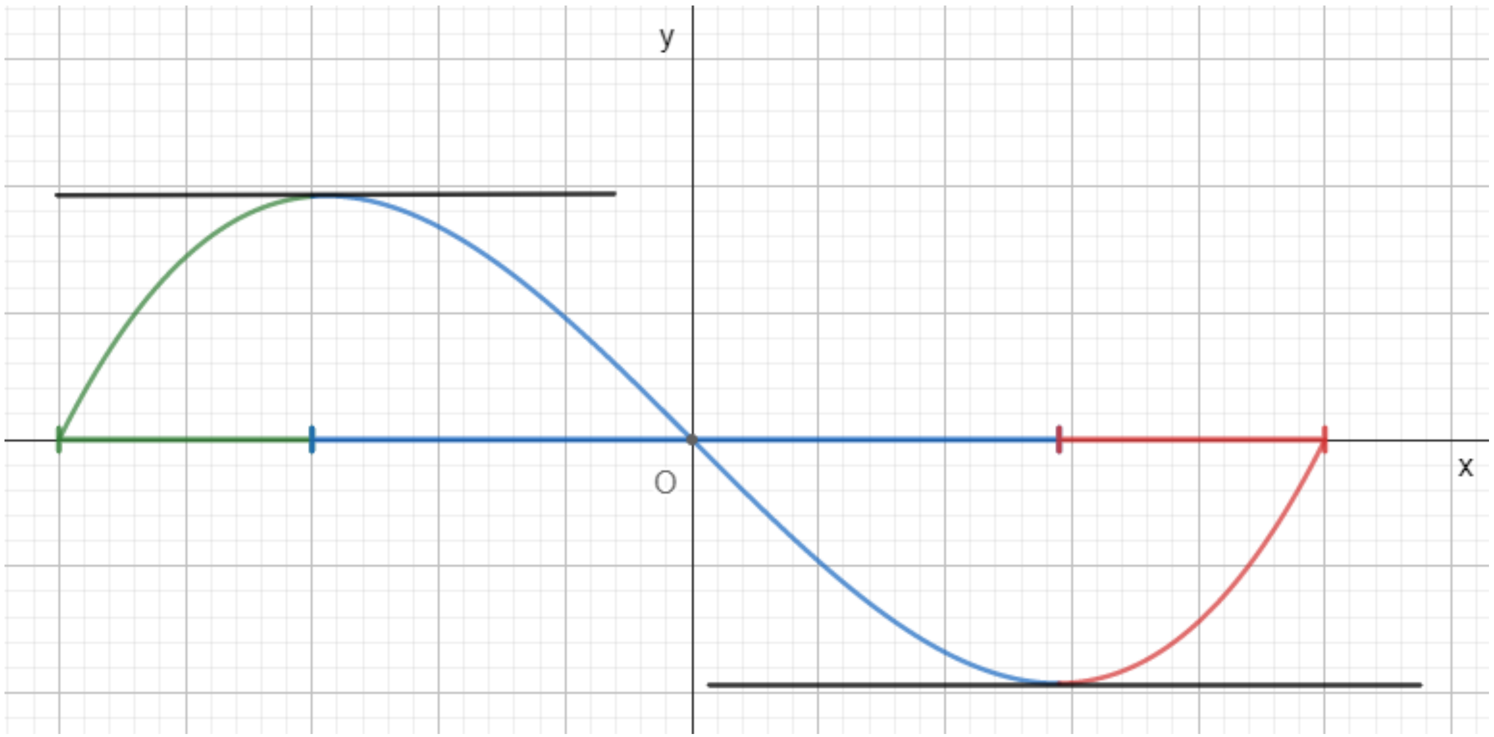
Παρατηρήσεις

- Όταν η παράγωγος μίας συνάρτησης είναι θετική σε ένα διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- Όταν η παράγωγος μίας αρνητική σε ένα διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό.



- Όταν μία συνάρτηση *f* εμφανίζει μέγιστο ή ελάχιστο σε ένα (εσωτερικό) σημείο ***x*** ενός διαστήματος μέσα στο οποίο ορίζεται, τότε η παράγωγος της *f* στο σημείο αυτό είναι μηδέν,

$$f'(x)=0$$



- Δηλαδή όταν ψάχνουμε τοπικά ακρότατα τα αναζητούμε στις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Ποσότητα φαρμάκου στο αίμα

- Σε ένα απλό μοντέλο η ποσότητα ***E*(*t*)** σε mg μίας ουσίας στο αίμα, η οποία έχει ληφθεί από το στόμα με την μορφή χαπιού, σαν μία συνάρτηση του χρόνου ***t*** , δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\right)$$

α: σχετίζεται με τον ρυθμό μεταφοράς της ουσίας από το στομάχι στην ροή του αίματος.

β: σχετίζεται με τον ρυθμό αποβολής της ουσίας από την ροή του αίματος.

D: η ποσότητα της δόσης σε mg.

- Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε την ***E*(*t*)**: Όταν η συγκέντρωση γίνει αρκετά μεγάλη μπορεί να έχουμε **ανεπιθύμητες παρενέργειες**. Επίσης θέλουμε η συγκέντρωση να είναι μεγαλύτερη από μία κρίσιμη τιμή για να έχουμε τα **επιθυμητά αποτέλεσμα**.

- Από την γραφική παράσταση της ***E*(*t*)** μπορούμε να πάρουμε μία εικόνα για το πώς μεταβάλλονται οι τιμές της

- Κάποια χρονική στιγμή την οποία συμβολίζουμε με t_m η ποσότητα του φαρμάκου παίρνει την μέγιστη τιμή της.
- Στο διάστημα $[0, t_m]$ η ***E*(*t*)** είναι αύξουσα και συνεπώς η ποσότητα του φαρμάκου αυξάνεται.
- Στο διάστημα $[t_m, +\infty)$ η ***E*(*t*)** είναι φθίνουσα και συνεπώς η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα μειώνεται.

- Για να βρούμε την χρονική στιγμή t_m και την τιμή της συνάρτησης $E(t_m)$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $E'(t)=0$.
- Βρίσκουμε λοιπόν αρχικά την παράγωγο της $E(t)$ εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης,

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \left[D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\right)\right]' \\
&= D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\right)' \\
&= D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left[\left(e^{-\beta t}\right)'-(e^{-\alpha t})'\right] \\
&= D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(-\beta e^{-\beta t}-(-\alpha)e^{-\alpha t}\right) \\
&= D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(-\beta e^{-\beta t}+\alpha e^{-\alpha t}\right)
\end{aligned}
$$

- Λύνουμε την εξίσωση

$$D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(-\beta e^{-\beta t}+\alpha e^{-\alpha t}\right)=0$$

- Επειδή

$$D\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\neq 0$$

θα πρέπει

$$-\beta e^{-\beta t}+\alpha e^{-\alpha t}=0$$

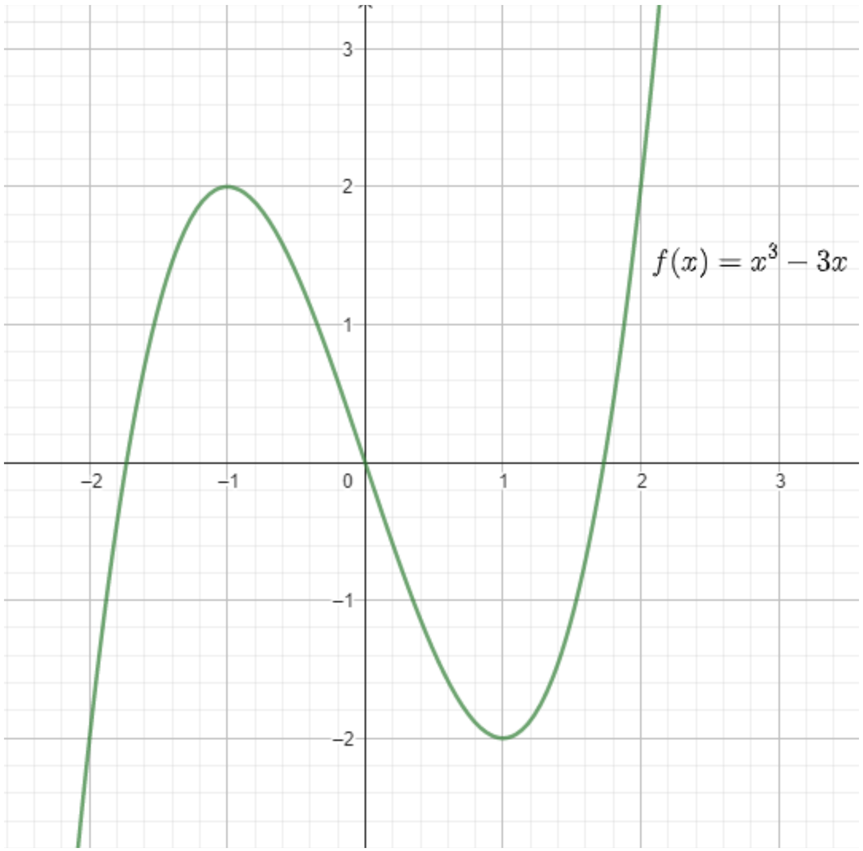
- Πως θα λύσουμε αυτή την εκθετική εξίσωση; «Μαζεύουμε» τους εκθετικούς όρους στο ένα μέλος και λογαριθμίζουμε.
- Τελικά βρίσκουμε

$$t=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\frac{\alpha}{\beta}$$

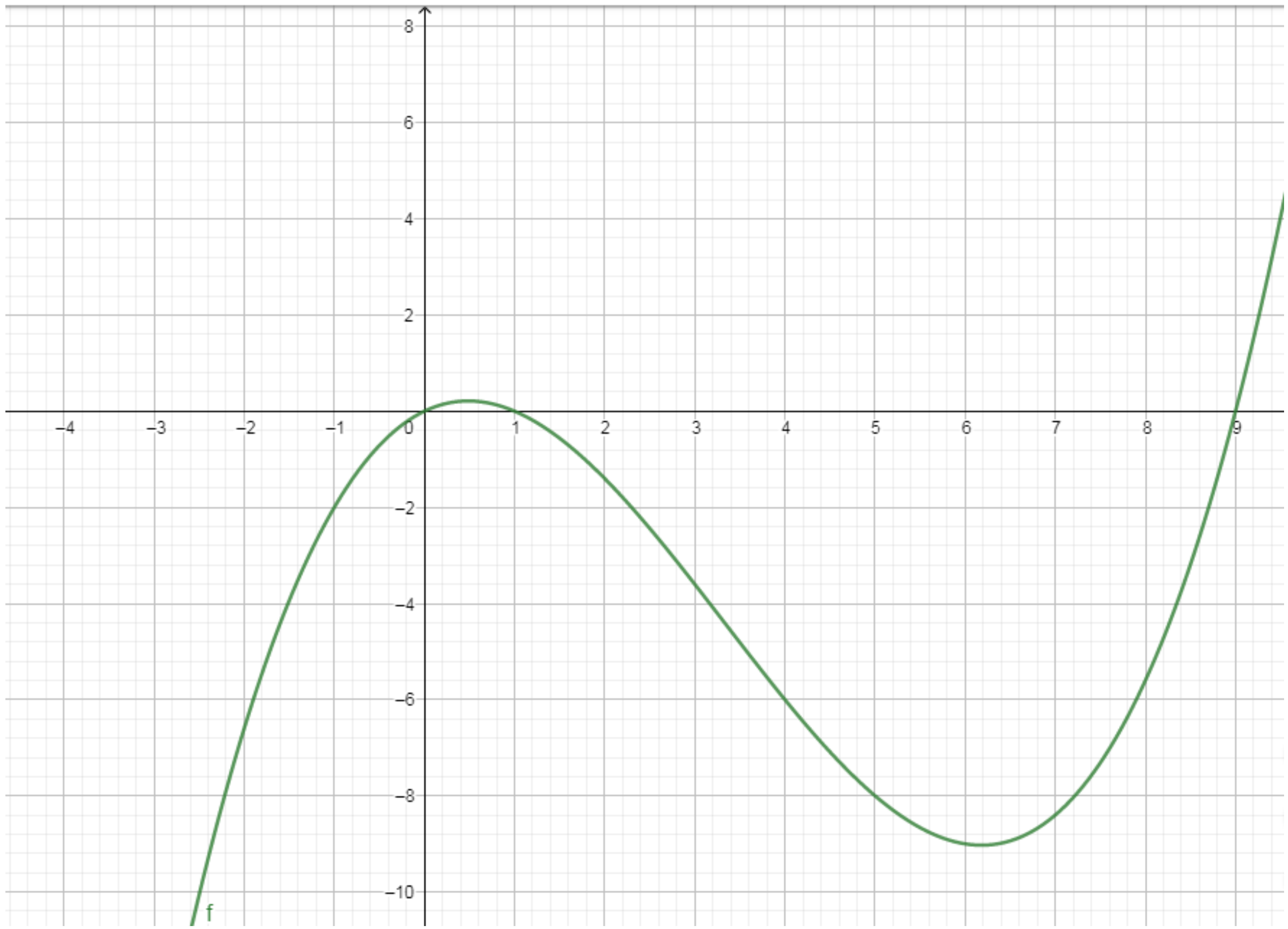
Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)= x^3-3x$.

Απάντηση. Βρίσκουμε την παράγωγο και στην συνέχεια τα διαστήματα που αυτή είναι θετική ή αρνητική.



2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



Α. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της *f.*

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Γ. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της *f* στο διάστημα [5,9]

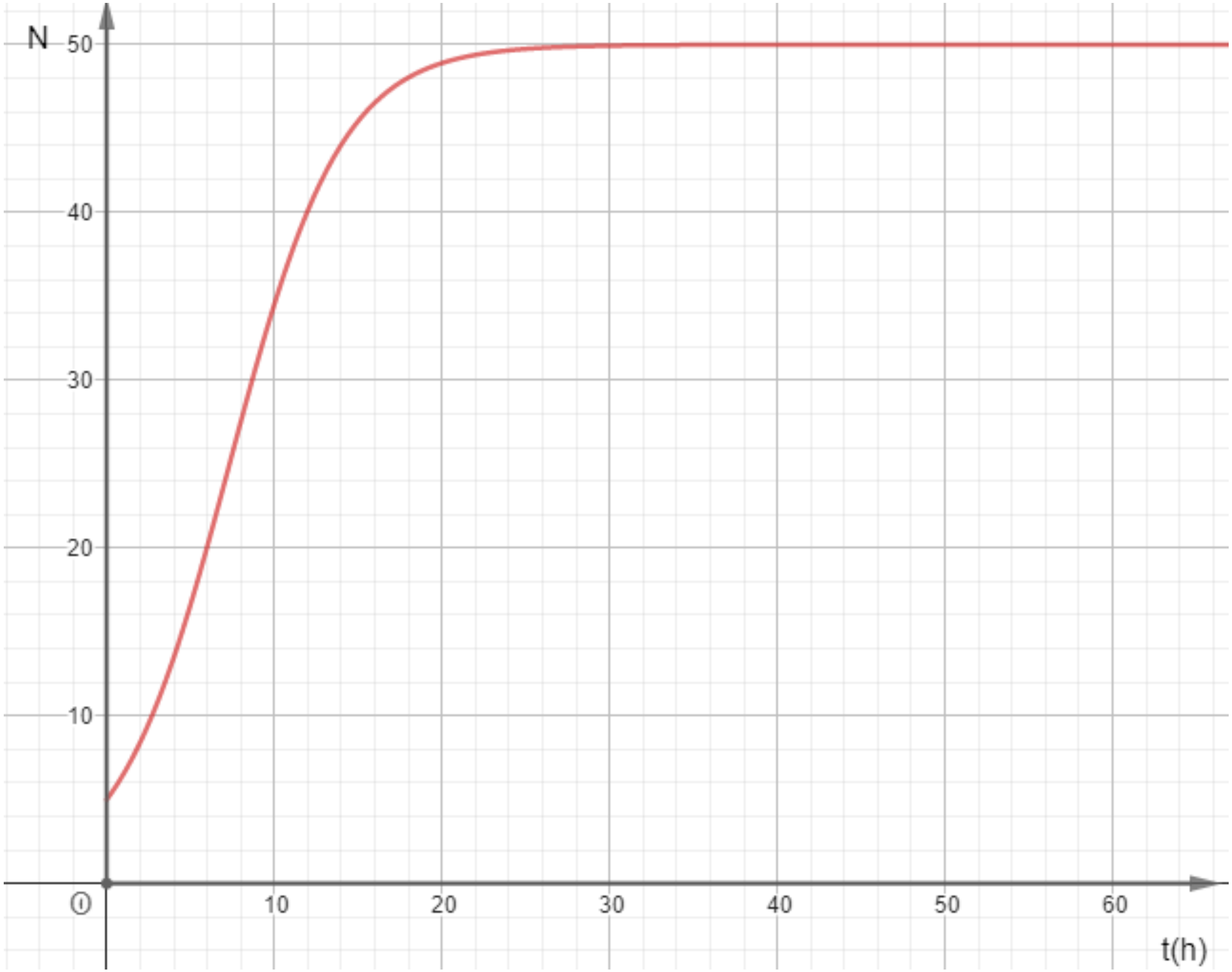
3. Στο λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο το πλήθος *N*(*t*) των βακτηρίων μίας αποικίας περιγράφεται από την συνάρτηση,

$$N(t) = \frac{50}{1 + 9e^{-0,3t}}$$

Όπου ο χρόνος *t* μετριέται σε ώρες.

Α. Να βρεθεί ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες.

Β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού την χρονική στιγμή 10h.


N
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
t(h)

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας

Καλές Γιορτές

Καλή χρονιά

κ.λ.π….