ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΓΙΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΤΜΗΜΑ

Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων

Μάθημα

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Παρουσιάσεις-Σημειώσεις

Γραμμικός Προγραμματισμός

Πρόβλημα μίξης της παραγωγήςς (product mix)

Παράδειγμα: Μίξη παραγωγής στην ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η *βιοτεχνία* ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ *παράγει δύο βασικά προϊόντα: τραπέζια και καρέκλες υψηλής ποιότητας.* Η *διαδικασία παραγωγής και* για *τα δύο προϊόντα περιλαμβάνει την επεξεργασία τους στα ίδια στάδια παραγωγής, αλλά απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα τρία τμήματα της επιχείρησης: το ξυλουργείο*, *το βαφείο και το στιλβωτήριο.*
Το *τμήμα παραγωγής της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ έχει* τυποποιήσει: *τη διαδικασία* κατασκευής *των προϊόντων της και έχει προσδιορίσει το μέσο χρόνο εργασίας ανά παραγόμενη μονάδα* σε *κάθε τμήμα.* Η *κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτεί* 8 *ώρες εργασίας στο ξυλουργείο,* 4 *ώρες στο βαφείο και* 4 *ώρες στο στιλβωτήριο, ενώ αντίστοιχα οι ώρες που απαιτούνται* για *κάθε καρέκλα είναι* 8 *στο ξυλουργείο,* 2 *στο βαφείο και* 3 *στο στιλβωτήριο. Για τον επόμενο μήνα,* ο *υπεύθυνος παραγωγής έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά* σε *960, στο βαφείο* σε *400, ενώ στο στιλβωτήριο* σε *420.*
Από τα στοιχεία που διαθέτει η διεύθυνση οικονομικών υπηρεσιών της εταιρείας, προκύπτει ότι το μικτό κέρδος της επιχείρησης με βάση τι τρέχουσες τιμές πώλησης, ανέρχεται σε *140€* για *κάθε τραπέζι και 100€* για *κάθε καρέκλα.*

Πρόβλημα σμίξης της παραγωγήςς (ptoduct mix)

Το *πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ* *είναι* ο *καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών* για *τον επόμενο μήνα ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος (Στην απλοποιημένη αυτή μορφή του προβλήματος αγνοούμε προs το παρόν* τυχών *απόθεμα που μπορεί να υπάρχει, και υποθέτουμε ότι η ζήτηση* για *τα προϊόντα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί).*

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε ώστε να διατυπώσουμε το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ με τη μορφή ενός μαθηματικού μοντέλου

Καθορισμός των Μεταβλητών του προβλήματος

➢***Ως πρώτο βήμα*** στη διαδικασία διατύπωσης του μοντέλου ΓΠ πρέπει να ορίσουμε τις **μεταβλητές απόφασης (decision variables)** του προβλήματος.

Όπως δηλώνει και το όνομα του, οι μεταβλητές του προβλήματος συμβολίζουν τα οικονομικά ή φυσικά μεγέθη τα οποία ο λήπτης αποφάσεων ενδιαφέρεται και είναι σε θέση να προσδιορίσει, και από τα οποία εξαρτάται το αποτέλεσμα που προσδοκά.

•**Στόχος της επιχείρησης είναι:** η μεγιστοποίηση του κέρδους που θα προκύψει από την πώληση των τραπεζιών και καρεκλών που θα κατασκευαστούν. Είναι προφανές ότι η ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ επιθυμεί να καθορίσει τις ποσότητες τραπεζιών και καρεκλών που πρέπει να κατασκευάσει έτσι ώστε να επιτύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

➢**Χρησιμοποιώντας μαθηματικούς συμβολισμούς** μπορούμε να ορίσουμε τις δύο μεταβλητές του προβλήματος ως εξής:

X_1 = αριθμός των τραπεζιών
X_2 = αριθμός των καρεκλών που θα κατασκευαστούν στη διάρκεια του μήνα.

Παράμετροι προβλήματος ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
	X_1 (τραπέζια)	X_2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100€	

Το αποτέλεσμα - Η αντικειμενική συνάρτηση

➢**Το επόμενο βήμα στη διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου του ΓΠ είναι**: Η διατύπωση μιας μαθηματικής σχέσης που θα συνδέει τις μεταβλητές του προβλήματος με το αποτέλεσμα που επιδιώκουμε να βελτιστοποιήσουμε

➢Στη συγκεκριμένη περίπτωση στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης

➢ Κάθε μονάδα από τα X_1 (τραπέζια) αποφέρει κέρδος 140€.

- ➢ το κέρδος (σε €) από την παραγωγή X_1 τραπεζιών είναι $140X_1$.
- ➢ το κέρδος από τα X_2 τεμάΧ1α καρεκλών είναι $100X_2$.

➢Το συνολικό λοιπόν κέρδος της επιχείρησης από την παραγωγή X_1 τραπεζιών και X_2 καρεκλών είναι:

Συνολικό κέρδος: $140\ X_1 + 100\ X_2$

Η παραπάνω συνάρτηση κέρδους, <u>**την τιμή της οποίας επιδιώκουμε να μεγιστοποιήσουμε**</u>, καλείται **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος

Η διαδικασία παραγωγής - Οι περιορισμοί του προβλήματος

- Κάθε αύξηση της παραγωγής (που μαθηματικά αντιστοιχεί σε αύξηση των τιμών των μεταβλητών X1 και X2) οδηγεί και σε αντίστοιχη αύξηση των κερδών
- Οι ποσότητες παραγωγής των δύο προϊόντων δεν μπορεί να αυξηθούν απεριόριστα, διότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στα τμήματα ξυλουργείο, βαφείο και στιλβωτήριο είναι συγκεκριμένες και επομένως με την συνεχή αύξηση των ποσοτήτων παραγωγής θα εξαντληθούν
- Επομένως, οι διαθέσιμες ώρες εργασίας σε κάθε τμήμα περιορίζουν το πόσο μπορεί να αυξηθεί η παραγωγή

Επόμενο βήμα: Η μαθηματική διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος

- **Η έννοια των περιορισμών σε ένα πρόβλημα ΓΠ** είναι ότι:

Περιγράφουν τις επιχειρησιακές και λειτουργικές συνθήκες με βάση τις οποίες καθορίζονται οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος

- **Στο συγκεκριμένο πρόβλημα**, οι περιορισμοί περιγράφουν τις συνθήκες παραγωγής των δυο προϊόντων στα τρία τμήματα τις επιχείρησης, όπου οι απαιτούμενες για την παραγωγή ώρες εργασίας σε κάθε τμήμα μπορεί να ξεπερνούν τις αντίστοιχες διαθέσιμες συνέχεια…

Επομένως:

•Οι απαιτούμενες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο για παραγωγή X_1 τραπεζιών και X_2 καρεκλών είναι: $8X_1 + 8X_2$

•Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο είναι: 960

•Συνεπώς ο περιορισμός που αφορά την επεξεργασία των δύο προϊόντων στο ξυλουργείο μπορεί να διατυπωθεί με την εξής μαθηματική σχέση:

Περιορισμός Ξυλουργείου (Ξ):	$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960
	(απαιτούμενες ώρες	$\leq$	διαθέσιμες)

•Οι περιορισμοί που αφορούν την επεξεργασία των δύο προϊόντων στο βαφείο και στο στιλβωτήριο ορίζονται με τον ίδιο τρόπο ως εξής:

Περιορισμός Βαφείου (Β):	$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400
	(απαιτούμενες ώρες	$\leq$	διαθέσιμες)
Περιορισμός Στιλβωτηρίου (Σ):	$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420
	(απαιτούμενες ώρες	$\leq$	διαθέσιμες)

Το μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η πλήρης διατύπωση του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ σε μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση Συνολικού κέρδους: $140\ X_1 + 100\ X_2$

υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου
$X_1 \geq 0$			
$X_2 \geq 0$			

Οι δύο τελευταίοι περιορισμοί δηλώνουν ότι οι μεταβλητές X_1 και X_2 μπορούν να λάβουν μόνο θετικές τιμές, προφανώς εφόσον εκφράζουν ποσότητες παραγωγής, κάτι που όμως **<u>πρέπει να συμπεριληφθεί στη διατύπωση του αντίστοιχου μαθηματικού μοντέλου</u>**

Το πρόβλημα έχει μετατραπεί από ένα διοικητικό - οικονομικό πρόβλημα, σε ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης Προβλημάτων ΓΠ

•Η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου που περιγράφεται είναι δυνατή μόνο σε προβλήματα ΓΠ με δύο μεταβλητές ώστε να είναι δυνατή η απεικόνιση τους σε ένα σύστημα αξόνων X_1 και X_2.
•Όταν υπάρχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές (όπως συμβαίνει σε όλα τα πραγματικά προβλήματα) η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου δεν είναι δυνατή και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με την αλγοριθμική μέθοδο Simplex.

Εφικτές Λύσεις

Το πρώτο βήμα στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ είναι ο προσδιορισμός των εφικτών λύσεων.

➢**Μια λύση καλείται εφικτή** όταν δεν παραβιάζει κανέναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.

Σε επιχειρησιακούς όρους μία εφικτή λύση αντιπροσωπεύει μία από τις πολλές εναλλακτικές επιλογές τιμών για τις μεταβλητές αποφάσεων, η οποία είναι δυνατό να υλοποιηθεί με τα μέσα/πόρους που διατίθενται.

Το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

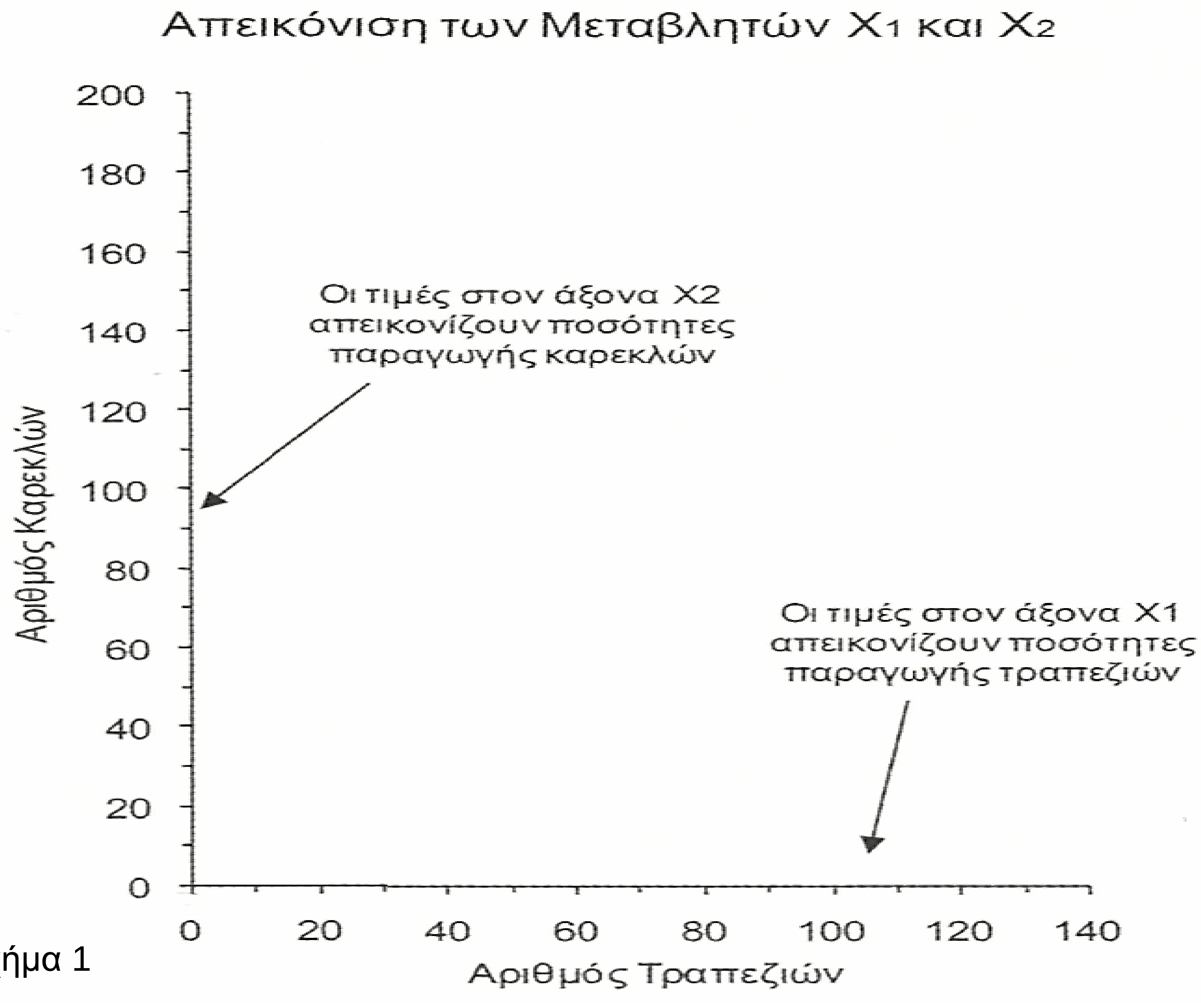
•Μία λύση για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ περιλαμβάνει τον προσδιορισμό δύο τιμών:

- **την ποσότητα των τραπεζιών (X_1) και**
- **την ποσότητα των καρεκλών (X_2) που θα κατασκευασθούν**

•Οι δύο μεταβλητές μπορεί να απεικονιστούν γραφικά σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, έτσι ώστε η μεταβλητή X_1 (τραπέζια) να απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα και η μεταβλητή X_2 (καρέκλες) να απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα.

•Μας ενδιαφέρουν μόνο οι μη αρνητικές τιμές των X_1 και X_2.

•Σε μαθηματικούς όρους, αυτό σημαίνει ότι σε ένα σύστημα αξόνων X_1 και X_2 οι τιμές των μεταβλητών περιορίζονται στο πρώτο τεταρτημόριο (βλέπε στο ακόλουθο σχήμα).


Απεικόνιση των Μεταβλητών X1 και X2
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Αριθμός Καρεκλών
Οι τιμές στον άξονα X2 απεικονίζουν ποσότητες παραγωγής καρεκλών
Οι τιμές στον άξονα X1 απεικονίζουν ποσότητες παραγωγής τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140
Αριθμός Τραπεζιών

Σχήμα 1

Γραφική Παράσταση περιορισμών

•Για τη γραφική παράσταση του πρώτου περιορισμού του προβλήματος (Ξυλουργείο) σε γραφική μορφή στο ορθογώνιο σύστημα των αξόνων, πρέπει αρΧ1κά να θεωρήσουμε την αντίστοιχη ανισότητα ως ισότητα
(Ξ): **$8X_1+8X_2=960$**

•Μια γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές παριστάνει μία ευθεία γραμμή στο σύστημα αξόνων X_1-X_2.

•Ο πιο εύκολος τρόπος να χαράξουμε την ευθεία γραμμή είναι να βρούμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται.

•Όταν δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ($X_1 = 0$), για να εξαντλήσουμε όλεςτις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 καρέκλες: *($8(0) + 8X_2 = 960 \Rightarrow 8X_2 = 960 \Rightarrow X_2= 960/8 = 120$).*

Επομένως το σημείο $X_1=0$, $X_2=120$ είναι ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία 8X1+8X2=960.

Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ($X_2 = 0$), για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 τραπέζια ($8X_1 + 8(0) = 960 \Rightarrow X_1 = 960/8 =120$).

•Το σημείο X_1=12O, X_2=0 είναι ένα δεύτερο σημείο της ευθείας.

•Η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό των ωρών εργασίας στο ξυλουργείο διέρχεται από τα σημεία (0,120) και (120,0) και απεικονίζεται γραφικώς στο σχήμα α.

•Στο σχήμα α παρατηρούμε την ευθεία γραμμή που αντιπροσωπεύει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παραγωγής καρεκλών και τραπεζιών που αναλώνουν τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των 960 ωρών στο ξυλουργείο

•Ο αρχικός περιορισμός του προβλήματος δήλωνε ότι οι ώρες που θα αναλωθούν στην παραγωγή δεν μπορεί να ξεπερνούν τις 960

•Επομένως, οποιοδήποτε σημείο που βρίσκεται είτε πάνω στην ευθεία γραμμή είτε στην περιοχή κάτω από αυτήν, αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό παραγωγής που δεν απαιτεί περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο.

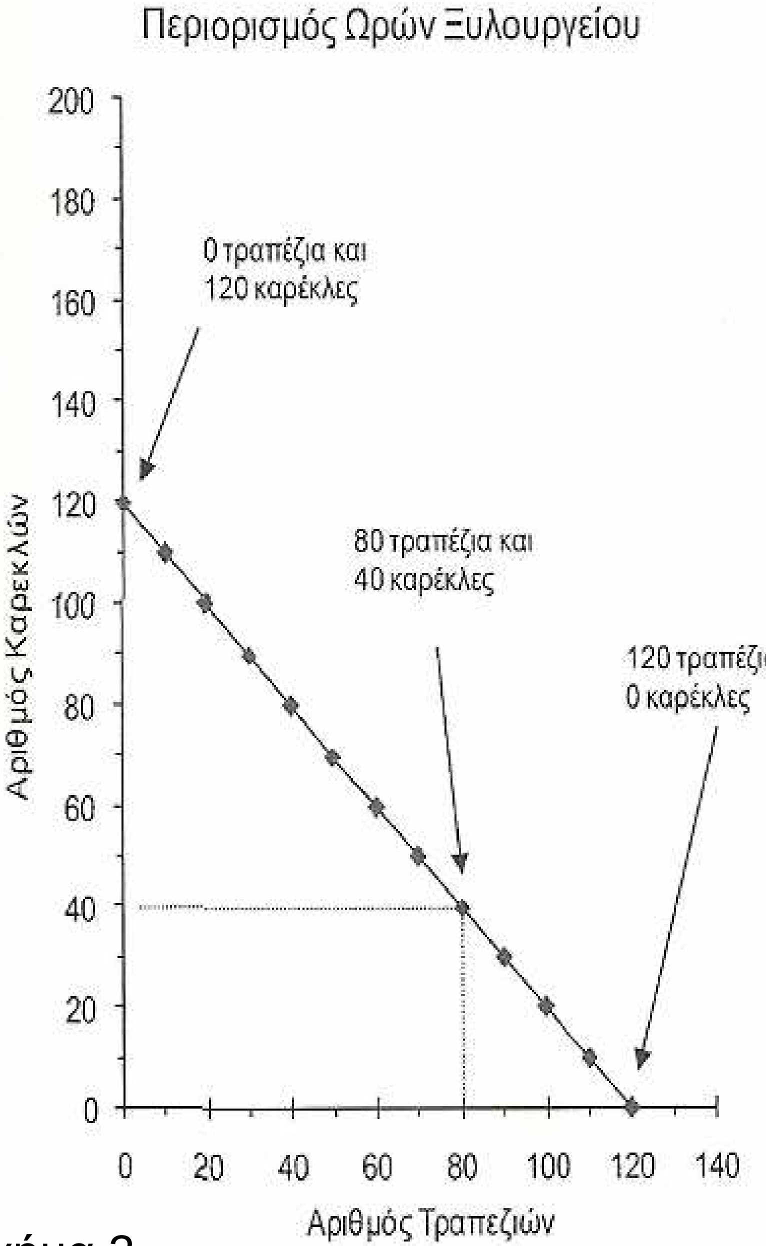
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία που ικανοποιούν το δεύτερο περιορισμό του προβλήματος (Βαφείο). Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση και θεωρώντας την ανισότητα του δεύτερου περιορισμού ως ισότητα, έχουμε:

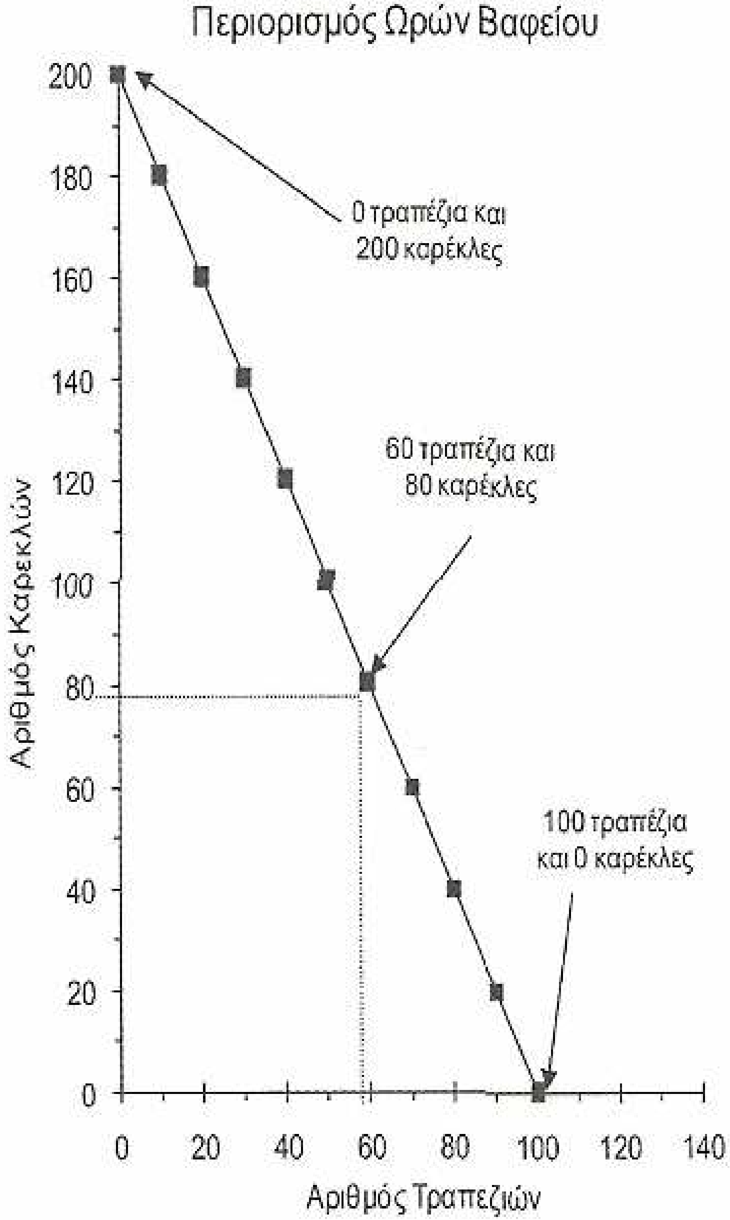
(B): **$4X_1+2X_2=400$.**

Στην περίπτωση που δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ($X_1 = 0$) για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο βαφείο θα πρέπει να παράγουμε 200 καρέκλες:

$(4(0) + 2X_2 = 400 \Rightarrow 2X_2 = 400 \Rightarrow X_2 = 400/2 = 200)$.

Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ($X_2 = 0$) για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο βαφείο, θα πρέπει να παράγουμε 100 τραπέζια *($X_1= 400/4=100$).* Ο περιορισμός των ωρών στο βαφείο απεικονίζεται γραφικώς στο σχήμα β.





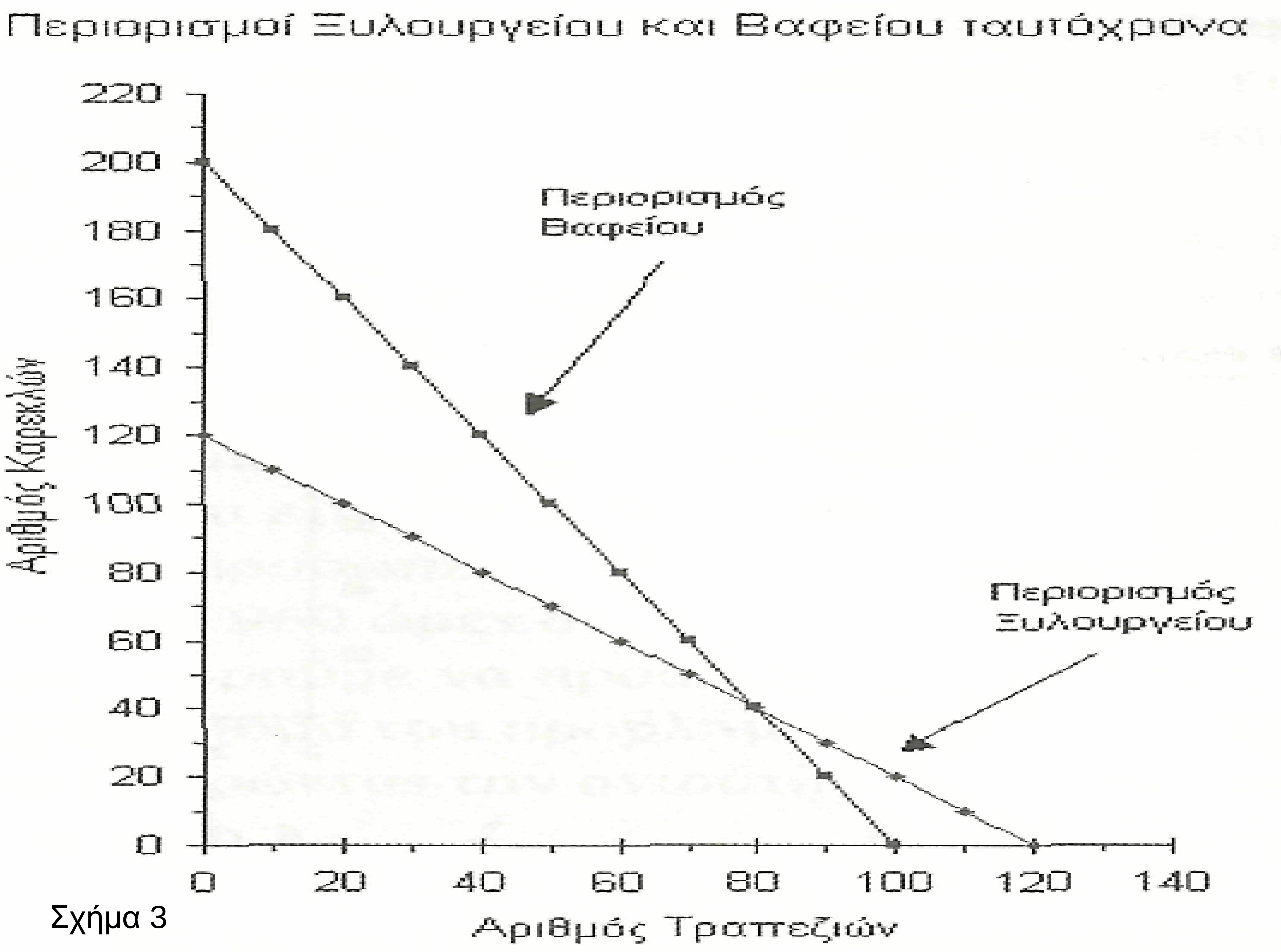
Σχήμα 2

α. Περιορισμός Ξυλουργείου

β. Περιορισμός Βαφείου

•Ας δούμε ποιοι συνδυασμοί παραγωγής ικανοποιούν και τους δύο περιορισμούς ταυτόχρονα, δηλαδή **να απαιτούν το πολύ 960 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο και 400 ώρες εργασίας στο βαφείο**

•**Τοποθετώντας και τους δύο περιορισμούς στο ίδιο γράφημα**, το αποτέλεσμα είναι η περιοχή που βρίσκεται εντός και των δύο περιορισμών, δηλαδή η σκιασμένη περιοχή του σχήματος 3 που αντιπροσωπεύει την περιοχή των λύσεων που δεν απαιτούν περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο και 400 ώρες στο βαφείο αντίστοιχα.


Περιορισμοί Ξυλουργείου και Βαφείου ταυτόχρονα
Περιορισμός Βαφείου
Περιορισμός Ξυλουργείου
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100
120
140

Σχήμα 3

•Υπάρχει όμως και ένας τρίτος περιορισμός του προβλήματος, αυτός που αφορά τις διαθέσιμες ώρες στο στιλβωτήριο

•Όλα τα σημεία της σκιασμένης περιοχής του σχήματος 3 δεν είναι σίγουρο ότι θα ικανοποιούν και τον τρίτο περιορισμό.

•Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία και θεωρώντας την ανισότητα του τρίτου περιορισμού ως ισότητα, έχουμε:

(Σ): $\mathbf{4X_1+3X_2=420}$

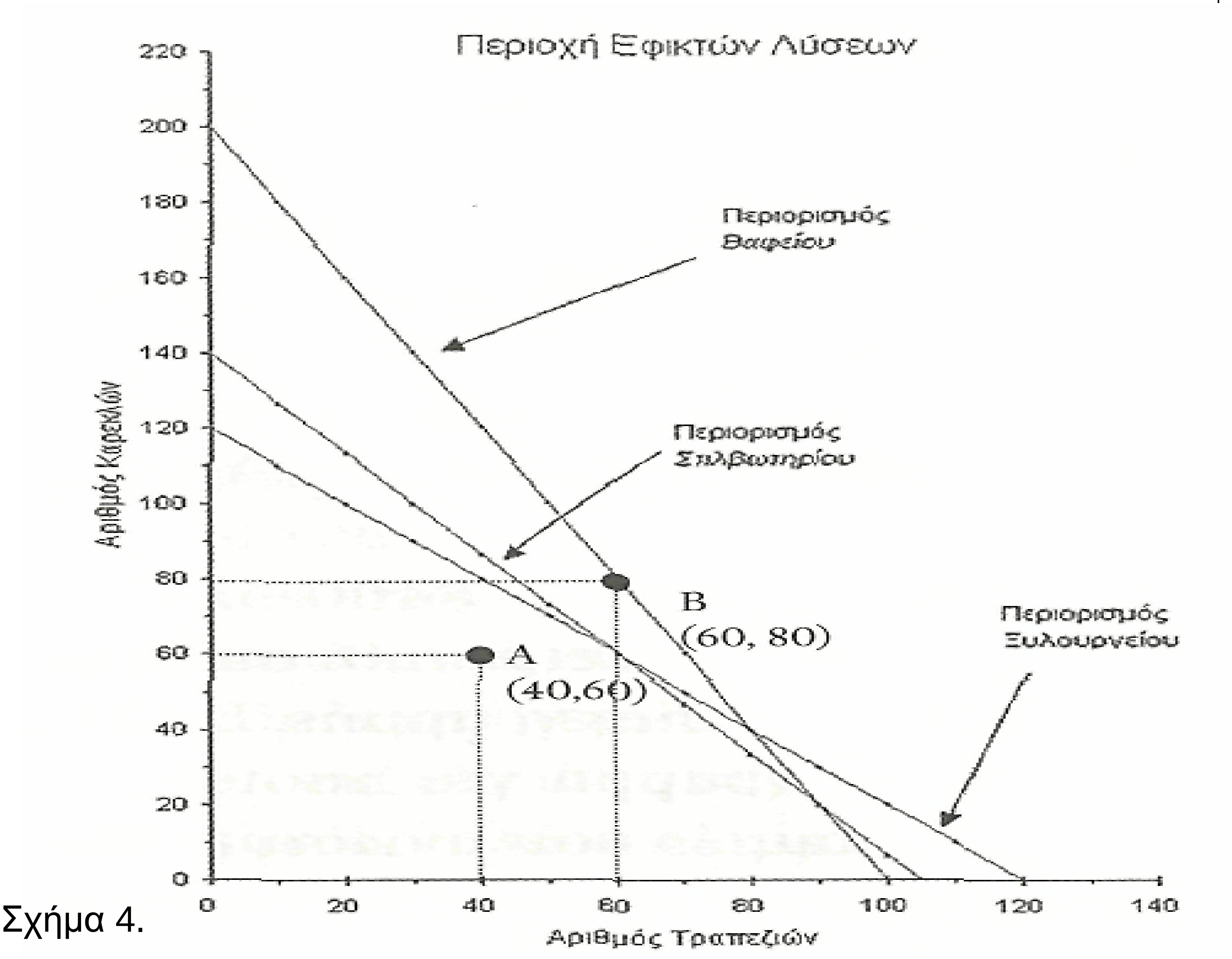
Στην περίπτωση που δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ($X_1 = 0$), για να εξαντλήσουμε τις διαθέσιμες ώρες στο στιλβωτήριο θα πρέπει να παράγουμε 140 καρέκλες:

(4(0) + 3X_2 = 420 => 3X_2 = 420 => X_2 = 420/3 = 140).

Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ($X_2 = 0$), για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο στιλβωτήριο θα πρέπει να παράγουμε 105 τραπέζια:

(X_1=420/4=105).

Θέτοντας και τον περιορισμό του στιλβωτηρίου στο ίδιο γράφημα με τους άλλους δύο περιορισμούς



Σχήμα 4.

Περιοχή εφικτών λύσεων

- Η σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 4, στην οποία περιέχονται όλες οι λύσεις που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς του προβλήματος, καλείται περιοχή εφικτών λύσεων.
- Κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων αντιπροσωπεύει λύση που δεν είναι εφικτή, δηλαδή ένα συνδυασμό παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών που δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί, διότι απαιτεί περισσότερες από τις διαθέσιμες ώρες στο ένα τουλάχιστον από τα τρία τμήματα παραγωγής.

Η παραγωγή 40 τραπεζίων και 60 καρεκλών είναι εφικτή διότι το σημείο Α (40,60) βρίσκεται μέσα στην περιοχή των εφικτών Λύσεων, ενώ αντίθετα δεν είναι εφικτή η παραγωγή 60 τραπεζίων και 80 καρεκλών διότι το αντίστοιχο σημείο Β είναι εκτός της *περιοχής των εφικτών λύσεων (σχήμα 4).*

Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης

Βέλτιστη λύση ενός προβλήματος ΓΠ είναι εκείνη η λύση η οποία είναι καταρχήν εφικτή και η οποία βελτιστοποιεί (δίνει δηλαδή τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή αντίστοιχα) την αντικειμενική συνάρτηση.

Έχοντας προσδιορίσει την περιοχή των εφικτών λύσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα (σχήμα 4).
Ας εξετάσουμε τη διαδικασία με την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε γραφικά ποια από τις εφικτές λύσεις αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο κέρδος, δηλαδή τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.
Ας ξεκινήσουμε με το να προσδιορίσουμε λύσεις που αποφέρουν ένα προκαθορισμένο σταθερό κέρδος.
Ας επιλέξουμε τυχαία ένα συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους, για παράδειγμα 8.400€.

Υπάρχουν εφικτές λύσεις που αντιστοιχούν σε κέρδος 8.400€ και ποιες είναι αυτές;
Η απάντηση προφανώς είναι όλες οι λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathbf{140X_1+100X_2 = 8400}.$$

•Όλες οι λύσεις που δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση την τιμή 8400 παριστάνονται με τα σημεία μίας ευθείας γραμμής

•Είναι προφανές ότι μπορούμε να χαράξουμε μία ευθεία γραμμή για οποιοδήποτε συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους

•Οι ευθείες γραμμές που αντιστοιχούν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους ονομάζονται **ισοσταθμικές (ή ισοβαρείς)** ευθείες κέρδους

•Η συγκεκριμένη ισοσταθμική ευθεία κέρδους μπορεί να οριστεί από τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες: *θέτοντας* $X_1=0$, *προκύπτει* $X_2=84$, *και αντίστοιχα θέτοντας*

•$X_2=0$, *προκύπτει* $X_1=60$ (Σχήμα 5).

•Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω από μία ισοσταθμική αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τιμή κέρδους

Αντίθετα

•Σημεία που βρίσκονται κάτω της ευθείας αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές.

•Προφανώς τα σημεία της ισοσταθμικής των 8.400 δεν παράγουν τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησηδ, δεν αντιστοιχούν δηλαδή σε συνδυασμούς παραγωγής που θα έδιναν το μεγαλύτερο κέρδος στην επιχείρηση

•Αυτό προκύπτει από την εξέταση του σχήματος 5, όπου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία μέσα στην περιοχή εφικτών λύσεων που βρίσκονται πάνω από τη συγκεκριμένη ισοσταθμική ευθεία και επομένως αντιστοιχούν σε επίπεδο κέρδους μεγαλύτερο από 8.400.

•Θεωρώντας μια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεγαλύτερη των 8400,

π.χ την τιμή 11.200

μπορούμε να χαράξουμε μια δεύτερη ισοσταθμική ευθεία κέρδους που αντιστοιχεί στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\mathbf{140X_1 + 100X_2 = 11200}.$$

η οποία, όπως διακρίνουμε στο Σχήμα 5, διέρχεται από τα σημεία (0,112) και (80,0). *(θέτοντας* $X_1=0$, *προκύπτει* $X_2=112$*, και αντίστοιχα θέτοντας* $X_2=0$*, έχουμε* $X_1=80$*).*

Παρατηρούμε ότι :

•Αυξάνοντας κάθε φορά την τιμή της αντικειμενικά συνάρτησης, παίρνουμε μια νέα ισοσταθμική ευθεία κέρδους παράλληλη με την αρχική (διότι οι συντελεστές του X_1 και X_2 που καθορίζουν την κλίση της ευθείας παραμένουν οι ίδιοι) και η οποία βρίσκεται πιο πάνω από την προηγούμενη.

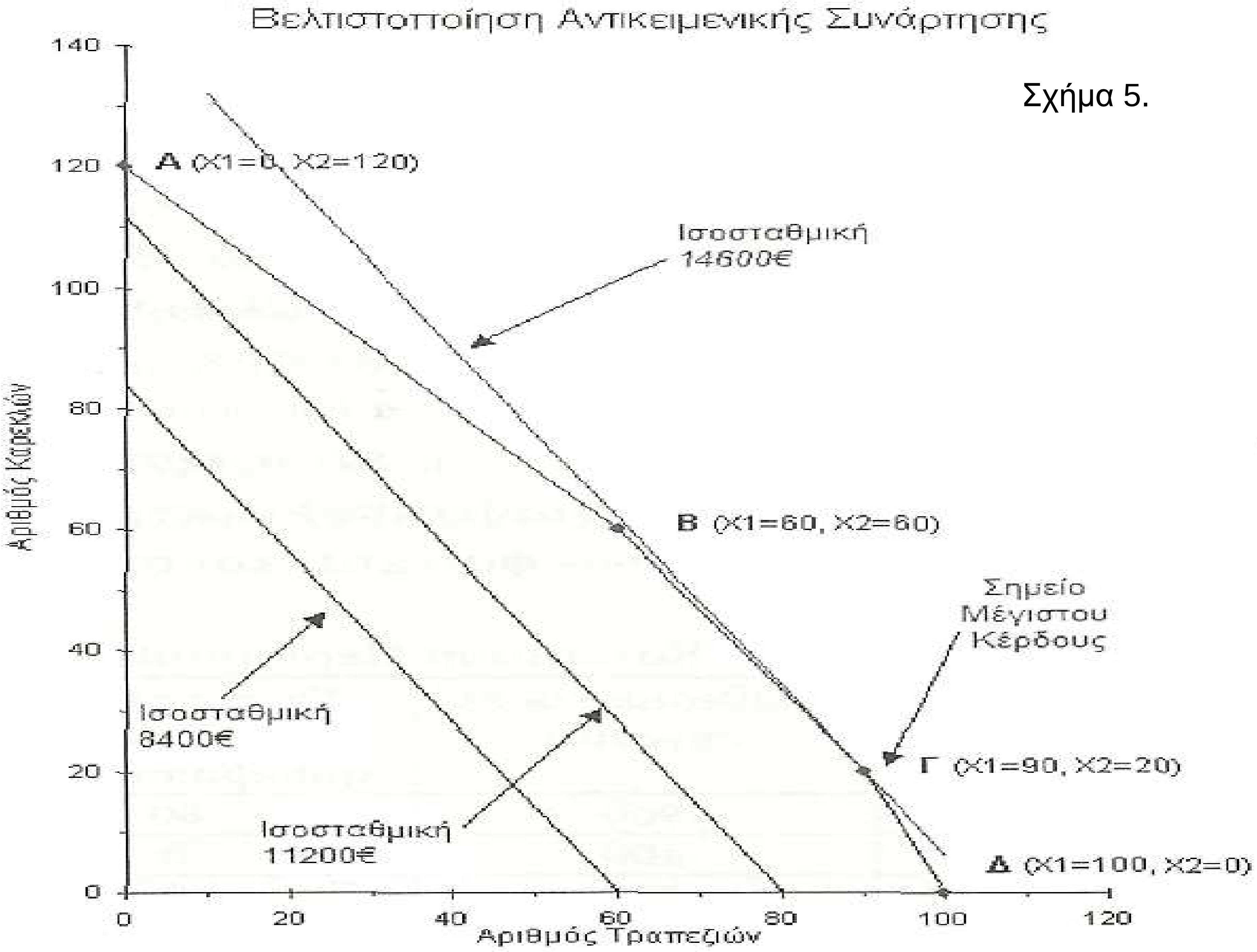
Μετακινώντας επομένων την ισοσταθμική ευθεία κέρδους προς τα πάνω, και διατηρώντας την ταυτόχρονα παράλληλη προς την αρχική της θέση, επιτυγχάνουμε μεγαλύτερες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σε κάθε νέα θέση παίρνουμε μια νέα ισοσταθμική ευθεία κέρδους (σχήμα 5)

Εφόσον λοιπόν στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους

Θα πρέπει να μετακινήσουμε την ισοσταθμική ευθεία όσο πιο ψηλά είναι δυνατόν, χωρίς όμως να ξεφύγει από τα όρια της περιοχής των εφικτών λύσεων

Όταν καταλήξουμε στο σημείο όπου η ευθεία του κέρδους δεν είναι δυνατό να μετακινηθεί ψηλότερα, γιατί θα βρεθεί πλέον εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων, τότε έχουμε επιτύχει τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.


Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης
Σχήμα 5.
A (X1=0, X2=120)
Ισοσταθμική
14600€
B (X1=60, X2=60)
Σημείο
Μέγιστου
Κέρδους
Γ (X1=90, X2=20)
Δ (X1=100, X2=0)
Ισοσταθμική
8400€
Ισοσταθμική
11200€
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140

Ποιο είναι το τελευταίο σημείο (ή σημεία) της περιοχής των εφικτών λύσεων από τα οποία θα διέλθει μία ισοσταθμική ευθεία;

Προφανώς στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος είναι το σημείο Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων.

Αυτό είναι και το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται και το συνολικό κέρδος, διότι κάθε άλλη ισοσταθμική ευθεία που θα αντιστοιχούσε σε μεγαλύτερο κέρδος, θα βρίσκονταν έξω από την περιοχή των εφικτών λύσεων (Σχήμα 5)

Μεταβλητές απόφασης

•Η κορυφή Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων αντιστοιχεί στο σημείο (X_1=90, X_2=20). Επομένως, ο συνδυασμός παραγωγής που οδηγεί στην επίτευξη του μεγαλύτερου κέρδους είναι η παραγωγή 90 τραπεζιών και 20 καρεκλών.

Αντικειμενική συνάρτηση

•Το κέρδος που προκύπτει μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση των τιμών X_1=90 και X_2=20 της βέλτιστης λύσης στην αντικειμενική συνάρτηση:
Βέλτιστο κέρδος = 140(90) + 100(20) = 14.600€

Περιορισμοί

•Η επιχείρηση είχε στη διάθεση της στα τρία τμήματα (Ξυλουργείο, Βαφείο και Στιλβωτήριο) 960, 400 και 420 ώρες εργασίας αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις τιμές X_1=90 και X_2=20 σε κάθε περιορισμό μπορούμε να υπολογίσουμε σε ποια τμήματα εξαντλήθηκαν όλες οι διαθέσιμες ώρες εργασίας και σε ποια όχι, όπως φαίνεται και στον πίνακα

Τμήμα	Απαιτούμενες ώρες εργασίας	Διαθέσιμες ώρες εργασίας	Ώρες εργασίας που δεν χρησιμοποιούνται	Είδος περιορισμού
Ξ	8(90) + 8(20) = 880	960	80	Μη δεσμευτικός
Β	4(90) + 2(20) = 400	400	0	Δεσμευτικός
Σ	4(90) + 3(20) = 420	420	0	Δεσμευτικός

- Οι περιορισμοί του Βαφείου και Στιλβωτηρίου χαρακτηρίζονται **δεσμευτικοί**, διότι στα αντίστοιχα τμήματα εξαντλούνται όλες οι διαθέσιμες ποσότητες πόρων (ωρών εργασίας)

- Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 5. όπου το σημείο Γ της βέλτιστης λύσης προσδιορίζεται από την τομή των ευθειών των δύο περιορισμών (Βαφείου και Στιλβωτηρίου), ενώ σε σχέση με την ευθεία του περιορισμού του Ξυλουργείου, το σημείο Γ βρίσκεται κάτω από αυτή, επομένως δεν αναλώνει όλη τη διαθέσιμη ποσότητα των 960 ωρών εργασίας στο Ξυλουργείο.

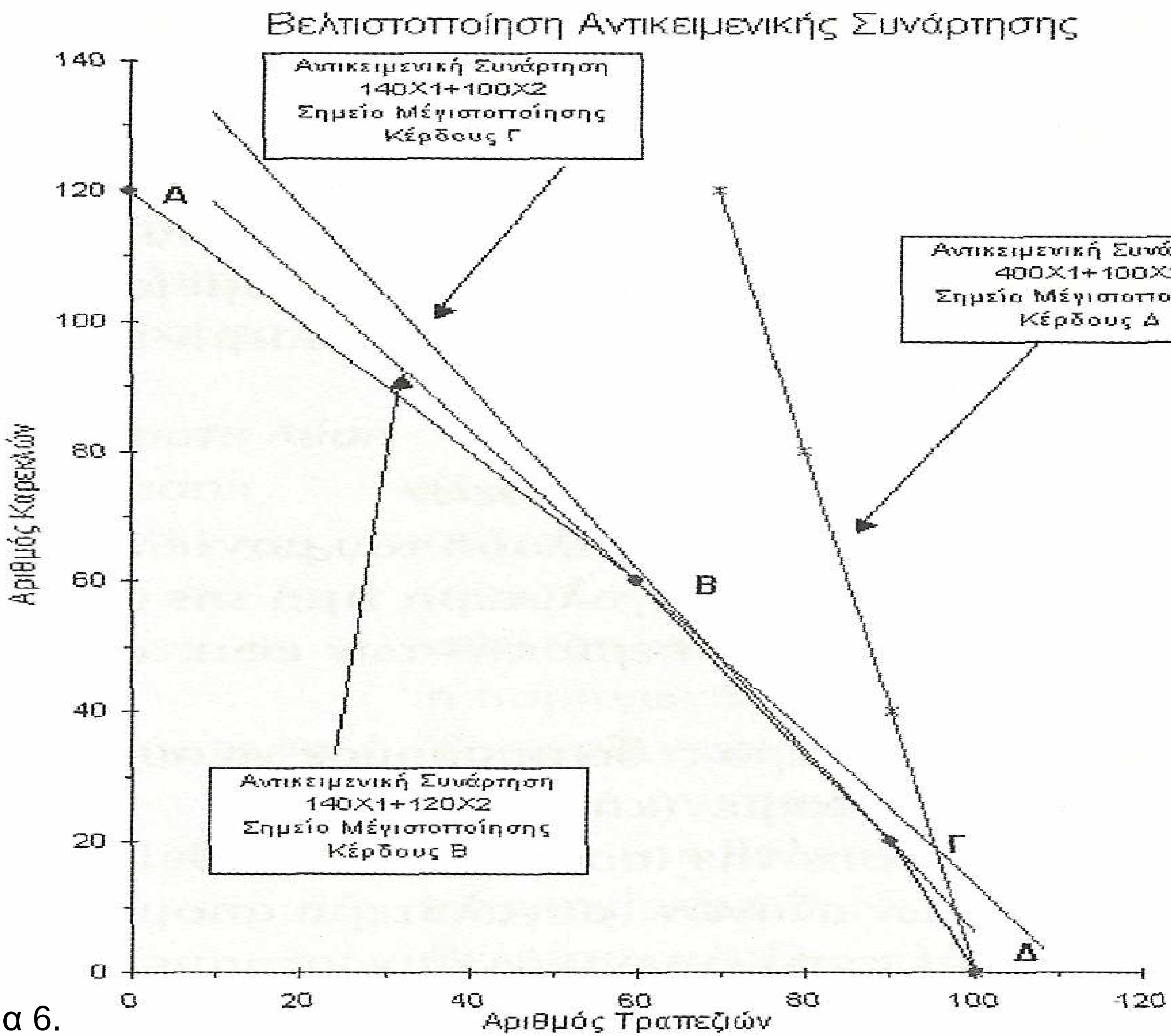
Τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων

- Από τη γραφική επίλυση του μοντέλου του ΓΠ, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή της (βέλτιστη λύση του προβλήματος) στην κορυφή Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων (Σχήμα 5).

Ας εξετάσουμε όμως γενικότερα τι θα μπορούσε να συμβεί στην προσπάθεια μεγιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης

- Στη διαδικασία μετακίνησης της ισοσταθμικής ευθείας όσο το δυνατόν μακρύτερα από την αρχή των αξόνων (μεγαλύτερη απομάκρυνση αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης), το τελευταίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων από το οποίο μπορεί να διέλθει μια ισοσταθμική ευθεία είναι μία από τις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων Α, Β, Γ ή Δ. Το ποια ακριβώς από αυτές τις κορυφές ορίζει το σημείο που δίνει τη βέλτιστη τιμή του κέρδους, εξαρτάται από την κλίση της ισοσταθμικής ευθείας.

- Επομένως: **Η βέλτιστη λύση καθορίζεται πάντοτε από μία <u>κορυφή</u> της περιοχής των εφικτών λύσεων**


Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης
Αντικειμενική Συνάρτηση
140X1+100X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Γ
Αντικειμενική Συνάρτηση
400X1+100X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Δ
Αντικειμενική Συνάρτηση
140X1+120X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Β
Α
Β
Γ
Δ
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140

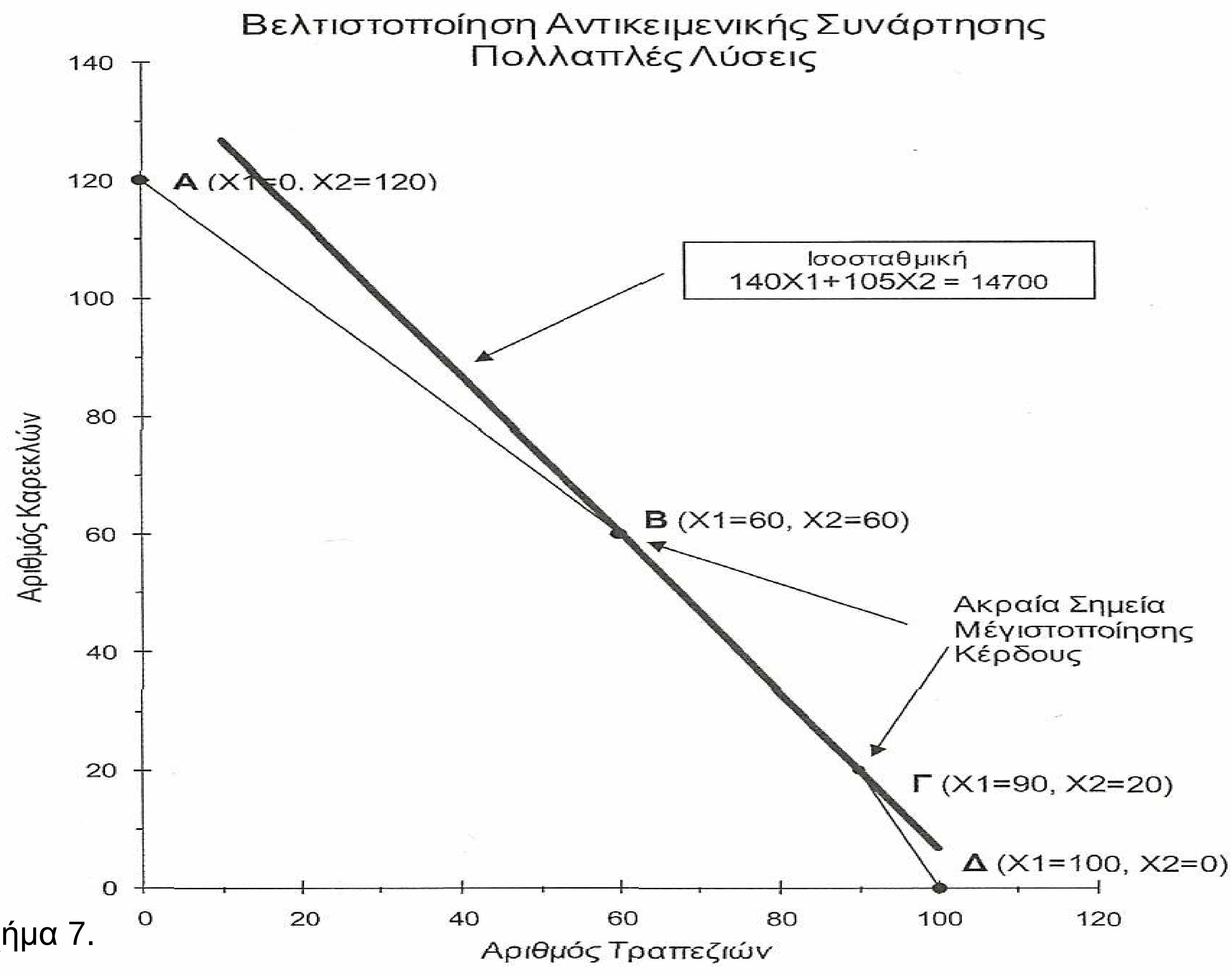
Σχήμα 6.

- Αν <u>η κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης</u> ήταν λίγο μικρότερη:
  - το τελευταίο σημείο της περιοχής εφικτών λύσεων που θα μπορούσε να διέλθει η ισοσταθμική ευθεία θα ήταν το σημείο Β
- Αντίθετα, <u>αν η κλίση ήταν μεγαλύτερη</u>:
  - αυτό θα ήταν το σημείο Δ (Σχήμα 6).
- **<u>Η κλίση της ισοσταθμικής ευθείας καθορίζεται όμως από τους συντελεστές κέρδους των μεταβλητών</u> $\underline{X_1}$ <u>και</u> $\underline{X_2}$.**

Έτσι:

- *αν ο συντελεστής κέρδους για τις καρέκλες ήταν 120 αντί της αρχικής τιμής των 100, τότε η ισοσταθμική ευθεία θα είχε μικρότερη κλίση και το τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Β.*

- *Αντίθετα, αν το κέρδος για τα τραπέζια ήταν 400 και το κέρδος για τις καρέκλες 100 δραχμές, η κλίση της ισοκερδούς ευθείας θα ήταν πολύ μεγαλύτερη,* και *επομένως το τελευταίο σημείο από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Δ (Σχήμα 6.)*



Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης
Πολλαπλές Λύσεις
Α (X1=0, X2=120)
Ισοσταθμική
140X1+105X2 = 14700
Β (X1=60, X2=60)
Ακραία Σημεία
Μέγιστοποίησης
Κέρδους
Γ (X1=90, X2=20)
Δ (X1=100, X2=0)
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140

Σχήμα 7.

•Όταν η κλίση της ισοσταθμικής ευθείας είναι η ίδια με την κλίση της ευθείας που αντιπροσωπεύει έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος, η τελευταία θέση της ισοσταθμικής ευθείας πριν βρεθεί εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων θα ταυτίζεται με την ευθεία του αντίστοιχου περιορισμού (Σχήμα 7).

• Σε αυτή την περίπτωση, κάθε σημείο της ευθείας αποτελεί μία βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ, οι συντελεστές κέρδους για τις καρέκλες και τα τραπέζια ήταν 140 και 105 αντίστοιχα, με την αντικειμενική συνάρτηση να ορίζεται ως $140X_1+105X_2$.

<u>Η κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίδια με την κλίση του περιορισμού των ωρών του Στιλβωτηρίου (140/105=4/3),</u> επομένως η τελευταία θέση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης ***θα συνέπιπτε με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ*** *(Βλέπε Σχήμα 7).*

Στην περίπτωση αυτή:

Τόσο το σημείο Β (60 τραπέζια και 60 καρέκλες) όσο και το σημείο Γ (90 τραπέζια και 20 καρέκλες) αλλά και κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, αντιστοιχεί σε κέρδος 14.700€.

- ***<u>Η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί</u>*** από την επίλυση όλων των συστημάτων εξισώσεων που ορίζονται σε κάθε ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων από τους περιορισμούς που διέρχονται από το αντίστοιχο σημείο, και υπολογισμό της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε σημείο ώστε να προσδιορισθεί το σημείο που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή.

Έλεγχος της Βέλτιστης Λύσης - Ανατροφοδότηση

➢Η λύση που προκύπτει εξαρτάται από τις παραδοχές που έγιναν στην απεικόνιση του πραγματικού επιχειρησιακού προβλήματος στο μαθηματικό μοντέλο

➢Πραγματικές συνθήκες που δεν απεικονίζονται στο μαθηματικό μοντέλο επειδή ίσως θεωρούνται προφανείς, απλοποιήσεις σύνθετων πραγματικών καταστάσεων, ελλείψεις και παραβλέψεις στη διατύπωση των περιορισμών, μπορεί να οδηγήσουν σε λύσεις που να μην είναι υλοποιήσιμες στην πράξη ή να μην είναι συμβατές με τα συγκεκριμένα επιχειρηματικά ή επιχειρησιακά δεδομένα του προβλήματος

➢Ένας άλλος παράγοντας που μπορεί επίσης να προκαλέσει προβλήματα στην υλοποίηση της λύσης του μαθηματικού μοντέλου είναι ανακριβή δεδομένα σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους του προβλήματος.

Πριν από την υλοποίηση της βέλτιστης λύσης, η λύση ελέγχεται ως προς τη δυνατότητα εφαρμογής της και αν χρειαστεί, ακολουθείται μια διαδικασία αναθεώρησης του μαθηματικού μοντέλου ή των δεδομένων και παραμέτρων του.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ. Η Λύση που προέκυψε από την επίλυση του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού προβλέπει ότι η μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης προκύπτει από την παραγωγή 90 τραπεζιών και 20 καρεκλών.
Είναι η Βέλτιστη Λύση του μαθηματικού μοντέλου αποδεκτή με επιχειρηματικούς όρους; Εκτός και αν υπάρχουν ειδικές συνθήκες στην αγορά, είναι πολύ δύσκολο να δεχθεί κανείς ότι η ΕΠΙΠΛΟΞΥΑ θα μπορούσε να διαθέσει στην αγορά 90 τραπέζια και μόλις 20 καρέκλες, δεδομένου ότι συνήθως ένα τραπέζι συνοδεύεται και από έναν πολλαπλάσιο αριθμό καρεκλών.
Η παραπάνω όμως παραδοχή, προφανής μεν, αγνοήθηκε στη διατύπωση του μοντέλου του ΓΠ. Έτσι το μαθηματικό μοντέλο δεν απεικόνιζε με πιστότητα την πραγματική κατάσταση.
Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι ο υπεύθυνοι παραγωγής τη$ ΕΠΙΠΑΟΞΥΛ διαπιστώνονται το πρόβλημα που προέκυψε, ζητά από το τμήμα πωλήσεων της επιχείρησης, πληροφορίες για τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων τραπεζιών και καρεκλών με βάση της *πωλήσεις προηγούμενων περιόδων. Ο προϊστάμενος του τμήματος πωλήσεων δεν μπορεί να πει με σιγουριά ποια είναι η σχέση μεταξύ τραπεζιών και καρεκλών που πωλούνται, αλλά δηλώνει ότι για κάθε τραπέζι πωλούνται από 2 έως 6 καρέκλες. Μια τέτοια σχέση παραγωγής δεν θα δημιουργούσε πρόβλημα στις πωλήοεις, δεδομένου ότι ένας αριθμός τραπεζιών μπορεί να συνδυασθεί και με έναν άλλο τύπο καρέκλας που η εταιρεία εισάγει από την Ιταλία.*

❖Το αρχικό μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ πρέπει να αναθεωρηθεί λαμβάνοντας υπ' όψη τις νέες απαιτήσεις

➢**οι καρέκλες πρέπει να είναι τουλάχιστο διπλάσιες σε αριθμό από τα τραπέζια**

➢αλλά **να μην υπερβαίνουν το εξαπλάσιο των τραπεζιών**

➢δύο νέοι περιορισμοί πρέπει να προστεθούν:

Ελάχιστος Αριθμός Καρεκλών: $X_2 \geq 2X_1$ ή$_1$ $2X_1 - X_2 \leq 0$

Μέγιστος Αριθμός Καρεκλών: $X_2 \leq 6X_1$ ή$_1$ $-6X_1 + X_2 \leq 0$

Αναθεωρημένο μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Μεγιστοποίηση Συνολικού κέρδους: $140\ X_1 + 100\ X_2$

υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου
$2X_1 - X_2$	$\leq$	0	Ελάχιστος Αριθμός Καρεκλών
$-6X_1 + X_2$	$\leq$	0	Μέγιστος Αριθμός Καρεκλών

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

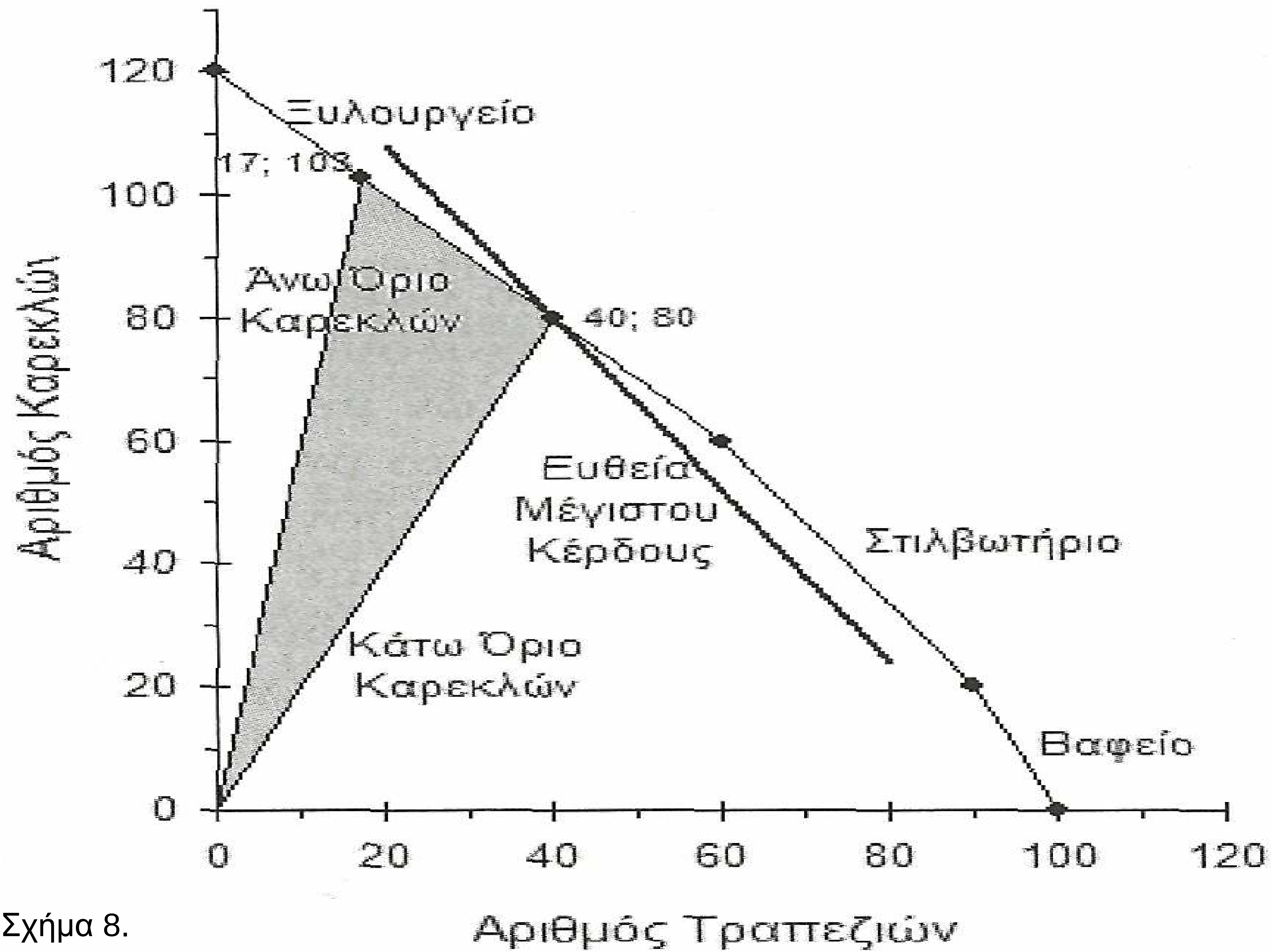
•Όπως φαίνεται και στο Σχήμα.8, η περιοχή των εφικτών λύσεων για το αναθεωρημένο πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ περιορίζεται στο σκιασμένο τρίγωνο που περικλείεται από τους περιορισμούς του ελάχιστου και μέγιστου αριθμού καρεκλών και του περιορισμού του Ξυλουργείου.

•Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε μία από τις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων και το τελευταίο σημείο της περιοχής από το οποίο μπορεί να διέλθει η ευθεία ίσου κέρδους είναι το σημείο (X_1=40, X_2=80) όπως φαίνεται και στο Σχήμα 8.

•Δεσμευτικοί είναι οι περιορισμοί του ελάχιστου αριθμού καρεκλών και των διαθέσιμων ωρών στο Ξυλουργείο,

• Οι περιορισμοί του Βαφείου και Στιλβωτηρίου δεν είναι πλέον δεσμευτικοί, δηλαδή το νέο πρόγραμμα παραγωγής εξαντλεί όλες τις ώρες στο Ξυλουργείο, ενώ υπάρχει ένας αριθμός ωρών εργασίας που δεν θα χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή, στα τμήματα Βαφείου και Στιλβωτηρίου.

➢***Η νέα λύση που προκύπτει είναι η X_1 = 40 και X_2 = 80 με συνολικό κέρδος για την επιχείρηση 140(40) + 100(80) = 13.600€.***


120
100
80
60
40
20
0
Ξυλουργείο
17; 103
Άνω Όριο
Καρεκλών
40; 80
Ευθεία
Μέγιστου
Κέρδους
Στιλβωτήριο
Κάτω Όριο
Καρεκλών
Βαφείο
Αριθμός Καρεκλών
0
20
40
60
80
100
120
Αριθμός Τραπεζιών

Σχήμα 8.

Επίλυση προβλημάτων ΓΠ με τη μέθοδο Simplex

➢Σε εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρονται σε πραγματικά προβλήματα, ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο, και επομένως η γραφική μέθοδος επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί

➢ Δεδομένου ότι ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων ΓΠ ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες ή ακόμα και σε χιλιάδες, αυτό που χρειαζόμαστε είναι μια συστηματική μέθοδος επίλυσης τους, η οποία να είναι δυνατό να υλοποιηθεί μέσω καταλλήλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων ΓΠ οποιουδήποτε μεγέθους

➢Η αλγοριθμική μέθοδος **Simplex**, έχει ακριβώς αυτά τα χαρακτηριστικά

➢Είναι μία αλγοριθμική μέθοδος, περιλαμβάνει δηλαδή μία καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων διαδοχικών βημάτων υπολογισμών μέσω των οποίων

- ➢Ξεκινώντας από ένα αρχικό ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων (αρχική λύση **Simplex**) **οδηγούμαστε σε κάθε επανάληψη** από ένα ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων σε ένα άλλο, γειτονικό με το προηγούμενο, **το οποίο αντιστοιχεί σε μία καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης**.
- ➢Οι διαδοχικές βελτιώσεις της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης επαναλαμβάνονται έως ότου εντοπισθεί η βέλτιστη λύση.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Simplex:

- εκτός από την εύρεση της βέλτιστης λύσης
- παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως, οι οποίες δεν είναι δυνατό να εξαχθούν με άλλες τεχνικές

Κατάστρωση Αρχικού Πίνακα Simplex

Παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ:

Μεταβλητές	X_1 = Ποσότητα παραγόμενων Τραπεζιών,			
	X_2 = Ποσότητα παραγόμενων Καρεκλών,			
Αντικειμενική Συνάρτηση	Μεγιστοποίηση Κέρδους: 140 X1 + 100 X2.			
Περιορισμοί:	$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Ώρες Ξυλουργείου
	$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Ώρες Βαφείου
	$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Ώρες Στιλβωτηρίου
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$			

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες - Μεταβλητές Περιθωρίου

➢Η εφαρμογή της μεθόδου **Simplex** επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με μορφή ανισοτήτων σε ισότητες

➢Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με την εισαγωγή στο μοντέλο των **μεταβλητών περιθωρίου,** οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες των πόρων που δεν χρησιμοποιούνται

Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε, ορίζουμε τρεις μεταβλητές περιθωρίου (μία για κάθε περιορισμό) ως εξής:

- S_1 = Ώρες Ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή
- S_2 = Ώρες Βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν
- S_3 = Ώρες Στιλβωτηρίου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Ο όρος **μεταβλητές περιθωρίου** έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών αντιστοιχούν στις διαφορές μεταξύ του αριστερού μέρους της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και του αντίστοιχου δεξιού μέρους (διαθέσιμη ποσότητα)

Π.χ, ας θεωρήσουμε την περίπτωση παραγωγής 70 τραπεζιών (X_1=70) και 40 καρεκλών (X_2=40). Οι ώρες ξυλουργείου που θα απαιτηθούν είναι 8(70)+8(40) = 880. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S_1 είναι 80 ώρες (960 διαθέσιμες - 880 που θα χρησιμοποιηθούν).

➢Οι περιορισμοί του προβλήματος με την **προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου** γράφονται ως εξής:

$8X_1 + 8X_2 + S_1$	=	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + S_2$	=	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + S_3$	=	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με πέντε αγνώστους (2 αρχικές μεταβλητές και 3 μεταβλητές περιθωρίου)

$8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960$	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400$	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420$	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

- Εφόσον οι μεταβλητές περιθωρίου εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή, δεν υπάρχει καμία συνεισφορά τους στο κέρδος
- Επομένως, μπορούν να συμπεριληφθούν και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές κέρδους.

Μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου, το μαθηματικό μοντέλο του ΓΠ για τη πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ διατυπώνεται στην πλήρη **κανονική μορφή** του ως εξής:

Μεγιστοποίηση $140 X_1 + 100 X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{ll}
(\Xi) & 8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960 \\
(B) & 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400 \\
(\Sigma) & 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420 \\
 & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0
\end{array}
$$

Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων

Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων
με πέντε μεταβλητές

- Εφόσον **ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις**

- Μπορούμε να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να υπολογίσουμε τις τιμές των 3 άλλων μεταβλητών λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα των 3 εξισώσεων με τις 3 μη μηδενικές μεταβλητές
  - Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού λύσεων δίνει λύσεις που αντιστοιχούν σε ακραία σημεία, που ορισμένα από αυτά ορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων.

Μια εύκολη υπολογιστικά λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές X_1 =0 και X_2 =0, επομένως οι τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών είναι ίσες με τις σταθερές της κάθε εξίσωσης, δηλαδή S_1 =960, S_2 =400 και S_3 =420.

Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική, διότι αντιπροσωπεύει την περίπτωση παραγωγής 0 τεμαχίων τόσο σε καρέκλες όσο και σε τραπέζια. Με μηδενική παραγωγή, καμία από τις διαθέσιμες ώρες στα τμήματα παραγωγής δεν χρησιμοποιείται. Αυτό δηλώνουν και οι τιμές *των μεταβλητών περιθωρίου S_1=960 ώρες, S_2=400 ώρες και S_3=420 ώρες. Η Λύση αυτή αντιστοιχεί στο ακραίο σημείο (0,0), την αρχή των* αξόνων *(Σχήμα 5).*

➢**Ως αρχική λύση**, που απαιτείται για την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας, μπορεί να θεωρηθεί η προφανής λύση **X_1=O και X_2=0, S_1=960, S_2=400 και S_3=420.**

➢Μία τέτοια λύση, όπου όλες οι πραγματικές μεταβλητές του προβλήματος έχουν τιμή 0, είναι λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για τα περισσότερα προβλήματα ΓΠ.

➢Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0

Ο αρχικός πίνακας Simplex

➢Τα βήματα της μεθόδου **Simplex** υλοποιούνται μέσω αλγεβρικών πράξεων στα δεδομένα του προβλήματος τα οποία απεικονίζονται σε μία συγκεκριμένη διάταξη πίνακα που ονομάζεται **πίνακας Simplex.**

➢Ο πρώτος πίνακας **Simplex** περιλαμβάνει τους συντελεστές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος διατεταγμένα ως εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Ο αρχικός πίνακας Simplex

➢Κάθε πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος

➢ Ο αρχικός πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί στη λύση S_1 = 960, S_2 =400 και S_3=420 **(βασικές μεταβλητές)** και X_1=0 και X_2=0 **(μη βασικές μεταβλητές).**

➢Οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται **βασικές μεταβλητές,** ενώ οι υπόλοιπες **μη βασικές**

➢Στον αρχικό πίνακα **Simplex** του παραδείγματος ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ, οι βασικές μεταβλητές είναι οι S_1(S_2 και S_3 ενώ μη βασικές οι μεταβλητές X_1 και X_2

➢ Το σύνολο των βασικών μεταβλητών καλείται και **βάση** της λύσης που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πίνακα

➢Κάθε βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του προβλήματος, επομένως ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα ΓΠ είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο αρχικός πίνακας Simplex

- **Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους στην αντικειμενική συνάρτηση που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
- **Στη δεύτερη στήλη** τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές (S_1, S_2 και S_3 για τον αρχικό πίνακα)
- **Οι επόμενες στήλες αποτελούν** το κυρίως τμήμα του πίνακα **Simplex** και αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος στους αντίστοιχους περιορισμούς
- **Η τελευταία στήλη** αντιστοιχεί στις σταθερές ποσότητες των περιορισμών
- Οι **τιμές των βασικών μεταβλητών** δίνονται στην τελευταία στήλη του πίνακα
- Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S_1, η τιμή 400 στην S_2 και η τιμή 420 στη μεταβλητή S_3
- **Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι πάντοτε μηδέν**
- **Η πρώτη σειρά του πίνακα** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων των μεταβλητών όπως αναφέρονται στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος

Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex - Συντελεστές Μετατροπής

- Τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα **Simplex** είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος.

- Π.χ. Η στήλη του πίνακα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X_1 περιέχει τους συντελεστές του X_1 στους τρεις περιορισμούς αντίστοιχα.

- Ποια είναι η οικονομική ερμηνεία αυτών των συντελεστών;

Τα στοιχεία της στήλης X_1 καλούνται **συντελεστές μετατροπής** μεταξύ της μεταβλητής X_1 και όλων των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S_1, S_2, S_3 και ερμηνεύονται ως εξής:

Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex - Συντελεστές Μετατροπής

Για να αυξηθεί η τιμή της X_1 κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειωθούν οι τιμές των S_1, S_2, S_3 κατά 8, 4, και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη χρησιμοποιούμενες ώρες στο ξυλουργείο, στο Βαφείο και στο στιλβωτήριο κατά 8, 4 και 4 αντίστοιχα).

Η ερμηνεία αυτή επαληθεύεται εύκολα, αν αναλογισθούμε ότι για την κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο, 4 ώρες στο Βαφείο και 4 στο στιλβωτήριο.

Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε για τα στοιχεία της στήλης X_2.

Οι σειρές Cj, Zj, Cj-Zj

•Η σειρά C_j περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης

•Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ως η μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.

•Έτσι, μία μονάδα της X_1 αποφέρει στην επιχείρηση επιπλέον κέρδος 140€

•Τα στοιχεία της σειράς Z_j δηλώνουν το κατά πόσο θα μειώνονταν το συνολικό κέρδος αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα

Πώς όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους;

Οι σειρές C_j, Z_j, C_j-Z_j

Ας θεωρήσουμε τη μεταβλητή X_1.

•Για να αυξηθεί η X_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθούν η S_1 κατά 8 μονάδες, η S_2 κατά 4 μονάδες και η S_3 κατά 4 μονάδες

•Η μείωση των S_1, S_2 και S_3 δεν έχει κάποια επίπτωση στο συνολικό κέρδος διότι οι συντελεστές κέρδους των S_1, S_2 και S_3 είναι 0 (θυμηθείτε ότι οι μεταβλητές περιθωρίου δηλώνουν ώρες παραγωγής που ούτως ή άλλως είναι διαθέσιμες αλλά δεν χρησιμοποιούνται).

•Στα επόμενα βήματα της διαδικασίας **Simplex** , οι βασικές μεταβλητές θα αλλάξουν και επομένως τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{Z_j}$ δεν θα είναι μηδενικά.

•Η τελευταία σειρά του πίνακα, $\mathbf{C_j}$**-**$\mathbf{Z_j}$ είναι αυτή που δηλώνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους - μείωση κέρδους) στην περίπτωση που η αντίστοιχη μη βασική μεταβλητή του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα

Επαναληπτική διαδικασία Simplex

- Η μέθοδος **Simplex** είναι μια επαναληπτική μέθοδος

- Βασίζεται σε μία επαναλαμβανόμενη σειρά βημάτων με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα **Simplex** παράγουμε τον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση κ.ο.κ., έως ότου προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση

- Η επαναληπτική αυτή διαδικασία **περιλαμβάνει 6 βήματα**

Βήμα 1 Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης

- Ελέγχουμε αν η λύση που δίνει ο τρέχων πίνακας **Simplex** είναι η βέλτιστη
- Η λύση είναι βέλτιστη όταν όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ είναι αρνητικά ή μηδενικά **για προβλήματα μεγιστοποίησης**
- **Για προβλήματα ελαχιστοποίησης** το κριτήριο είναι όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ να είναι θετικά ή μηδενικά
- Αν η λύση είναι βέλτιστη, τότε η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί, αν όχι, εκτελούμε τα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Επιλογή νέας βασικής μεταβλητής

- Εφόσον η λύση δεν είναι βέλτιστη, επιδέχεται βελτιώσεις. Βελτίωση της λύσης σημαίνει ότι από το ακραίο σημείο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα λύση, πρέπει να μετακινηθούμε σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο
  - Αυτό απαιτεί αντικατάσταση μιας βασικής με μία από τις μη βασικές μεταβλητές.
- Επιλέγουμε εκείνη τη μη βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο θετικό στοιχείο της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ για να συμπεριληφθεί στη βάση
- Η μεταβλητή αυτή συνεισφέρει στη μεγαλύτερη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης
- Τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή την ονομάζουμε **οδηγό στήλη**

Βήμα 3 Επιλογή βασικής μεταβλητής που αντικαθίσταται

- Εφόσον μια νέα μεταβλητή "μπαίνει" στη βάση, μια άλλη θα πρέπει να "φύγει", ώστε να διατηρηθεί ίδιος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών
- Για να προσδιορίσουμε τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί:
    - Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα (ποσότητες) με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης
    - Το μικρότερο θετικό κλάσμα προσδιορίζει τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (αρνητικές τιμές αγνοούνται)
    - Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την αποκαλούμε **οδηγό σειρά**
    - Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη το ονομάζουμε **οδηγό στοιχείο**

Βήμα 4 Υπολογισμός νέων τιμών οδηγού σειράς

<u>Οι νέες τιμές υπολογίζονται με διαίρεση όλων των στοιχείων της οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο</u>

$$\boxed{\text{Νέα Οδηγός Σειρά}} = \boxed{\text{Προηγούμενη Οδηγός Σειρά}} \;/\; \boxed{\text{Οδηγό στοιχείο}}$$

Βήμα 5 Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα

Οι νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα, υπολογίζονται ως εξής:

$$\boxed{\text{Νέες Τιμές Σειράς}} = \boxed{\text{Προηγούμενες Τιμές}} - \boxed{\text{Στοιχείο Σειράς στην Οδηγό στήλη}} \times \boxed{\text{Νέα Οδηγό Σειρά}}$$

Βήμα 6 Υπολογισμός των νέων τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j

•Οι τιμές της σειράς Z_j υπολογίζονται με πολλαπλασιασμό των στοιχείων κάθε στήλης με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών των σειρών $\mathbf{C_j}$ και $\boldsymbol{Z_j}$.

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας **Simplex** στο συγκεκριμένο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ.

Βήμα 1 Όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j}$**-**$\mathbf{Z_j}$ του πρώτου πίνακα **Simplex** είναι **μεγαλύτερα ή ίσα με μηδέν**.
Επομένως, η λύση που δίνει ο πρώτος πίνακας **Simplex** δεν είναι βέλτιστη και προχωρούμε στα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση, γίνεται με βάση τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά $\mathbf{C_j}$**-**$\mathbf{Z_j}$**.**
Επιλέγουμε τη μεταβλητή X_1 γιατί έχει τιμή $\mathbf{C_j}$**-**$\mathbf{Z_j}$=140, ενώ η X_2 έχει τιμή 100.
Επομένως, η στήλη της X_1 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_1 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να εξετάσουμε ποια από τις βασικές μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 θα αντικατασταθεί από αυτή.

Υπολογίζουμε τα πηλίκα των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Για την S_1: 960 ώρες ξυλουργείου /8 ώρες ανά τραπέζι =120 τραπέζια
Για την $\mathbf{S_2}$: 400 ώρες βαφείου /4 ώρες ανά τραπέζι =**100 τραπέζια**
Για την S_3: 420 ώρες στιλβωτηρίου / 4 ώρες ανά τραπέζι =105 τραπέζια

Επομένως:

➢**Η $\mathbf{S_2}$ που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό πηλίκο, είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από τη $\mathbf{X_1}$**

➢**Η σειρά $\mathbf{S_2}$ είναι η οδηγός σειρά και το στοιχείο 4 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο**

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400 →
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140 ↑	100	0	0	0	

Βήμα 4 Αφού ορίσαμε ήδη ότι η μεταβλητή X_1 θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές του δεύτερου πίνακα **Simplex**.

Καταρχήν **θα αντικαταστήσουμε την οδηγό σειρά**.

Το οδηγό στοιχείο είναι το 4.

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4.

Άρα, η νέα οδηγός σειρά είναι:

140	X_1	4/4= 1	2/4= ½	0/4= 0	1/4= ¼	0/4= 0	400/4= 100

Ο νέος πίνακας **Simplex** θα έχει την εξής μορφή σε αυτό το σημείο της διαδικασίας:

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3						
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- η X_1 αντικατέστησε την S_2 στη βάση
- η τιμή της X_1 είναι 100 μονάδες
- ο συντελεστής κέρδους της X_1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

Βήμα 5 Απομένει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στις S_1 και S_3 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	8	8	1	0	0	960
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	8(1)	8(½)	8(0)	8(¼)	8(0)	8(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160

Βήμα 5

Νέα Σειρά S_3:

προηγούμενες τιμές σειράς S_3	4	3	0	0	1	420
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	4(1)	4(1/2)	4(0)	4(1/4)	4(0)	4(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_3	0	1	0	-1	1	20

Επομένως, ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και S_3 θα έχει την εξής μορφή:

$2^{ος}$ Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Μοναδιαίες στήλες στον πίνακα Simplex

- Ο νέος πίνακας **Simplex** περιέχει επίσης τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S_1, X_1, και S_3

- Οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να υπολογίσουμε τις νέες τιμές του πίνακα **Simplex** είχαν ακριβώς αυτό ως στόχο
  - Να μετατρέψουμε δηλαδή τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή X_1 σε μοναδιαία στήλη.

- Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στη θέση της τομής της σειράς X_1 με τη στήλη X_1

- Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και 4 αντίστοιχα και η αφαίρεση των γινομένων από τις τιμές των σειρών S_1 και S_3 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X_1.

Βήμα 5 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

- Οι τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ αντιστοιχούν στη μείωση που θα προκύψει στο κέρδος στην περίπτωση που επιλέξουμε να συμπεριληφθεί στη βάση μια από τις μη βασικές μεταβλητές. Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς $\mathbf{Z_j}$
- Η νέα λύση που προέκυψε είναι X_1=100, X_2=0, και S_1=160, S_2=0, και S_3=20.
- Δηλαδή, παραγωγή 100 τραπεζιών, καθόλου καρεκλών, με αχρησιμοποίητες 160 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο, 0 ώρες στο βαφείο και 20 ώρες στο στιλβωτήριο.

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε την περίπτωση παραγωγής και καρεκλών.

- Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της X_2 από 0 που είναι σε αυτό το σημείο της διαδικασίας, θα αυξηθεί
- Σύμφωνα με τη μεθοδολογία **Simplex**, αυτό σημαίνει ότι η X_2 θα γίνει βασική μεταβλητή, δηλαδή θα συμπεριληφθεί στη βάση (αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S_1 (X_1 ή S_3).
- Ο δεύτερος πίνακας **Simplex** μας δίνει τις εξής πληροφορίες από τις τιμές των συντελεστών μετατροπής της στήλης X_2:

Για αύξηση της τιμής της X_2 κατά μία μονάδα απαιτείται η μείωση της S_1 κατά 4, της X_1 κατά X_1 1/2 και της S_3 κατά 1. Δηλαδή, μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά μισό, και μείωση επίσης των αχρησιμοποίητων ωρών στο ξυλουργείο κατά 4 και στο στιλβωτήριο κατά 1 (δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε 4 και 1 ώρες αντίστοιχα από αυτές που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί με βάση τη λύση του 2ου πίνακα **Simplex**).

❖Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

2ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(0) = 140	4(0) +½(140) +1(0) = 70	1(0) +0(140) +0(0) = 0	-2(0) +¼(140) +1(0) = 35	1(0) +0(140) +1(0) = 0	
	C_j - Z_j	0	30	0	-35	0	

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j}$-$\mathbf{Z_j}$ προκύπτουν από αφαίρεση της σειράς $\mathbf{Z_j}$ από τη σειρά $\mathbf{C_j}$
Βλέπουμε λοιπόν ότι η αύξηση της X_2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μίας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 30.

•Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex** υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των βασικών μεταβλητών με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

•Κέρδος = 160(0) + 100(140) + 20(0)= 14000

Ο τρίτος πίνακας Simplex

Βήμα 1

Εφόσον η σειρά C_j-Z_j του δεύτερου πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικούς αριθμούς, η λύση που δίνει ο δεύτερος πίνακας Simplex δεν είναι βέλτιστη. Επομένως, θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα για να διαμορφώσουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα **Simplex**.

Βήμα 2

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X_2, διότι είναι η μόνη μεταβλητή με θετική τιμή 30 στη σειρά C_j-Z_j

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παραχθεί, το κέρδος αυξάνεται κατά 30€.

Η στήλη της X_2 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις υπάρχουσες βασικές μεταβλητές S_1, X_1 και S_3 θα αντικατασταθεί
Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης, έχουμε:

Για την S_1: 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα =40 καρέκλες
Για την X_1: 100 τραπέζια / 1/2 τραπέζια ανά καρέκλα =200 καρέκλες
Για την S_3: 20 ώρες ξυλουργείου / 1 ώρα ανά καρέκλα =20 καρέκλες
Η S_3 αντιστοιχεί στη μικρότερη θετική τιμή και επομένων είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από την X_2

Η νέα οδηγός σειρά, οδηγός στήλη και οδηγό στοιχείο έχουν ως εξής:

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20➔
	Z_j	140	70	0	35	0	14000
	$C_j - Z_j$	0	30 ↑	0	-35	0	

Βήμα 4

•Προχωρούμε στον υπολογισμό των τιμών του τρίτου πίνακα **Simplex**.

•**Καταρχήν αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά**

•**Το οδηγό στοιχείο είναι το 1**

• **Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 1**, και επομένως η νέα οδηγός σειρά παραμένει ως έχει:

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1						
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

•η X_2 αντικατέστησε την S_3 στη βάση

•η τιμή της X_2 είναι 20 μονάδες

•ο συντελεστής κέρδους της X_2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

Βήμα 5

- Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στην S_1 και την X_1
- Οι πράξεις είναι αντίστοιχες με αυτές για τον υπολογισμό του 2ου πίνακα **Simplex**

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	4(0)	4(1)	4(0)	4(-1)	4(1)	4(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	0	1	2	-4	80

Νέα Σειρά X_1:

προηγούμενες τιμές σειράς X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	1/2(0)	1/2(1)	1/2(0)	1/2(-1)	1/2(1)	1/2(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90

Ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και X_1 θα έχει την εξής μορφή:

$3^{ος}$ Πίνακας Simplex - ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Οι τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές στον τρίτο πίνακα **Simplex** είναι οι S_1, X_1, και X_2.

Βήμα 6 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j

Ο υπολογισμός των τιμών της σειράς Z_j γίνεται με πολλαπλασιασμό των συντελεστών μετατροπής κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και πρόσθεση των γινομένων ως εξής:

3ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(100) 140	0(0) 0(140) +1(100) 100	1x0) +0(140) +0(100) 0	-2(0) +¾(140) -1(100) 5	-4(0) -½(140) +1(100) 30	14600
	C_j - Z_j	0	0	0	-5	-30	

- **Οι τιμές** της σειράς C_j-Z_j προκύπτουν από **αφαίρεση** της σειράς Z_j από τη σειρά C_j.
- Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex**, υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών
- **Κέρδος = 90(140) + 20(100) = 14600**

Κριτήριο βελτιστοποίησης

- Ο παραπάνω τρίτος πίνακας **Simplex** είναι και ο τελικός πίνακας **Simplex** για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ
- Παρατηρούμε ότι η σειρά **C_j-Z_j δεν περιέχει θετικά στοιχεία**, συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.
- Η βέλτιστη λύση σύμφωνα με τον τελικό πίνακα **Simplex** είναι:

X_1 = 90 τραπέζια

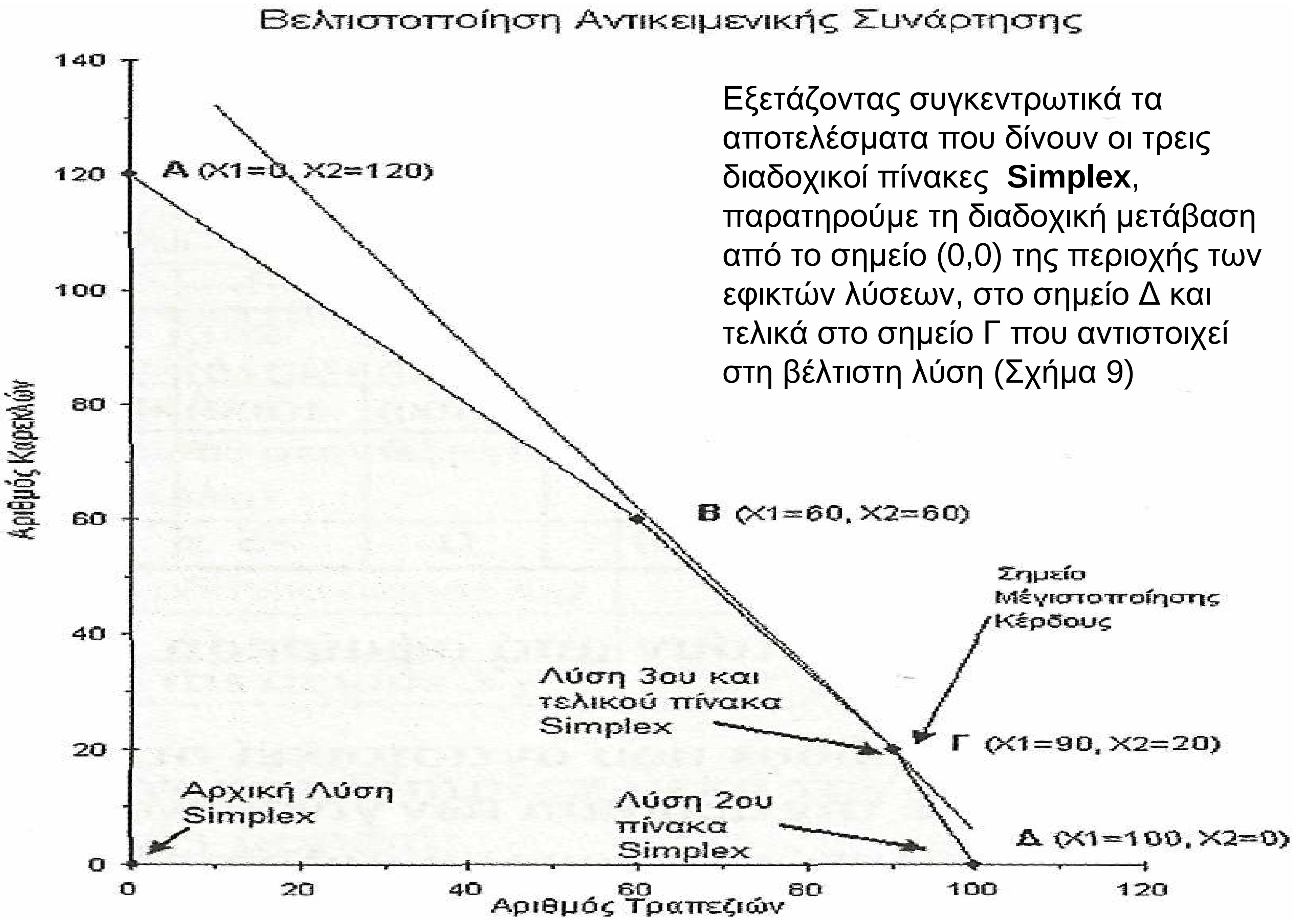
X_2 = 20 καρέκλες

S_1 = 80 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο

S_2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

S_3 = 0 ώρες διαθέσιμες στο στιλβωτήριο

•**Αυτός ο συνδυασμός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, το οποίο ανέρχεται σε 14.600€.**



Εξετάζοντας συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που δίνουν οι τρεις διαδοχικοί πίνακες **Simplex**, παρατηρούμε τη διαδοχική μετάβαση από το σημείο (0,0) της περιοχής των εφικτών λύσεων, στο σημείο Δ και τελικά στο σημείο Γ που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση (Σχήμα 9)

Οι λύσεις των διαδοχικών βημάτων της μεθόδου Simplex

Αρχικός Πίνακας: *Σημείο (0,0) – αρχή των αξόνων*

Παραγωγή: $X_1 = 0$ τραπέζια $X_2 = 0$ καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: $S_1 = 960$ μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

$S_2 = 400$ διαθέσιμες ώρες βαφείου

$S_3 = 420$ διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 0€

<u>Δεύτερος Πίνακας:</u> *Σημείο Δ(100,0)*

Παραγωγή: X_1 = 100 τραπέζια X_2 = 0 καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: S_1 = 160 μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

S_3 = 20 διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.000€

<u>Τρίτος Πίνακας (τελικός):</u> *Σημείο Γ(90,20)*

Παραγωγή: X_1 = 90 τραπέζια X_2 = 20 καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: S_1 = 80 μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

S_3 = 0 διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.600€

Οικονομική Ερμηνεία των αποτελεσμάτων της μεθόδου Simplex

•Το παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ από το στάδιο της διατύπωσης του επιχειρησιακού προβλήματος έως την επίλυση του

Δεδομένα Επιχειρησιακού Προβλήματος – Παράμετροι

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας: X_1 (τραπέζια)	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας: X_2 (καρέκλες)	Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100€	

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεγιστοποίηση $140X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

(Ξ) $8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960$

(Β) $4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400$

(Σ) $4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0$

Βέλτιστη λύση Μεθόδου Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

Φυσική Ερμηνεία Βέλτιστης Λύσης

Παραγωγή	Διαθέσιμοι Πόροι
$X_1 = 90$ τραπέζια	$S_1 = 80$ μη χρησιμοποιηθείσες ώρες ξυλουργείου
$X_2 = 20$ καρέκλες	$S_2 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες βαφείου
	$S_3 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες στιλβωτηρίου
Κέρδος	14.600€

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί (Β) και (Σ) του προβλήματος, που αντιστοιχούν στις ώρες βαφείου και στιλβωτηρίου καλούνται **δεσμευτικοί περιορισμοί** διότι είναι αυτοί που καθορίζουν τις τιμές των μεταβλητών και η τομή τους προσδιορίζει το σημείο της βέλτιστης λύσης (Σχήμα 9)
- Αντίθετα, ο περιορισμός (Ξ) είναι μη **δεσμευτικός** δεδομένου ότι δεν προσδιορίζει τη βέλτιστη λύση (η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό των ωρών ξυλουργείου βρίσκεται πάνω από το βέλτιστο σημείο Γ - σχήμα 9)
- Οι μη δεσμευτικοί περιορισμοί δεν περιορίζουν τη βέλτιστη λύση με την έννοια ότι ακόμα και αν δεν υπήρχαν, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε
- Οι μεταβλητές περιθωρίου που αντιστοιχούν στους δεσμευτικούς περιορισμούς έχουν την τιμή μηδέν, ενώ για τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς οι αντίστοιχες μεταβλητές περιθωρίου έχουν θετικές τιμές.

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

•Εφόσον λοιπόν στα τμήματα βαφείου και στιλβωτηρίου έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι διαθέσιμες ώρες, αν στα τμήματα αυτά προστεθεί ή αφαιρεθεί έστω και μία ώρα εργασία», η βέλτιστη λύση θα άλλαζε

•Αντίθετα, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε αν είχαμε μία επιπλέον ώρα ή μία ώρα λιγότερη στο τμήμα ξυλουργείου, διότι ήδη περισσεύουν 80 ώρες, οπότε αν μεν είχαμε 1 ώρα λιγότερη θα περίσσευαν 79 ώρες και αν είχαμε 1 ώρα περισσότερη θα περίσσευαν 81 ώρες

•Επομένως, η αύξηση των ωρών στο τμήμα ξυλουργείου δεν δικαιολογείται με οικονομικούς όρους

• Θα μπορούσαμε μάλιστα να τις ελαττώσουμε έως και 80 χωρίς αυτό να έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη παραγωγή και στα κέρδη

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ελαχιστοποίηση κόστους διατροφής

Η επιχείρηση ζωοτροφών ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ εξασφάλισε μια ειδική παραγγελία από έναν πελάτη της για την παρασκευή 1.000 κιλών ζωοτροφής, η οποία θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 30% πρωτεΐνες και 40% υδατάνθρακες. Για την παραγωγή της συγκεκριμένης παρτίδας, ο υπεύθυνος παραγωγής της εταιρείας ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ αποφάσισε να αναμείξει μια εισαγόμενη πλούσια σε θρεπτικά υλικά τροφή, με ιχθυάλευρο και δημητριακά, ώστε να μειώσει το κόστος, ικανοποιώντας όμως τις ελάχιστες διαιτητικές απαιτήσεις του πελάτη σε περιεκτικότητα πρωτεϊνών και υδατανθράκων.
Η εισαγόμενη τροφή έχει περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες, και κοστίζει 1 ευρώ το κιλό. Το ιχθυάλευρο έχει περιεκτικότητα 25% πρωτεΐνες και 20% υδατάνθρακες και κοστίζει 0,7 ευρώ το κιλό, ενώ τα δημητριακά με περιεκτικότητα 20% και 40%, αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες έχουν κόστος 0,8 ευρώ το κιλό.

Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθούν οι ποσότητες που θα πρέπει να αναμείξει ο υπεύθυνος παραγωγής ώστε να επιτύχει το μικρότερο δυνατό κόστος, ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις ελάχιστες απαιτήσεις του πελάτη σε θρεπτικά υλικά.

	Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες (%)	Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες (%)	Κόστος (€/κιλό)
Εισαγόμενη Τροφή	40%	40%	1
Ιχθυάλευρο	25%	20%	0,7
Δημητριακά	20%	40%	0,8

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Μεταβλητές του Προβλήματος:

•Ο υπεύθυνος παραγωγής πρέπει να προσδιορίσει τις ποσότητες από κάθε υλικό που θα πρέπει να αναμείξει

•Ορίζουμε τις μεταβλητές:

- •X_1 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Εισαγόμενης Τροφής
- •X_2 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Ιχθυάλευρου
- •X_3 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Δημητριακών

Αντικειμενική Συνάρτηση

✓Στόχος του υπευθύνου παραγωγής είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των 1000 κιλών ζωοτροφής

•Με βάση τις τιμές ανά κιλό των ποσοτήτων X_1, X_2 και X_3

- **το συνολικό κόστος των 1000 κιλών** της τροφής είναι $1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3$

•**Η αντικειμενική συνάρτηση** διατυπώνεται ως:

Ελαχιστοποίηση Κόστους: $\mathbf{1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3}$

Περιορισμοί

•Η συνολική ποσότητα ζωοτροφής που θα παρασκευαστεί πρέπει να είναι 1000 κιλά

Επομένως:

•Συνολική ποσότητα παραγωγής: $X_1 + X_2 + X_3 = 1000$

•Η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών που θα περιέχεται στη ζωοτροφή πρέπει να αποτελεί τουλάχιστον το 30% της συνολικής ποσότητας της τροφής

•Αφού θα παραχθούν ακριβώς 1000 κιλά ζωοτροφής, η ποσότητα των πρωτεϊνών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 300 κιλά

Περιορισμοί

- Κάθε κιλό εισαγομένης τροφής περιέχει 40% πρωτεΐνες, επομένως τα X_1 κιλά που θα χρησιμοποιηθούν περιέχουν $0,40X_1$ κιλά πρωτεϊνών
- αν λάβουμε υπόψη τις αντίστοιχες περιεκτικότητες σε πρωτεΐνες του ιχθυάλευρου και των δημητριακών από τον πίνακα, έχουμε:

    - πρωτεΐνες σε X_2 κιλά ιχθυάλευρου = $0,25X_2$
    - πρωτεΐνες σε X_3 κιλά δημητριακών = $0,20X_3$

- Επομένως, **η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών** που θα περιέχεται στο μείγμα θα είναι $0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3$ κιλά

- Η μαθηματική διατύπωση του περιορισμού είναι:

Περιεκτικότητα σε Πρωτεΐνες (Kgr): $0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 \geq 300$

Περιεκτικότητα σε Υδατάνθρακες (Kgr): $0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 \geq 400$

Το μαθηματικό μοντέλο ΓΠ του προβλήματος

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0{,}40X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 \geq 300$
(Υδατάνθρακες):	$0{,}40X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}40X_3 \geq 400$
	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Μεταβλητές πλεονασμού σε περιορισμούς τύπου ≥

✓Οι περιορισμοί του προβλήματος ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ είναι διαφορετικού τύπου από τους αντίστοιχους του παραδείγματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

- ο πρώτος περιορισμός είναι περιορισμός ισότητας
- οι δύο τελευταίοι περιορισμοί είναι τύπου πλεονασμού ≥ (μεγαλύτερου ή ίσου), θέτουν δηλαδή ένα ελάχιστο όριο που πρέπει να ικανοποιεί η λύση του προβλήματος

Το δεξιό μέλος των περιορισμών

Αλγεβρικά κάθε περιορισμός τύπου ≥ μπορεί να μετατραπεί σε περιορισμό τύπου ≤ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας με -1. Η μετατροπή αυτή δεν είναι δυνατό να γίνει στην εφαρμογή της μεθόδου Simplex.

Η εφαρμογή ths μεθόδου Simplex απαιτεί να υπάρχουν θετικές ποσότητες στο δεξιό μέλος κάθε περιορισμού (οι τιμές των δεξιών μελών των περιορισμών δίνουν τη λύση στον αρχικό πίνακα Simplex, και ότι οι εφικτές λύσεις είναι μη αρνητικές)

✓Ας θεωρήσουμε τον περιορισμό των πρωτεϊνών

•Η ποσότητα πρωτεϊνών που θα περιέχεται στο μείγμα θα είναι είτε ακριβώς 300 κιλά ή περισσότερη

•Έστω S_2 η ποσότητα πρωτεϊνών που υπερβαίνει το ελάχιστο όριο των 300 κιλών (πλεονάζουσα ποσότητα)

- •Αν η ποσότητα αυτή αφαιρεθεί από το αριστερό μέλος της ανισότητας, τότε θα έχουμε ακριβώς 300 κιλά πρωτεϊνών

Όπως συνέβη και με τον ορισμό μεταβλητών περιθωρίου στις ανισότητες τύπου ≤ που προστίθενται στο αριστερό μέλος της ανισότητας, για περιορισμούς ανισοτήτων τύπου ≥ ορίζουμε **μεταβλητές πλεονασμού** οι οποίες αφαιρούνται από το αριστερό μέλος της ανισότητας για να μετατραπεί αυτή σε ισότητα

•Με τη χρήση της μεταβλητής πλεονασμού, η δεύτερη ανισότητα μετατρέπεται σε:

$0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 - S_2 = 300$

Η έννοια της μεταβλητής πλεονασμού

✓Η έννοια της μεταβλητής πλεονασμού είναι αντίστοιχη με αυτή που εξηγήθηκε στους περιορισμούς τύπου ≤

•αν η τιμή της S_2 είναι μηδενική, τότε η ποσότητα πρωτεϊνών είναι αυτή που ορίζεται από τον περιορισμό, δηλαδή η ελάχιστη επιτρεπόμενη

•αν αντίθετα είναι θετική, τότε στο συνολικό μείγμα της τροφής υπάρχει πλεόνασμα πρωτεϊνών, δηλαδή ποσότητα μεγαλύτερη από τα 300 κιλά όπως ορίζεται από τις ελάχιστες διατροφικές απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούνται

•αν συμβολίσουμε με S_3 την πλεονάζουσα ποσότητα υδατανθράκων που μπορεί να περιέχεται στα 1000 κιλά της τροφής (πάνω από το ελάχιστο όριο των 400 κιλών), ο τρίτος περιορισμός του προβλήματος διαμορφώνεται σε:

$$0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 - S_3 = 400$$

Η διατύπωση του προβλήματος ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ σε κανονική μορφή ΓΠ, με τη χρήση των μεταβλητών πλεονασμού

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 - S_2 = 300$
(Υδατάνθρακες):	$0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 - S_3 = 400$
$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3 \geq 0$	

✓Σε περιορισμούς του τύπου -μεγαλύτερο ή ίσο- οι μεταβλητές πλεονασμού εκφράζουν τις ποσότητες που είναι πέραν των ελάχιστων απαιτήσεων των περιορισμών

Τεχνητές (μη πραγματικές) Μεταβλητές

Η μεθοδολογία της μεθόδου Simplex που αναπτύξαμε στις προηγούμενες ενότητες, βασίζεται σε μια επαναληπτική μέθοδο αναζήτησης τής βέλτιστης λύσης

Ως αρχική λύση εκκίνησης της μεθόδου Simplex θεωρήσαμε την απλούστερη λύση που προέκυπτε όταν θέτουμε όλες τις αρχικές μεταβλητές του προβλήματος (X_1, X_2, X_3) ίσες με μηδέν

•Αν και σε αυτό το πρόβλημα ακολουθηθεί η ίδια προσέγγιση και θέσουμε $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ και $X_3 = 0$, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τεχνικά προβλήματα

•Καταρχήν ο πρώτος περιορισμός είναι αδύνατος διότι προκύπτει το αποτέλεσμα $0 = 1000$

Αυτό συμβαίνει διότι ο πρώτος περιορισμός στην αρχική του μορφή ήταν ένας περιορισμός ισότητας και επομένως, δεν χρησιμοποιήθηκε μεταβλητή περιθωρίου ή μεταβλητή πλεονασμού.

Στους δύο επόμενους περιορισμούς προκύπτουν οι λύσεις $S_2 = -300$ και $S_3 = -400$, οι οποίες δεν είναι αποδεκτές διότι έχουν αρνητικές τιμές

✓Για να ξεπερασθεί το πρόβλημα αυτό και να μπορέσουμε να έχουμε μία αρχική εφικτή λύση για τη μέθοδο Simplex, ώστε να ακολουθηθεί η διαδικασία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στα προβλήματα όπου όλοι οι περιορισμοί ήταν του τύπου ≤, κάνουμε το εξής τέχνασμα:

✓Για κάθε περιορισμό ο οποίος είναι είτε ισότητα είτε ανισότητα τύπου ≥, εισάγουμε μία **τεχνητή μεταβλητή**

✓π.χ, **ο πρώτος περιορισμός με την εισαγωγή μιας τεχνητής μεταβλητής** θα γραφτεί ως εξής: $\mathbf{X_1+X_2 +X_3 \quad + A_1 =1000}$

•Η A_1 είναι μια τεχνητή μεταβλητή

•Τι σημαίνει αυτό; Δεν υπάρχει φυσική ερμηνεία της μεταβλητής αυτής όπως υπάρχει για τις αρχικές μεταβλητές X_1, X_2, X_3 και για τις μεταβλητές πλεονασμού S_2 και S_3

- Δεύτερον, εφόσον η A_1 δεν αντιπροσωπεύει καμία φυσική ποσότητα, η τιμή της θα πρέπει τελικά να είναι 0

- Πώς μπορεί να υποχρεώσουμε την A_1 να λάβει την τιμή μηδέν μέσα από τη διαδικασία Simplex;

    - αν θεωρήσουμε ότι το αντίστοιχο κόστος της μεταβλητής A_1 είναι πάρα πολύ μεγάλο, και επομένως εφόσον στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, η διαδικασία Simplex θα οδηγήσει από μόνη της την τιμή της A_1 στο μηδέν.

    - συμβολικά θα θεωρήσουμε ότι το κόστος κάθε μονάδος της τεχνητής μεταβλητής A_1, όπως και κάθε τεχνητής μεταβλητής, είναι ίσο με M (**όπου M ένας "πολύ μεγάλος" αριθμός**)

Το πρόβλημα ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ σε κανονική μορφή ΓΠ μετά την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών στους περιορισμούς του προβλήματος και στην αντικειμενική συνάρτηση

Ελαχιστοποίηση της $1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$

Υπό τους περιορισμούς:

(Ποσότητα): $X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 1000$

(Πρωτεΐνες): $0{,}40X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 - S_2 + A_2 = 300$

(Υδατάνθρακες): $0{,}40X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}40X_3 - S_3 + A_3 = 400$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

Ο πρώτος πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό είναι ο Πίνακας Ε.1

•οι βασικές μεταβλητές στον αρχικό πίνακα Simplex είναι οι τεχνητές μεταβλητές.

•οι τιμές όλων των άλλων μεταβλητών στον αρχικό πίνακα είναι μηδέν

•Η λύση που αντιστοιχεί στον πρώτο αυτό πίνακα είναι A_1=1000, A_2=300 και A_3=400

•Το κόστος αυτής της λύσης είναι 1700M.

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	*1000/1=1000*
M	A_2	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	300	*300/0,4=750* ➜
M	A_3	0,4	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	400	*400/0,4=1000*
	Z_j	1,8M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M		1700M
	C_j - Z_j	1-1,8M ↑	0,7 -1,45M	0,8 -1,6M	M	M	0	0	0		

Πίνακας Ε.1

•Η σειρά Z_j δηλώνει τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μία μη βασική μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα

π.χ στήλη X_1:

• Αν η τιμή της X_1 αυξηθεί κατά μία μονάδα, οι τιμές των A_1, A_2 και A_3 θα μειωθούν κατά 1, 0,4 και 0,4 μονάδες αντίστοιχα

• Επειδή οι συντελεστές κόστους των A_1, A_2 και A_3 έχουν όλοι την τιμή Μ, η συνολική μείωση κόστους όταν η X_1 αυξηθεί κατά 1 μονάδα είναι 1Μ+0,4Μ+0,4Μ = 1,8Μ, όπως παρατηρούμε στη σειρά Z_j για τη μεταβλητή X_1.

•Επομένως, στη σειρά C_j - Z_j η τιμή της X_1 μεταβλητής θα είναι η διαφορά της τιμής της C_1(1) μείον την τιμή της Z_1 (1,8Μ)

• Αν η X_1 αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το κόστος θα αυξηθεί κατά 1 - 1,8Μ.

•Επειδή ο Μ είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός η ποσότητα 1 - 1,8Μ είναι αρνητικός αριθμός, το οποίο σημαίνει ότι αύξηση της X_1 κατά 1 μονάδα θα έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του κόστους

•

•Το ίδιο συμβαίνει και με τις τιμές των μεταβλητών X_2 και X_3 στη σειρά C_j - Z_j

•(βλέπε Πίνακα Ε.1). Μεταξύ όλων αυτών των αρνητικών τιμών η μικρότερη είναι αυτή που έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του Μ, δηλαδή η τιμή που αντιστοιχεί στην X_1

Επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση

✓Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση στα προβλήματα ελαχιστοποίηση γίνεται με παρόμοιο τρόπο

✓Από τη σειρά C_j - Z_j επιλέγουμε τη μεταβλητή εκείνη με τη μικρότερη (αρνητική τιμή C_j - Z_j)

✓Η επιλογή αυτής της μεταβλητής θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη μείωση του κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης

✓Στον αρχικό πίνακα Simplex (ΠίνακαςΕ.1) η μεταβλητή με το μικρότερη τιμή στη σειρά C_j - Z_j είναι η X_1, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του Μ.

Η επιλογή της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί από τη X_1 πραγματοποιείται με τους κανόνες του βήματος 3 της μεθόδου Simplex, όπως και στο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

✓Επιλέγεται, δηλαδή, η μεταβλητή με το μικρότερο πηλίκο τιμών της στήλης B_1 προς τις τιμές της οδηγού στήλης (στην προκειμένη περίπτωση της X_1)

✓Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μεταβλητή που αντικαθίσταται είναι η A_2

Ο νέος πίνακας Simplex που προκύπτει μετά την αντικατάσταση

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,375	0,5	2,5	0	1		0	250	*250/2,5=100*
1	X_1	1	0,625	0,5	-2,5	0	0		0	750	
M	A_3	0	-0,05	0,2	1	-1	0		1	100	*100/1=100* $\rightarrow$
	Z_j	1	0,625 +0,325M	0,5 +0,7M	-2,5 +3,5M	-M	M		M		
	$C_j - Z_j$	0	0,075 -0,325M	0,3 -0,7M	2,5 -3,5M $\uparrow$	M	0		0		

Πίνακας Ε.2

✓Επειδή η τεχνητή μεταβλητή A_2 δεν συμπεριλαμβάνεται στη βάση μετά την αντικατάσταση της με τη X_1, και δεν υπάρχει περίπτωση να επανέλθει λόγω του μεγάλου συντελεστή κόστους (M), δεν είναι ανάγκη να συνεχίσουμε με τους υπολογισμούς των τιμών για τη στήλη της A_2, ή για οποιαδήποτε άλλη στήλη τεχνητής μεταβλητής που δεν περιλαμβάνεται στις βασικές μεταβλητές

•Στο δεύτερο πίνακα Simplex Ε.2 παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές X_2, X_3 και S_2, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά C_j - Z_j και επιλέγουμε τη μεταβλητή S_2 διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του Μ
•Η μεταβλητή S_2 θα αντικαταστήσει την A_3.
•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τρίτος πίνακας Simplex (πίνακας Ε.3).

Επιλογή της βασικής μεταβλητής που "φεύγει" από τη βάση

•Οι βασικές μεταβλητές με αρνητική τιμή στην οδηγό στήλη δεν λαμβάνονται υπ' όψη στη επιλογή της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί
•Έτσι στον πίνακα Ε.2 δεν υπολογίζεται το πηλίκο της δεύτερης σειράς (μεταβλητή X_1), διότι η αντίστοιχη τιμή στην οδηγό στήλη είναι -2,5. Η εξήγηση για τον παραπάνω κανόνα προκύπτει από την ερμηνεία των συντελεστών μετατροπής
•Εφόσον η τιμή της οδηγού στήλης (συντελεστής μετατροπής) είναι αρνητική, κάθε αύξηση στη μεταβλητή που επιλέχθηκε για να γίνει βασική (S_2 στον πίνακα Ε.2) αυξάνει επίσης και την τιμή της βασικής μεταβλητής (X_1). Επομένως, δεν τίθεται θέμα άνω ορίου στην τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση
•Αν δύο ή περισσότερα πηλίκα τιμών είναι ίσα, τότε επιλέγεται μία από τις αντίστοιχες μεταβλητές αυθαίρετα
•Στον πίνακα Ε.2 τα πηλίκα που αντιστοιχούν στις μεταβλητές A_1 και A_3 είναι ίσα και επιλεγούμε αυθαίρετα την Α3 για να φύγει από τη βάση
•Σε αυτή την περίπτωση, οι τιμές των άλλων βασικών μεταβλητών με τα ίδια πηλίκα στον επόμενο πίνακα Simplex θα είναι μηδενικές (βλέπε τιμή της A_1 στον πίνακα Ε.3)

(Πίνακας Ε.3) 3ος Πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,5	0	0	2,5	1			0	0/2,5=0 →
1	X_1	1	0,5	1	0	-2,5	0			1000	
0	S_2	0	-0,05	0,2	1	-1	0			100	
	Z_j	10	0,5 -0,5M	1	0	-2,5 +2,5M	M				
	C_j - Z_j	0	0,2 +0,5M	-0,2	0	2,5 -2,5M ↑	0				

•Στον τρίτο πίνακα Simplex Ε.3 παρατηρούμε ότι δύο μεταβλητές, οι X_3 και S_3, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j – Z_j$

• Επιλέγουμε τη μεταβλητή S_3 διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

•Στην οδηγό στήλη υπάρχει μόνο ένα θετικό στοιχείο αυτό της A_1.

•Επομένως, η μεταβλητή S_3 θα αντικαταστήσει την A_1

•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τέταρτος πίνακας Simplex (πίνακας Ε.4)

(Πίνακας Ε.4) 4ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0	S_3	0	0,2	0	0	1				0	0/0,2=0 →
1	X_1	1	1	1	0	0				1000	1000/1=1000
0	S_2	0	0,15	0,2	1	0				100	100/0,15=6667
	Z_j	1	1	1	0	0					
	$C_j - Z_j$	0	-0,3 ↑	-0,2							

•Στον τέταρτο πίνακα Simplex δεν υπάρχουν πλέον τεχνητές μεταβλητές

•Οι αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j - Z_j$ δηλώνουν ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι βέλτιστη

•Σύμφωνα με τους κανόνες αντικατάστασης βασικών με μη βασικές μεταβλητές, η μεταβλητή X_2 είναι αυτή που εισέρχεται στη βάση στη θέση της S_3

(Πίνακας Ε.5) 5ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0,7	X_2	0	1	0	0	5				0	
1	X_1	1	0	1	0	-5				1000	1000/1=1000
0	S_2	0	0	0,2	1	-0,75				100	100/0,2=500 →
	Z_j	1	0,7	1	0	-1,5					
	$C_j - Z_j$	0	0	-0,2 ↑	0	1,5					

•Στον πέμπτο πίνακα Simplex υπάρχει μία αρνητική τιμή στη σειρά $C_j - Z_j$ αυτή που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X_3.

•Έτσι η μεταβλητή X_3 εισέρχεται στη βάση και αντικαθιστά τη μεταβλητή S_2, όπως φαίνεται στον πίνακα Ε.5

• Ο έκτος και τελικός πίνακας Simplex της ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ δίνεται στον πίνακα Ε.6

Πίνακας Ε.6

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i
0,7	X_2	0	1	0	0	5				0
1	X_1	1	0	0	-5	-1,25				500
0	X_3	0	0	1	5	-3,75				500
	Z_j	1	0,7	0,8	-1	-0,75				
	$C_j - Z_j$	0	0	0	1	0,75				

Η βέλτιστη λύση που προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος για το πρόβλημα της επιχείρησης ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ είναι η εξής:

Ποσότητες (Μεταβλητές):

Ποσότητα Εισαγόμενης Τροφής (X_1)	*500 κιλά*
Ποσότητα Ιχθυάλευρου (X_2)	*0 κιλά*
Ποσότητα Δημητριακών (X_3)	*500 κιλά*

Αντικειμενική Συνάρτηση:

Συνολικό κόστος	*500(1) + 500(0,8) = 900€*

Περιορισμοί:

Συνολική Ποσότητα:	*1000 κιλά - δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες ($S_2 = 0$):	*300 κιλά (30%) - δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες ($S_3 = 0$):	*400 κιλά (40%) - δεσμευτικός περιορισμός*

Δηλαδή για την παραγωγή των 1000 κιλών της ζωοτροφής, ο υπεύθυνος της παραγωγής θα πρέπει να αναμείξει 500 κιλά εισαγόμενης τροφής με 500 κιλά δημητριακών. Ο συνδυασμός αυτός ικανοποιεί τις απαιτήσεις σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες και ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Προβλήματα με Μη Εφικτές Λύσεις

✓Σε μερικές περιπτώσεις, ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι δυνατό να μην έχει εφικτές λύσεις, δηλαδή το πρόβλημα να είναι αδύνατο να επιλυθεί

✓Η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους:

✓Πρώτο, διότι όντως μπορεί να μην υπάρχει εφικτή λύση στο πρόβλημα που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Δηλαδή οι απαιτήσει που διατυπώνονται μέσω των περιορισμών είναι αντικρουόμενες και δεν μπορούν να ικανοποιούνται όλες ταυτόχρονα. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε τη δυνατότητα **"χαλάρωσης"** κάποιων περιορισμών, εφόσον βέβαια αυτό είναι δυνατόν

✓ Ένας δεύτερος λόγος που μπορεί να οδηγήσει σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που να μην έχει λύση, είναι η λανθασμένη διατύπωση είτε των περιορισμών του προβλήματος είτε των δεδομένων του

Παράδειγμα προβλήματος ΓΠ με μη εφικτές λύσεις

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της επιχείρησης ζωοτροφών ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ της προηγούμενης ενότητας, και ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις του πελάτη για πρωτεΐνες και υδατάνθρακες στο παραγόμενο μείγμα ήταν 30% και 50% αντίστοιχα.

Αν θυμηθούμε τα δεδομένα του προβλήματος:

τα τρία συστατικά που επρόκειτο να αναμειχθούν ήταν:
•εισαγόμενη τροφή με περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες
•ιχθυάλευρο με περιεκτικότητα 25% πρωτεΐνες και 20% υδατάνθρακες
•δημητριακά με περιεκτικότητα 20% και 40% αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες.

Είναι προφανές ότι με οποιοδήποτε τρόπο και σε οποιαδήποτε αναλογία αναμειχθούν τα τρία αυτά συστατικά, το μείγμα δεν είναι δυνατό να έχει περιεκτικότητα 50% σε υδατάνθρακες, αφού όλα τα συστατικά έχουν αντίστοιχη περιεκτικότητα το πολύ 40%.

✓Επομένως, **το ζητούμενο είναι αδύνατο**

✓Η διατύπωση του προβλήματος της ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ με αυξημένες απαιτήσεις σε περιεκτικότητα υδατανθράκων σε μοντέλο ΓΠ είναι ίδια με αυτή που διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, με μόνη διαφορά την αύξηση της ποσότητας του δεξιού μέλους του περιορισμού των υδατανθράκων από 400 σε 500

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 \geq 300$
(Υδατάνθρακες):	$0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 \geq 500$
	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Αφού προσθέσουμε τις μεταβλητές πλεονασμού και τις τεχνητές μεταβλητές ο πρώτος πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό διαμορφώνεται ακολούθως:

Αρχικός πίνακας Simplex - μη εφικτές λύσεις

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	*1000/1=1000*
M	A_2	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	300	*300/0,4=750* →
M	A_3	0,4	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	500	*400/0,4=1000*
	Z_j	1,8M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M		1700M
	C_j - Z_j	1-1,8M ↑	0,7 -1,45M	0,8 -1,6M	M	M	0	0	0		

Στον αρχικό πίνακα Simplex η μεταβλητή με τη μικρότερη τιμή στη σειρά $C_j – Z_j$ είναι η X_1, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

✓Η βασική μεταβλητή που θα αντικατασταθεί από τη X_1 είναι η A_2 και ο επόμενος πίνακας Simplex δίνεται στον επόμενο πίνακα (**2ος πίνακας Simplex**)

✓(**2ος πίνακας Simplex**)

Συντ. Κόστους											
C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,375	0,5	2,5	0	1		0	250	250/2,5=100 →
1	X_1	1	0,625	0,5	-2,5	0	0		0	750	
M	A_3	0	-0,05	0,2	1	-1	0		1	200	200/1=100
	Z_j	10	0,625 +0,325M	0,5 +0,7M	-2,5 +3,5M	-M	M		M		
	C_j - Z_j	0	0,075 -0,325M	0,3 -0,7M	2,5 -3,5M ↑	M	0		0		

Στο δεύτερο πίνακα Simplex παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές X_2, X_3 και S_2, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j – Z_j$ και επιλέγουμε τη μεταβλητή S_2 για τη βάση, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

•Η μεταβλητή που αντικαθίσταται από τη S_2 είναι η A_3, διότι έχει το μικρότερο πηλίκο τιμών της Bi προς τις τιμές της οδηγού στήλης

•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τρίτος πίνακας Simplex

•3ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j → ↓		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0	S_2	0	0,15	0,2	1	0			0	100	*100/0,2=500* →
1	X_1	1	1	1	0	0			0	1000	*1000/1=1000*
M	A_3	0	-0,2	0	0	-1			1	100	
	Z_j	1	1 -0,2M	1	0	-M			M		
	C_j - Z_j	0	-1 +0,2M	-0,2 ↑	0	M			0		

Εκτελώντας ένα ακόμα βήμα του αλγορίθμου **Simplex** με **αντικατάσταση της μεταβλητής S_2 από τη X_3 που είναι η μόνη με αρνητικό συντελεστή στη σειρά C_j – Z_j** (η ποσότητα -1+2M είναι θετική επειδή το M συμβολίζει έναν πολύ μεγάλο θετικό αριθμό), παίρνουμε τον **4ο πίνακα:**

Συντ. Κόστους C_j → ↓		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα
		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i
0	X_3	0	0,75	1	5	0			0	500
1	X_1	1	0,25	0	-5	0			0	500
M	A_3	0	-0,2	0	0	-1			1	100
	Z_j	1	0,25-0,2M	0	-5	-M			M	
	C_j - Z_j	0	-0,25+2M	0,8	5	M			0	

✓Όπως παρατηρούμε στον 4ο πίνακα, όλα τα στοιχεία της σειράς **C_j – Z_j** είναι μη αρνητικά, επομένως ο 4ος πίνακας ικανοποιεί τη συνθήκη βελτιστοποίησης της αντικειμενικήw συνάρτησης

✓**<u>Η υποτιθέμενη όμως βέλτιστη λύση περιλαμβάνει και τεχνητές μεταβλητές, συγκεκριμένα την A_3, η οποία δεν έχει καμία φυσική ερμηνεία</u>**

Είναι η λύση που προέκυψε βέλτιστη;

✓Η απάντηση είναι όχι

✓Από μαθηματικής πλευράς, τα βήματα του αλγόριθμου Simplex έχουν ολοκληρωθεί

✓ Αν δούμε όμως προσεκτικά τη λύση που δίνει ο τέταρτος και τελικός πίνακας Simplex θα διαπιστώσουμε ότι μία από τις τεχνητές μεταβλητές, η A_3 συγκεκριμένα, παραμένει στη βάση, και έχει τιμή 100

✓Η συγκεκριμένη μεταβλητή, όπως και όλες οι τεχνητές μεταβλητές, έπρεπε να έχει τιμή μηδέν, διότι όπως έχουμε εξηγήσει, δεν έχει καμία φυσική ερμηνεία και έχει χρησιμοποιηθεί προσωρινά για να διευκολυνθεί η δημιουργία του πρώτου πίνακα Simplex

Διαπίστωση Μη - Εφικτών Λύσεων

✓Ε<u>φόσον υπάρχει μία τουλάχιστον τεχνητή μεταβλητή με μη μηδενική τιμή στον τελικό πίνακα, ο αλγόριθμος Simplex κατέληξε σε μία τελική λύση η οποία δεν είναι καν εφικτή</u>

Προβλήματα με Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

•Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού προσδιορίζεται από τις τιμές των βασικών μεταβλητών στον τελικό πίνακα Simplex

•Στα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα, ο τελικός πίνακας Simplex έδινε είτε μία και μοναδική βέλτιστη λύση ή καμία λύση

•Υπάρχει όμως περίπτωση σε κάποια προβλήματα ΓΠ να έχουμε περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις

- •Δηλαδή, με διαφορετικές τιμές των μεταβλητών του προβλήματος να έχουμε την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Παράδειγμα προβλήματος ΓΠ με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- Ας υποθέσουμε ότι το κέρδος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ για τα τραπέζια και τις καρέκλες που κατασκευάζει είναι 140 και 105 ευρώ αντίστοιχα (αντί των αρχικών τιμών 140 και 100 ευρώ)
- Ας υποθέσουμε επίσης, ότι οι συντελεστές παραγωγής παραμένουν ίδιοι σε όλα τα τμήματα ξυλουργείου, Βαφείου και Στιλβωτηρίου
- Ο τελικός πίνακας Simplex του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ ήταν:

Συντ. Κόστους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$3/4$	$-1/2$	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

✓Η αλλαγή του συντελεστή κέρδους της μεταβλητής X_2 από 100 σε 105 θα οδηγήσει στις εξής αλλαγές στους υπολογισμούς της σειράς **Z_j**

Συντ. Κόστους C_j →		140	105	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$3/4$	$-1/2$	90
105	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(105) 140	4(0) +0(140) +1(105) 105	1(0) +0(140) +0(105) 0	-2(0) +3/4(140) -1(105) 0	-4(0) -1/2(140) +1(105) 35	14700
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	-35	

Διαπίστωση Μη-Μοναδικής Βέλτιστης Λύσης

•Σε κάθε πίνακα Simplex οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j – Z_j}$ που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές είναι πάντα μηδενικές

•Στο συγκεκριμένο τελικό πίνακα Simplex παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν και μη βασικές μεταβλητές, οι οποίες στη σειρά $\mathbf{C_j – Z_j}$ έχουν τιμή ίση με μηδέν, όπως για παράδειγμα η μεταβλητή S_2

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j – Z_j}$ δηλώνουν την καθαρή μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η συγκεκριμένη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα

•Αν η S_2 αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα παραμείνει αμετάβλητη στα 14700

  •Δηλαδή θα έχουμε μια άλλη λύση που θα δίνει την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

•Επομένως, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την S_2 ως τη νέα βασική μεταβλητή στον πίνακα Simplex, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία θα παραμείνει στο βέλτιστο επίπεδο

  •Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί είναι η Sι, διότι έχει το μικρότερο πηλίκο τιμών της Bi προς την οδηγό στήλη

προκύπτει ο πίνακας Simplex:

Συντ. Κόστους C_j →		140	105	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_2	0	0	½	1	-2	40
140	X_1	1	0	-0,375	0	1	60
105	X_2	0	1	½	0	-1	60
	Z_j	0(0) +1(140) +0(105) 140	0(0) 0(140) +1(105) 105	½(0) -0,375(140) ½(105) 0	1(0) 0(140) 0(105) 0	-2(0) +1(140) -1(105) 35	14700
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	-35	

✓Και αυτός και ο αμέσως προηγούμενος πίνακας αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ με συντελεστές κέρδους για τραπέζια και καρέκλες 140 και 105 αντίστοιχα

Σύγκριση δύο βέλτιστων λύσεων

$1^{η}$ Βέλτιστη λύση	$2^{η}$ Βέλτιστη λύση
Τραπέζια: $X_1=90$ Καρέκλες: $X_2=20$ Κέρδος: 14.700€	Τραπέζια: $X_1=60$ Καρέκλες: $X_2=60$ Κέρδος: 14.700€
Ξυλουργείο: 960 ώρες διαθέσιμες, 880 απαιτούνται 80 ώρες μη χρησιμοποιούμενες	Ξυλουργείο: 960 ώρες διαθέσιμες, 960 απαιτούνται
Βαφείο: 400 ώρες διαθέσιμες, 400 απαιτούνται	Βαφείο: 400 ώρες διαθέσιμες, 360 απαιτούνται 40 ώρες μη χρησιμοποιούμενες
Στιλβωτήριο: 420 ώρες διαθέσιμες, 420 απαιτούνται	Στιλβωτήριο: 420 ώρες διαθέσιμες, 420 απαιτούνται
Οι περιορισμοί βαφείου και στιλβωτηρίου είναι δεσμευτικοί.	Οι περιορισμοί ξυλουργείου και στιλβωτηρίου είναι δεσμευτικοί.

Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

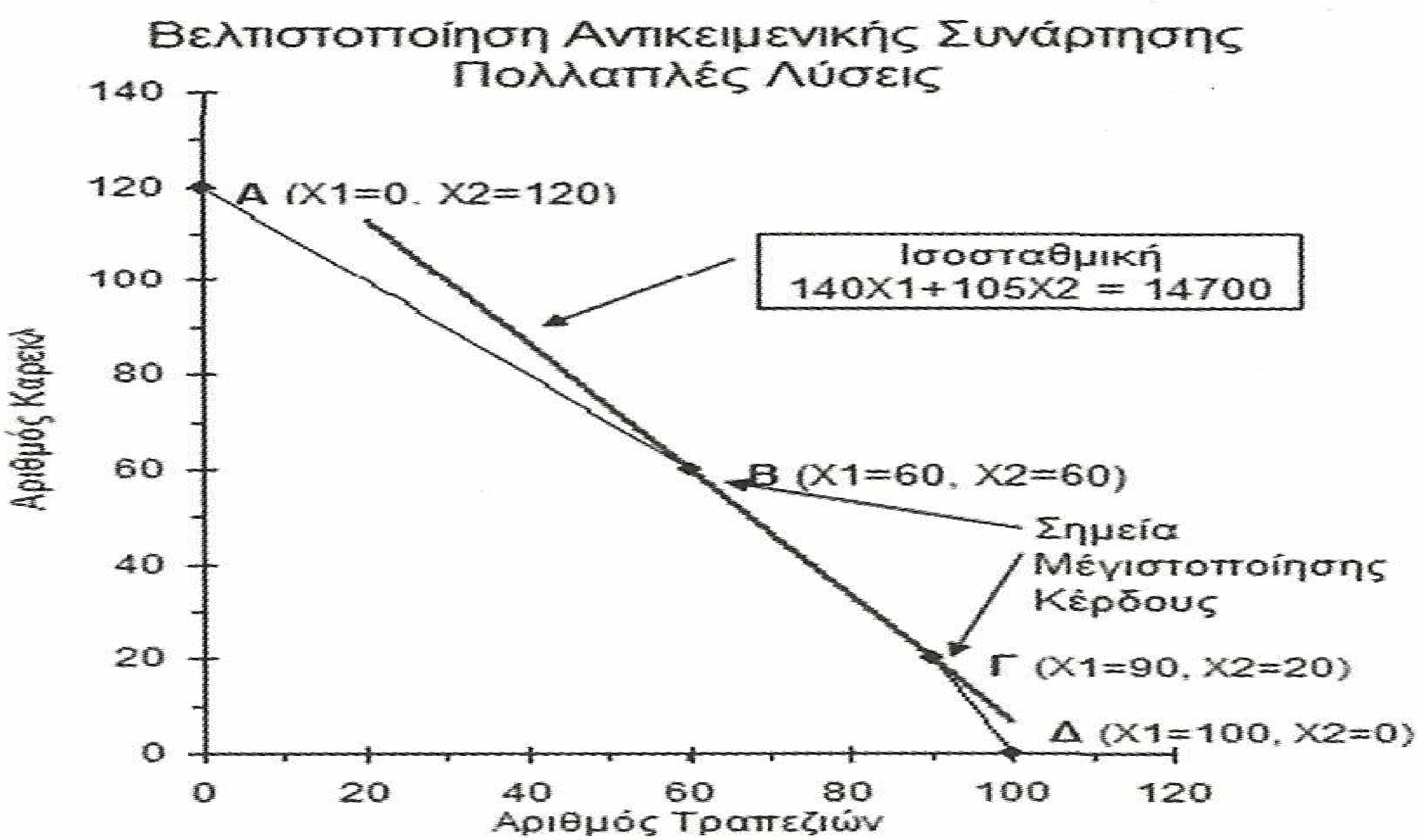
•Όταν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις

•Κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο ή περισσότερων λύσεων είναι επίσης βέλτιστη λύση

•Το σχήμα που ακολουθεί εξηγεί τι συμβαίνει στην περίπτωση που υπάρχουν δύο ή περισσότερα ακραία σημεία με την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

• Η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλη με τον περιορισμό που ορίζεται από τα δύο βέλτιστα σημεία (σημεία Β και Γ στο σχήμα)

  •κάθε σημείο μεταξύ του σημείου Β και του σημείου Γ δίνει την ίδια τιμή (τη βέλτιστη) στην αντικειμενική συνάρτηση



•Οι λύσεις που αντιστοιχούν στα σημεία μεταξύ των ακραίων σημείων Β και Γ υπολογίζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των δύο ακραίων σημείων:

Τραπέζια: $X_1 = 90λ + 60(1-λ)$ Καρέκλες: $X_2 = 20λ + 60(1-λ)$, $0< λ< 1$

•Για παράδειγμα για λ=0,5, η λύση X_1=75 (τραπέζια) και X_2=40 (καρέκλες) δίνει την ίδια τιμή του βέλτιστου κέρδους, το ίδιο και η X_1=66 και X_2=52 (λ=0,2) κ.ο.κ.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

✓ Η αρχική τους εφαρμογή, όπως δηλώνει και η ονομασία τους, αφορούσε τον καθορισμό του βέλτιστου τρόπου μεταφοράς αγαθών από διαφορετικά σημεία παραγωγής ή κεντρικής αποθήκευσης (π.χ., εργοστάσια) σε κέντρα διανομής που είναι εγκατεστημένα σε άλλα γεωγραφικά σημεία

✓Το αντικείμενο των προβλημάτων μεταφοράς είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από τις τοποθεσίες στις οποίες βρίσκονται (πηγές) σε ένα σύνολο προορισμών με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η κάλυψη της ζήτησης σε κάθε προορισμό με ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς

✓Όπως και στη μέθοδο Simplex, η γενική προσέγγιση του προβλήματος είναι η ίδια

✓Ξεκινώντας από μία εφικτή λύση του προβλήματος, μέσω ενός επαναληπτικού αλγορίθμου τη βελτιώνουμε σε κάθε βήμα έως ότου επιτύχουμε στη βέλτιστη λύση

✓ Σε αντίθεση με τη μέθοδο Simplex, οι αλγεβρικοί υπολογισμοί σε ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι απλούστεροι

Παράδειγμα ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ

•Η επιχείρηση παραγωγής πλακιδίων μπάνιου ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ παράγει τα προϊόντα της σε τρία εργοστάσια που βρίσκονται στις πόλεις:

- •Πάτρα, Βόλο και Θεσσαλονίκη

•Η διανομή των προϊόντων της στην υπόλοιπη χώρα γίνεται μέσω 4 κεντρικών αποθηκών που βρίσκονται στην Αθήνα, Ηράκλειο, Λάρισα και Ιωάννινα

•Ο **μηνιαίος προγραμματισμός παραγωγής και πωλήσεων** σε κάθε εργοστάσιο και κάθε κέντρο διανομής δίνεται στον πίνακα Μ.1 που ακολουθεί:

Εργοστάσιο	Παραγωγή (000 τεμ)	Κέντρο Διανομής	Ζήτηση (000 τεμ)
Πάτρα	350	Ιωάννινα	200
Βόλος	300	Λάρισα	300
Θεσσαλονίκη	450	Αθήνα	400
		Ηράκλειο	200

•Επειδή το κόστος παραγωγής της ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ είναι το ίδιο σε όλα τα εργοστάσια, **στόχος της εταιρείας** είναι **η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς των προϊόντων από τα εργοστάσια στα κέντρα διανομής**

•Το κόστος μεταφοράς από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής είναι ανάλογο του μεταφερόμενου φορτίου και δίνεται στον παρακάτω πίνακα πίνακα

• Οι γραμμές του οποίου αντιστοιχούν στα 3 εργοστάσια από τα οποία θα μεταφερθούν τα προϊόντα, με τη διαθέσιμη ποσότητα σε κάθε εργοστάσιο να αναγράφεται στην τελευταία στήλη του πίνακα, και οι στήλες του, στα κέντρα διανομής (αποθήκες) όπου η ζητούμενη ποσότητα σε κάθε κέντρο διανομής δίνεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα

• Κάθε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε μία από τις 12 πιθανές διαδρομές (εργοστάσιο - κέντρο διανομής) με το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς ανά μεταφερόμενη μονάδα προϊόντος να σημειώνεται στο πάνω δεξί άκρο του αντίστοιχου κελιού

✓**<u>Το πρόβλημα της επιχείρησης</u>** είναι να προσδιορισθεί από ποιο **εργοστάσιο ή εργοστάσια** θα εξυπηρετηθεί κάθε κέντρο διανομής και τι **ποσότητες θα μεταφερθούν** έτσι ώστε το **συνολικό κόστος** μεταφοράς να είναι το **μικρότερο δυνατό**

Πίνακας προβλήματος μεταφοράς

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3	9	350
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Κελί που αντιστοιχεί στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα

Διαθέσιμη ποσότητα στο εργοστάσιο: Θεσσαλονίκη

Ζήτηση της κεντρικής αποθήκης: Ηράκλειο

Κόστος της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα

Το Πρόβλημα Μεταφοράς ως Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

✓Στη γενική περίπτωση των προβλημάτων μεταφοράς υπάρχουν ***m*** "πηγές προέλευσης" (π.χ., εργοστάσια) με συγκεκριμένη διαθέσιμη ποσότητα αγαθών σε κάθε μία πηγή, τα οποία πρέπει να μεταφερθούν σε ***n*** "προορισμούς" (π.χ., κέντρα διανομής), ώστε να καλύψουν την αντίστοιχη ζήτηση

✓Έστω λοιπόν i = *1,2,3, ... m,* οι πηγές προέλευσης, σε καθεμία από τις οποίες υπάρχει διαθέσιμη προς μεταφορά ποσότητα A_i

✓Έστω επίσης $j = 1,2,3, \ldots n$, οι προορισμοί ο καθένας από τούς οποίους παρουσιάζει ζήτηση για ποσότητα προϊόντων B_j αντίστοιχα

✓Υποθέτουμε επίσης ότι η συνολική ζήτηση στους προορισμούς είναι ίση με τη συνολική προσφορά στις πηγές, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{m} A_1 = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

•Η παραδοχή αυτή ισχύει στην επίλυση όλων των προβλημάτων μεταφοράς, όταν δε δεν ισχύει, μετασχηματίζουμε το πρόβλημα κατάλληλα ώστε να ισχύει **(βλέπε 4.1.5).**

•Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος (π.χ., τεμαχίου, τόνου κ.λπ.) από την πηγή *i* στον προορισμό *j,* είναι σταθερό και συμβολίζεται με C_{ij}

•Στόχος του προβλήματος είναι να προσδιορισθούν οι ποσότητες X_{ij} που θα μεταφερθούν από την πηγή i στον προορισμό *j* έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση όλων των προορισμών και να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς

•Επομένως, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως:

Ελαχιστοποίηση Κόστους Μεταφοράς: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

✓Η μεταφερόμενη ποσότητα από κάθε "πηγή προέλευσης" i προς όλους τους προορισμούς είναι ίση με τη διαθέσιμη ποσότητα της "πηγής προέλευσης"

✓Επομένως υπάρχουν **m** τέτοιοι περιορισμοί για *i= 1,2,3, m,* οι οποίοι διατυπώνονται ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = A_i \qquad i= 1,2,3,\ \dots,\ m$$

✓Η μεταφερόμενη ποσότητα από όλες τις "πηγές προέλευσης" i προς κάθε συγκεκριμένο προορισμό *j* πρέπει να είναι ίση με τη ζήτηση στο συγκεκριμένο προορισμό

✓Επομένως, υπάρχουν n τέτοιοι περιορισμοί για *j*= 1,2,3, n

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = B_j \qquad j= 1,2,3,\ \dots,\ n$$

Ο αριθμός των περιορισμών του Προβλήματος Μεταφοράς

✓Οι **m+n** περιορισμοί του προβλήματος δεν είναι όλοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους

✓Δεδομένου ότι υποθέσαμε ότι η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, αν γνωρίζουμε την προσφερόμενη ποσότητα σε όλες τις **m** "πηγές προέλευσης" και τη ζητούμενη ποσότητα σε **n-1** "προορισμούς" τότε μπορούμε αλγεβρικά να υπολογίσουμε και τη ζητούμενη ποσότητα στον τελευταίο προορισμό αφαιρώντας από τη συνολική προσφερόμενη ποσότητα το άθροισμα της ζήτησης των υπολοίπων προορισμών

✓Επομένως το πλήθος των ανεξάρτητων περιορισμών του προβλήματος είναι **m+n-1**

✓Η παρατήρηση αυτή είναι ουσιαστική στον καθορισμό του μέγιστου αριθμού διαδρομών που χρησιμοποιούνται για να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση του κόστους

Ο αριθμός των διαδρομών που χρησιμοποιούνται στη Βέλτιστη Λύση

•Στη μέθοδο Simplex του Γραμμικού Προγραμματισμού, ο αριθμός των βασικών (με μη μηδενικές τιμές) μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα ΓΠ είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος

•Επομένως, η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος μεταφοράς με ***m*** "πηγές προέλευσης" και **n** "προορισμούς" δεν μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερες από *m+n-1* διαδρομές

❖Πώς διατυπώνεται το παράδειγμα του προηγουμένου κεφαλαίου ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

Μεταβλητές

•Οι μεταβλητές του προβλήματος αντιστοιχούν στη μεταφερόμενη ποσότητα σε κάθε διαδρομή από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής

•Με 3 εργοστάσια και 4 κέντρα διανομής υπάρχουν 12 πιθανές διαδρομές

Οι μεταβλητές του προβλήματος

X_{11} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Πάτρα σε Ιωάννινα

X_{12} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Πάτρα σε Λάρισα

X_{13} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Πάτρα σε Αθήνα

X_{14} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Πάτρα σε Ηράκλειο

X_{21} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Βόλο σε Ιωάννινα

X_{22} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Βόλο σε Λάρισα

X_{23} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Βόλο σε Αθήνα

X_{24} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Βόλο σε Ηράκλειο

X_{31} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Θεσσαλονίκη σε Ιωάννινα

X_{32} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Θεσσαλονίκη σε Λάρισα

X_{33} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Θεσσαλονίκη σε Αθήνα

X_{34} = Μεταφερόμενη Ποσότητα από Θεσσαλονίκη σε Ηράκλειο

Η διατύπωση του μοντέλου ΓΠ

Ελαχιστοποίηση Κόστους Μεταφοράς:

$$5X_{11} + 5X_{12} + 3X_{13} + 9X_{14} + 6X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23} + 7X_{24} + 5X_{31} + 4X_{32} + 6X_{33} + 8X_{34}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
X_{11} + & X_{12} + & X_{13} + & X_{14} & & & & & & & & & & = 350 \\
 & & & & X_{21} + & X_{22} + & X_{23} + & X_{24} & & & & & & = 300 \\
 & & & & & & & & X_{31} + & X_{32} + & X_{33} + & X_{34} & & = 450 \\
X_{11} + & & & & X_{21} + & & & & X_{31} & & & & & = 200 \\
 & X_{12} + & & & & X_{22} + & & & & X_{32} & & & & = 300 \\
 & & X_{13} + & & & & X_{23} + & & & & X_{33} & & & = 400 \\
 & & & X_{14} + & & & & X_{24} + & & & & X_{34} & & = 200
\end{array}
$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34} \geq 0$$

✓Ο πίνακας συντελεστών των μεταβλητών στην περίπτωση των προβλημάτων μεταφοράς έχει συγκεκριμένη χαρακτηριστική μορφή

✓Αποτελείται μόνο από τα στοιχεία 0 και 1 διατεταγμένα σε συγκεκριμένη διάταξη

Εύρεση Αρχικής Λύσης στα Προβλήματα Μεταφοράς

•Το πρώτο βήμα σε ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι η παρουσίαση των στοιχείων σε έναν πίνακα, όπως ο πίνακας Μ.1 του παραδείγματος της ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ

•Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση μιας αρχικής λύσης του προβλήματος

Η μέθοδος της «Βορειοδυτικής Γωνίας»

Η **μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας** είναι η απλούστερη διαδικασία για την εύρεση μιας αρχικής λύσης σε ένα πρόβλημα μεταφοράς

Η εφαρμογή της μεθόδου ακολουθεί τους εξής απλούς κανόνες:

- ✓ Ξεκινούμε επιλέγοντας το κελί (διαδρομή) που βρίσκεται στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα (εξ' ου και το όνομα της μεθόδου) και εκχωρούμε φορτία στις διαδρομές με ένα συστηματικό τρόπο τηρώντας τους εξής απλούς κανόνες:

1. Σε κάθε κελί (διαδρομή) εκχωρούμε τη μέγιστη δυνατή ποσότητα, έτσι ώστε να μηδενιστεί η διαθέσιμη ποσότητα της αντίστοιχης γραμμής ή η ζητούμενη ποσότητα της αντίστοιχης στήλης

2. Συνεχίζουμε με το επόμενο κελί της ίδιας γραμμής έως ότου εξαντληθεί ολόκληρη η ποσότητα της γραμμής ("πηγής")

3. Όταν εξαντληθεί η διαθέσιμη ποσότητα μίας γραμμής συνεχίζουμε με το κελί της ίδιας στήλης στην επόμενη γραμμή του πίνακα

Η εφαρμογή της μεθόδου στο παράδειγμα της Λουτροφίν:

- ✓ Ξεκινούμε με τη διαδρομή Πάτρα-Ιωάννινα
  - Η Πάτρα έχει διαθέσιμη ποσότητα 350 μονάδες, ενώ τα Ιωάννινα ζητούν 200
  - Εκχωρούμε το μέγιστο φορτίο των 200 μονάδων στη διαδρομή Πάτρα-Ιωάννινα
  - Το αποτέλεσμα είναι η διαθέσιμη ποσότητα της Πάτρας να μειωθεί σε 150 μονάδες, ενώ η ζήτηση στα Ιωάννινα έχει ικανοποιηθεί (επομένως η αντίστοιχη στήλη μηδενίζεται)

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 **200**	5	3	9	~~350~~ 150
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	300	400	200	1100

•Προχωρούμε στο δεύτερο κελί της πρώτης γραμμής που αντιστοιχεί στη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα

- Η Πάτρα έχει τώρα διαθέσιμη ποσότητα 150 μονάδες, ενώ η ζήτηση της Λάρισας είναι 300 μονάδες

- Εκχωρούμε τη μέγιστη δυνατή ποσότητα των 150 μονάδων και εξαντλείται η διαθέσιμη ποσότητα της Πάτρας, ενώ απομένει ζήτηση 150 μονάδων στη Λάρισα

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 150	3	9	~~350~~ ~~150~~ 0
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	~~300~~ 150	400	200	1100

✓Αφού η ποσότητα της Πάτρας έχει εξαντληθεί, συνεχίζουμε στην επόμενη γραμμή στην ίδια στήλη με το κελί που αντιστοιχεί στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα

- Ο Βόλος έχει διαθέσιμη ποσότητα 300, ενώ η απομένουσα ζήτηση στη Λάρισα είναι 150
- Εκχωρούμε στη διαδρομή τη μέγιστη δυνατή ποσότητα των 150 μονάδων και μηδενίζεται η απομένουσα ζήτηση της Λάρισας, ενώ υπάρχει φορτίο 150 μονάδων διαθέσιμο στο Βόλο
- Επομένως, συνεχίζουμε στην ίδια γραμμή

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 **200**	5 **150**	3	9	~~350~~ ~~150~~ 0
Βόλος	6	3 **150**	4	7	~~300~~ 150
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	~~300~~ ~~150~~ 0	400	200	1100

✓Στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα εκχωρούμε τη μέγιστη δυνατή ποσότητα των 150 μονάδων που απομένουν στο Βόλο, και απομένει ζήτηση 250 μονάδων στην Αθήνα

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 **200**	5 **150**	3	9	~~350~~ ~~150~~ 0
Βόλος	6	3 **150**	4 **150**	7	~~300~~ ~~150~~ 0
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	~~300~~ ~~150~~ 0	~~400~~ 250	200	1100

✓Τέλος, απομένει μόνο η γραμμή που αντιστοιχεί στη Θεσσαλονίκη και εκχωρούμε τις 450 διαθέσιμες μονάδες στις διαδρομές Θεσσαλονίκη-Αθήνα 250 και Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο 200, ολοκληρώνοντας τον πίνακα

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 **200**	5 **150**	3	9	~~350~~ ~~150~~ 0
Βόλος	6	3 **150**	4 **150**	7	~~300~~ ~~150~~ 0
Θεσ/νίκη	5	4	6 **250**	8 200	~~450~~ ~~200~~ 0
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	~~300~~ ~~150~~ 0	~~400~~ ~~250~~ 0	~~200~~ 0	1100

✓Το κόστος της αρχικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο της ΒΔ Γωνίας, μπορεί να υπολογιστεί με απλές αλγεβρικές πράξείς:

Συνολικό Κόστος Αρχικής Λύσης ΒΔ Γωνίας

Διαδρομή	Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Λάρισα	150	5	750
Βόλος-Λάρισα	150	3	450
Βόλος-Αθήνα	150	4	600
Θεσσαλονίκη-Αθήνα	250	6	1500
Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			5900

Αρχικές λύσεις στο πρόβλημα μεταφοράς

✓Η μέθοδος της ΒΔ γωνίας είναι πολύ απλή στην εκτέλεση της

•Η επιλογή των διαδρομών γίνεται με ένα μηχανιστικό τρόπο, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη το αντίστοιχο κόστος

- •Επομένως, η αναμενόμενη ποιότητα των λύσεων που προκύπτουν (σε σχέση πάντα με το πόσο προσεγγίζουν το βέλτιστο κόστος μεταφοράς) δεν είναι γενικώς καλή

- •Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα με 3 πηγές προέλευσης και 4 προορισμούς έχουν επιλεγεί 6 (4+3-1) διαδρομές όπως εξηγήθηκε προηγουμένως

- •Αυτό επιτεύχθηκε από την εφαρμογή του κανόνα ότι σε κάθε επιλεγόμενη διαδρομή (κελί) εκχωρείται η μέγιστη δυνατή ποσότητα, έτσι ώστε κάθε φορά να μηδενίζεται η ποσότητα της γραμμής ή στήλης και έτσι με την τελευταία εκχώρηση να μηδενίζονται ταυτόχρονα η τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη

✓Μια αρχική λύση μπορεί να παραχθεί επιλέγοντας κελιά (διαδρομές) με όποιον άλλο τρόπο επιθυμούμε, αρκεί σε κάθε επιλογή να εκχωρείται η μέγιστη δυνατή ποσότητα φορτίου έτσι ώστε να μηδενίζεται η ποσότητα της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης

✓Οι μέθοδοι εύρεσης αρχικής λύσης που ακολουθούν βασίζονται στην προηγούμενη παρατήρηση σε συνδυασμό με πιο "έξυπνη" επιλογή των διαδρομών, έτσι ώστε να δίνουν καλύτερες αρχικές λύσεις

Η μέθοδος του "Ελάχιστου Κόστους"

✓Είναι μια άλλη μέθοδος προσδιορισμού μιας αρχικής λύσης σε προβλήματα μεταφοράς

✓Στη μέθοδο του Ελάχιστου Κόστους, οι διαδρομές επιλέγονται λαμβάνοντας υπ' όψη το κόστος κάθε διαδρομής (από το χαμηλότερο προς το υψηλότερο), και επομένως οι λύσεις που προκύπτουν αναμένεται να είναι γενικώς καλύτερες από τις αντίστοιχες λύσεις που προκύπτουν με τη μέθοδο της ΒΔ Γωνίας

Οι κανόνες επιλογής των διαδρομών στη μέθοδο του "Ελάχιστου Κόστους"

1. Ξεκινούμε από τη διαδρομή με το μικρότερο συντελεστή κόστους (σε περίπτωση δύο ή περισσότερων διαδρομών με το ίδιο ελάχιστο κόστος επιλέγουμε μία από αυτές τυχαία). Στη διαδρομή αυτή εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο, έτσι ώστε είτε να εξαντληθεί η ποσότητα της "πηγής προέλευσης" είτε να ικανοποιηθεί η ζήτηση στο συγκεκριμένο "προορισμό’’

2. Διαγράφουμε την πηγή προέλευσης (αν έχει εξαντληθεί η ποσότητα της πηγής) ή τον προορισμό (αν έχει ικανοποιηθεί η ζήτηση) από τα περαιτέρω βήματα

3. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2, επιλέγοντας την επόμενη διαδρομή, με βάση το μικρότερο κόστος από τις απομένουσες διαδρομές, έως ότου εξαντληθούν τις οι ποσότητες της πηγές προέλευσης και η ζήτηση των προορισμών

Η εφαρμογή της μεθόδου του "Ελάχιστου Κόστους" στο προηγούμενο παράδειγμα αποτελείται από τα εξής βήματα

•Επιλέγουμε τη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα επειδή έχει το μικρότερο κόστος από όλες τις διαδρομές (θα μπορούσαμε να επιλέγαμε εναλλακτικά τη διαδρομή Βόλος-Λάρισα που έχει το ίδιο κόστος με αυτό της Πάτρας-Αθήνας)

- •Εκχωρούμε 300 μονάδες στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, εξαντλώντας την προσφερόμενη ποσότητα της Πάτρας

- •Επομένως, οι διαδρομές με αφετηρία την Πάτρα δεν θα ληφθούν υπ' όψη στη συνέχεια, διότι η ποσότητα της Πάτρας έχει εξαντληθεί (η πρώτη σειρά του πίνακα διαγράφεται)

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 **350**	9	~~350~~ 0
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	~~400~~ 50	200	1100

✓Από τις οκτώ διαδρομές που απομένουν (από Βόλο και Θεσσαλονίκη) επιλέγουμε τη διαδρομή Βόλος-Λάρισα διότι έχει το μικρότερο κόστος

- Εκχωρούμε φορτίο 300 μονάδων στη διαδρομή αυτή, ικανοποιώντας όλη τη ζήτηση στη Λάρισα και ταυτόχρονα εξαντλώντας όλη την προσφερόμενη ποσότητα από το Βόλο
- Επομένως, διαγράφονται οι διαδρομές που καταλήγουν στη Λάρισα (2η στήλη) και όσες ξεκινούν από το Βόλο (2η γραμμή)
- Έχει απομείνει μόνο η τελευταία γραμμή του πίνακα

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 **350**	9	~~350~~ 0
Βόλος	6	3 **300**	4	7	~~300~~ 0
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300 0	~~400~~ 50	200	1100

✓Εφόσον οι μόνες απομένουσες διαδρομές είναι αυτές που ξεκινούν από τη Θεσσαλονίκη, εκχωρούμε την ποσότητα που διαθέτει η Θεσσαλονίκη, στις διαδρομές Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, Θεσσαλονίκη -Αθήνα και Θεσσαλονίκη -Ηράκλειο

✓Το κόστος της αρχικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο του Ελάχιστου Κόστους, υπολογίζεται ως εξής:

Συνολικό Κόστος Αρχικής Λύσης Ελάχιστου Κόστους

Διαδρομή	Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος-Λάρισα	300	3	900
Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσσαλονίκη-Αθήνα	50	6	300
Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			4850

Αρχική λύση με τη μέθοδο Ελάχιστου Κόστους

•Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, το κόστος της αρχικής λύσης που προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου του "Ελάχιστου Κόστους’’ είναι μικρότερο από το αντίστοιχο κόστος της αρχικής λύσης που προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου της "ΒΔ Γωνίας", διότι η επιλογή των διαδρομών έγινε με βάση το κόστος κάθε διαδρομής

•Ωστόσο, η επιλογή αυτή δεν εγγυάται την εύρεση της βέλτιστης λύσης

•Στο συγκεκριμένο παράδειγμα προέκυψε λύση με λιγότερες από 6 (4+3-1) διαδρομές

- •Αυτό αποτελεί μια ειδική περίπτωση, η οποία συμβαίνει όταν σε κάποια εκχώρηση (Βόλος-Λάρισα στο συγκεκριμένο παράδειγμα), μηδενίζονται ταυτόχρονα η γραμμή και η στήλη του κελιού

✓Ένα από τα **αδύνατα σημεία της μεθόδου** είναι ότι η επιλογή των διαδρομών είναι "μυωπική", δηλαδή **εξετάζει μόνο την περίπτωση της αμέσως επόμενης επιλογής, και όχι τι θα συμβεί λίγο αργότερα**

Τι εννοούμε;

✓Ας υποθέσουμε ότι είχαμε μόνο τα δύο εργοστάσια Βόλου και Θεσσαλονίκης και δύο αποθήκες Λάρισας και Αθήνας με ίσες ποσότητες παραγωγής και ίσες ποσότητες ζήτησης τόσο στα εργοστάσια όσο και στις αποθήκες

✓Με βάση τον κανόνα του ελάχιστου κόστους θα επιλέγαμε πρώτα τη διαδρομή Βόλος-Λάρισα που έχει το μικρότερο κόστος (3), και επομένως η δεύτερη διαδρομή θα ήταν η Θεσσαλονίκη-Αθήνα

✓Παρατηρούμε όμως ότι πιο οικονομική είναι η λύση Βόλος-Αθήνα και Θεσσαλονίκη-Λάρισα, διότι η δεύτερη κοστίζει μόνο
1 μονάδα περισσότερο από τη Βόλος-Λάρισα, ενώ στην πρώτη έχουμε κατά
2 μονάδες μικρότερο κόστος από τη Θεσσαλονίκη-Αθήνα

Η μέθοδος Vogel

✓Μια τρίτη μέθοδος προσδιορισμού αρχικής λύσης σε προβλήματα μεταφοράς είναι η μέθοδος **Vogel**

✓Η προσεγγιστική μέθοδος **Vogel** είναι μια πιο πολύπλοκη μέθοδος σε σχέση με τις προηγούμενες, αλλά δίνει κατά κανόνα πολύ καλύτερες λύσεις που είναι πλησιέστερες στη βέλτιστη λύση, ή σε αρκετές περιπτώσεις και αυτή ακόμη τη βέλτιστη λύση

✓Η μέθοδος **Vogel** λαμβάνει υπ' όψη το κόστος των διαδρομών, αλλά όχι το απόλυτο κόστος κάθε διαδρομής, όπως στη μέθοδο του Ελάχιστου Κόστους

✓Αντίθετα, η μέθοδος **Vogel** λαμβάνει υπ' όψη για κάθε πηγή και κάθε προορισμό την αύξηση κόστους που θα προέκυπτε αν αντί της πιο οικονομικής διαδρομής, επιλέγαμε τη δεύτερη πιο οικονομική

- ✓Υπολογίζει δηλαδή ένα είδος πιθανής "ποινής" (με την έννοια της αύξησης κόστους που θα προέκυπτε αν χανόταν η πρώτη επιλογή)
- ✓Έτσι, η επιλογή των διαδρομών δεν γίνεται με βάση το απόλυτο κόστος κάθε διαδρομής, αλλά την πιθανή "ποινή" και στόχος είναι η επιλογή των διαδρομών με βάση τη μέγιστη ποινή, δηλαδή να επιλεγούν διαδρομές για τις οποίες η εναλλακτική λύση θα απέφερε μεγάλη αύξηση του κόστους

Η εφαρμογή της μεθόδου **Vogel** στο προηγούμενο παράδειγμα

Βήμα 1. Για κάθε "πηγή προέλευσης" όπως και για κάθε "προορισμό" υπολογίζουμε ένα "δείκτη ποινής’’

- Ο δείκτης αυτός ορίζεται από τη διαφορά μεταξύ του μικρότερου και του αμέσως μικρότερου κόστους των διαδρομών κάθε γραμμής και κάθε στήλης

Στο παράδειγμα της ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ για την Πάτρα η ποινή είναι 2 (5-3), για το Βόλο 1 (4-3) και για τη Θεσσαλονίκη 1 (5-4)
Στις στήλες του πίνακα οι αντίστοιχες ποινές είναι: Ιωάννινα 0 (5-5), Λάρισα 1 (4-3), Αθήνα 1 (4-3) και Ηράκλειο 1 (8-7)

✓Η μεγαλύτερη ποινή όλων των γραμμών και στηλών του πίνακα αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή (Πάτρα)

✓Επομένως, πρέπει να επιλέξουμε μία διαδρομή που ξεκινά από την Πάτρα και επιλέγουμε αυτή με το μικρότερο κόστος που είναι η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα

✓Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους, εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο στη διαδρομή που επιλέχθηκε, ώστε να μηδενιστεί η αντίστοιχη γραμμή ή στήλη

- Στην προκειμένη περίπτωση μηδενίζεται η γραμμή της Πάτρας

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων	Ποινές
Πάτρα	5	5	3 **350**	9	~~350~~ 0	5-3 = **2**
Βόλος	6	3	4	7	300	4-3 = 1
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4 = 1
Ζήτηση Κέντρων	200	300	~~400~~ 50	200	1100	
Ποινές	5-5 = 0	4-3 = 1	4-3 = 1	8-7 = 1		

Βήμα 2.

•Μετά από κάθε εκχώρηση φορτίου σε μια διαδρομή επανυπολογίζουμε τους δείκτες ποινής για κάθε "πηγή προέλευσης" και κάθε "προορισμό’’

• Τα κελιά της γραμμής ή στήλης που μηδενίστηκε εξαιρούνται από τους υπολογισμούς επειδή οι αντίστοιχες διαδρομές δεν μπορούν πλέον να χρησιμοποιηθούν

•Επομένως, για την Πάτρα δεν έχει έννοια ο υπολογισμός ποινής, για το Βόλο παραμένει 1 (4-3) και για τη Θεσσαλονίκη επίσης παραμένει 1 (5-4)

•Στις στήλες του πίνακα οι αντίστοιχες ποινές αλλάζουν διότι τα κελιά της πρώτης γραμμής δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

•Έτσι έχουμε: Ιωάννινα 1 (6-5), Λάρισα 1 (4-3), Αθήνα 2 (6-4) και Ηράκλειο 1 (8-7).

•Η μεγαλύτερη ποινή όλων των γραμμών και στηλών του πίνακα αντιστοιχεί τώρα στη τρίτη στήλη (Αθήνα)

  - •Επομένως, πρέπει να επιλέξουμε μια διαδρομή που καταλήγει στην Αθήνα
  - •Αυτή με το μικρότερο κόστος είναι η διαδρομή Βόλος-Αθήνα

✓Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους, εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο στη διαδρομή που επιλέχθηκε ώστε να μηδενιστεί η αντίστοιχη γραμμή ή στήλη

✓Στην προκειμένη περίπτωση, μηδενίζεται εκχωρούμε φορτίο 50 μονάδων, όση δηλαδή είναι η απομένουσα ζήτηση στην Αθήνα στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα με αποτέλεσμα να μηδενιστεί η στήλη της Αθήνας

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων	Ποινές
Πάτρα	5	5	3 **350**	9	~~350~~ 0	~~XXXXX~~
Βόλος	6	3	4 **50**	7	~~300~~ 250	4-3 = **1**
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4 = **1**
Ζήτηση Κέντρων	200	300	~~400~~ ~~50~~ 0	200	1100	
Ποινές	6-5 = **1**	4-3 = **1**	6-4 = **2**	8-7 = **1**		

Βήμα 3.

- Υπολογίζουμε ξανά για κάθε "πηγή προέλευσης" και κάθε "προορισμό" τις διαφορές μεταξύ του μικρότερου και του αμέσως μικρότερου κόστους, εξαιρώντας τη σειρά της Πάτρας και τη στήλη της Αθήνας, διότι τα αντίστοιχα φορτία έχουν εξαντληθεί
- Οι υπολογισμοί φαίνονται στον τρίτο πίνακα Vogel
- Η ποινή για τη γραμμή που αντιστοιχεί στο Βόλο έχει αλλάξει από 1 σε 3, γιατί ενώ η πιο οικονομική επιλογή παραμένει η Βόλος-Λάρισα, η δεύτερη πιο οικονομική επιλογή από Βόλο είναι τώρα η Βόλος- Ιωάννινα
- Η ποινή για τη Θεσσαλονίκη παραμένει η ίδια και επομένως η μέγιστη
- ποινή όλων των γραμμών και στηλών αντιστοιχεί στο Βόλο
    - Άρα, στη διαδρομή με το μικρότερο κόστος στη δεύτερη γραμμή, που είναι η Βόλος-Λάρισα, εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο που είναι οι 250 μονάδες που έχουν απομείνει στο Βόλο με αποτέλεσμα να μηδενιστεί και ο Βόλος

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων	Ποινές
Πάτρα	5	5	3 **350**	9	~~350~~ 0	~~XXXXX~~
Βόλος	6	3 **250**	4 **50**	7	~~300~~ ~~250~~ 0	6-3 = **3**
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4 = 1
Ζήτηση Κέντρων	200	~~300~~ 50	~~400~~ ~~50~~ 0	200	1100	
Ποινές	6-5 = 1	4-3 = 1	~~XXXXXX~~	8-7 = 1		

Βήμα 4.

✓Εφόσον το μόνο εργοστάσιο που διαθέτει φορτίο είναι η Θεσσαλονίκη με 450 μονάδες, η ζήτηση, στα Ιωάννινα (200 μονάδες), η απομένουσα ζήτηση στη Λάρισα (50 μονάδες) και η ζήτηση στο Ηράκλειο (200 μονάδες) θα ικανοποιηθούν από τη Θεσσαλονίκη

✓ Ο τελικός πίνακας των μεταφορών που προκύπτουν από τη μέθοδο Vogel έχει τώρα ως εξής:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 350	9	~~350~~ 0
Βόλος	6	3 250	4 50	7	~~300~~ ~~250~~ 0
Θεσ/νίκη	5 200	4 50	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	~~200~~ 0	~~300~~ ~~50~~ 0	~~400~~ ~~50~~ 0	~~200~~ 0	1100

Το κόστος της αρχικής λύσης που προέκυψε από τη μέθοδο Vogel υπολογίζεται ως εξής:

Συνολικό Κόστος Αρχικής Λύσης Ελάχιστου Κόστους

Διαδρομή	Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος–Λάρισα	250	3	750
Βόλος–Αθήνα	50	4	200
Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	50	4	200
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			4800

✓Η μέθοδος Vogel παράγει γενικώς καλύτερες αρχικές λύσεις από τις προηγούμενες μεθόδους, παρόλο που η εφαρμογή της είναι αρκετά πιο πολύπλοκη από τις μεθόδους της "ΒΔ Γωνίας" και του Ελάχιστου Κόστους

Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης στα Προβλήματα Μεταφοράς

Η μέθοδος Stepping Stone

✓Η μέθοδος **Stepping Stone** είναι μία επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης σε ένα πρόβλημα μεταφοράς.
✓Ο αριθμός των διαδρομών στις βασικές εφικτές λύσεις του προβλήματος είναι ίσος (ή μικρότερος) από το άθροισμα του αριθμού των "πηγών προέλευσης" συν τον αριθμό των "προορισμών" μειωμένο κατά 1

Έλεγχος λύσης με τη μέθοδο Stepping Stone

✓Η βασική αρχή της μεθόδου είναι ότι ελέγχει την πιθανή μείωση του κόστους μιας συγκεκριμένης λύσης από τη χρήση διαδρομών που δεν έχουν επιλεγεί στην τρέχουσα λύση.
Θεωρούμε, για παράδειγμα, την αρχική λύση που προέκυψε από τη μέθοδο της ΒΔ Γωνίας.

Αρχική Λύση με Μέθοδο “ΒΔ Γωνίας” για το πρόβλημα ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 **200**	5 **150**	3	9	350
Βόλος	6	3 **150**	4 **150**	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 **250**	8 **200**	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

•Σε κάθε **βήμα** της μεθόδου **Stepping Stone**, εξετάζεται η δυνατότητα εύρεσης μιας καλύτερης λύσης με αλλαγή μίας εκ των διαδρομών που χρησιμοποιούνται με μία από αυτές που δεν χρησιμοποιούνται

•**Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής:**
Αν χρησιμοποιηθεί μια διαδρομή που δεν συμπεριλαμβάνεται στη τρέχουσα λύση (όπως η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα ή κάποια άλλη), ποια θα είναι η επίπτωση στο συνολικό κόστος μεταφοράς;

Υπολογισμός οριακών αλλαγών στο κόστος μεταφοράς

•Ο υπολογισμός της **επίπτωσης στο συνολικό κόστος μεταφοράς** για κάθε διαδρομή που **δεν συμπεριλαμβάνεται στη τρέχουσα λύση**, γίνεται με τα εξής **βήματα**:

1. Επιλέγουμε μια διαδρομή που δεν συμπεριλαμβάνεται στην τρέχουσα λύση
2. Ξεκινώντας από το κελί τη5 διαδρομής που επιλέχθηκε, δημιουργούμε έναν κλειστό βρόγχο, ο οποίος διέρχεται από διαδρομές που ήδη χρησιμοποιούνται, ακολουθεί είτε οριζόντια ή κάθετη πορεία και επιστρέφει στο ίδιο κελί
3. Ξεκινώντας με το σημείο + στο κελί της διαδρομής που επιλέξαμε, τοποθετούμε εναλλάξ τα σημεία - και + σε κάθε γωνία του βρόγχου. Ο αριθμός των + σε κάθε σειρά και σε κάθε στήλη του πίνακα πρέπει να είναι ίσος με τον αντίστοιχο αριθμό των -
4. Υπολογίζουμε την οριακή μεταβολή του κόστους στη συγκεκριμένη διαδρομή, προσθέτονται το κόστος όλων των διαδρομών στις οποίες έχει τοποθετηθεί το σημείο +, και αφαιρώντας το κόστος όλων των διαδρομών στις οποίες έχει τοποθετηθεί το σημείο -
5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για όλες τις διαδρομές που δεν συμπεριλαμβάνονται στη λύση, ώστε για καθεμία από αυτές να υπολογίσουμε την οριακή αλλαγή του κόστους, εφόσον συμπεριληφθούν στη λύση. Αν για όλες τις διαδρομές η οριακή αλλαγή του κόστους είναι θετική (αύξηση κόστους), τότε η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη

Stepping Stone: 1^η επανάληψη

•Οι έξι μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές είναι: Πάτρα-Αθήνα, Πάτρα-Ηράκλειο, Βόλος-Ιωάννινα, Βόλος Ηράκλειο, Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα και Θεσσαλονίκη-Λάρισα

•Θεωρούμε την πρώτη μη επιλεχθείσα διαδρομή, Πάτρα-Αθήνα

•Ξεκινώντας από το κελί της διαδρομής αυτής, μπορούμε εύκολα να χαράξουμε έναν κλειστό βρόγχο που να διέρχεται από επιλεγείσες διαδρομές ως εξής: Πάτρα-Αθήνα -► Βόλος-Αθήνα -► Βόλος-Λάρισα -► Πάτρα-Λάρισα

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 − 150	3 +	9	350
Βόλος	6	3 + 150	4 − 150	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

•Ποιο είναι το νόημα του κλειστού βρόγχου και της τοποθέτησης των σημείων + και - στις γωνίες του βρόγχου;

•Καταρχήν πρέπει να θυμηθούμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μεταβολή που θα προκύψει στο κόστος μεταφοράς αν χρησιμοποιηθεί η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα αντί μιας άλλης από αυτές που έχουν ήδη επιλεγεί.

•Επομένως, αν εκχωρήσουμε φορτίο 1 μονάδος στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, θα πρέπει αυτό να αφαιρεθεί από κάποια άλλη διαδρομή που έχει σαν προορισμό την Αθήνα έτσι ώστε το συνολικό φορτίο που θα μεταφερθεί στην Αθήνα να παραμείνει στα 400 τεμάχια, όσο η συνολική ζήτηση

•Οι δύο άλλες διαδρομές με προορισμό την Αθήνα είναι οι Βόλος-Αθήνα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα

•Επιλέγουμε τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα και τοποθετούμε το σημείο - σε αυτή τη διαδρομή (εάν επιλέξουμε τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα θα φθάναμε σε αδιέξοδο, όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια)

•Εφόσον όμως θα μειώσουμε το φορτίο στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα, θα πρέπει να αυξήσουμε αντίστοιχα το φορτίο στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα, έτσι ώστε να μην μεταβληθεί η μεταφερόμενη από το Βόλο ποσότητα

•Τοποθετούμε το σημείο + στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα

•Αντίστοιχα, θα πρέπει να μειωθεί το αρχικά εκχωρηθέν φορτίο στη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα, ώστε το συνολικό φορτίο με προορισμό τη Λάρισα να παραμείνει το ίδιο

❖Με αυτό τον τρόπο κλείνει ο βρόγχος και υπάρχει ισορροπία των + και - σε κάθε σειρά και σε κάθε στήλη του πίνακα

Τοποθέτηση των + / - στη μέθοδο Stepping Stone

•Υπάρχει πάντα ένα κλειστός βρόχος που ξεκινά και καταλήγει σε ένα κελί που δεν έχει επιλεγεί περνώντας μόνο από κελιά που έχουν επιλεγεί

•Η επιλογή κελιών γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή πάντα η αντιστάθμιση των + και - σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη

• Αν για παράδειγμα, επιλέγαμε το κελί Θεσσαλονίκη-Αθήνα αντί του Βόλος-Αθήνα για να τοποθετήσουμε το σημείο -, τότε αναγκαστικά θα επιλέγαμε το κελί Θεσσαλονίκη - Ηράκλειο για να τοποθετήσουμε το σημείο +

• Στο σημείο αυτό φτάνουμε σε αδιέξοδο, διότι στην τελευταία στήλη δεν υπάρχει άλλο κελί που έχει ήδη επιλεγεί στην τρέχουσα λύση για να τοποθετηθεί το - ώστε να αντισταθμιστούν όλα τα + με –

✓Επομένως, **η επιλογή του κελιού Βόλος-Αθήνα ήταν η μοναδική δυνατή**

Ο υπολογισμός της μεταβολής που προκύπτει στο κόστος από τη χρησιμοποίηση της διαδρομής Πάτρα-Λάρισα:
Αν μία μονάδα φορτίου μεταφερθεί στη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα, τότε θα έχουμε σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση τις εξής αλλαγές φορτίων στις διαδρομές που χρησιμοποιούνται ήδη:

Διαδρομή		Μεταβολή σε μεταφερόμενη ποσότητα	Αλλαγή Κόστους
Πάτρα-Αθήνα	Νέα	Αύξηση (+1)	+3
Βόλος-Αθήνα	Επιλεγείσα	Μείωση (-1)	-4
Βόλος-Λάρισα	Επιλεγείσα	Αύξηση (+1)	+3
Πάτρα-Λάρισα	Επιλεγείσα	Μείωση (-1)	-5
Συνολική Αλλαγή Κόστους			-3

•Επομένως, τυχόν επιλογή της διαδρομής Πάτρα-Αθήνα θα οδηγούσε σε οριακή μείωση του κόστους κατά 3 μονάδες για κάθε μονάδα μεταφερόμενα ποσότητας

•Η οριακή ανάλυση του κόστους πρέπει να εξεταστεί με τον ίδιο τρόπο και για τις υπόλοιπες μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές στην αρχική λύση της "ΒΔ Γωνίας’’
•Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Πάτρα–Ηράκλειο.

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 – 150	3	9 +	350
Βόλος	6	3 + 150	4 – 150	7	300
Θεο/νίκη	5	4	6 + 250	8 – 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: +9–8 + 6–4 + 3–5 = +1

Βόλος–Ιωάννινα:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 – 200	5 + 150	3	9	350
Βόλος	6 +	3 – 150	4 150	7	300
Θεο/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: +6–5 + 5–3 = +3

Βόλος–Ηράκλειο:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
Βόλος	6	3 150	− 4 150	+ 7	300
Θεσ/νίκη	5	4	+ 6 250	− 8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: +7−8 + 6−4 = +1

Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα.

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	− 5 200	+ 5 150	3	9	350
Βόλος	6	− 3 150	+ 4 150	7	300
Θεσ/νίκη	+ 5	4	− 6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: +5−6 + 4−3 + 5−5 = 0

Θεσσαλονίκη–Λάρισα:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
Βόλος	6	3 – 150	4 + 150	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 +	6 – 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: +4–6 + 4–3 = -1

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Νέα Διαδρομή	Οριακή Μεταβολή Κόστους
Πάτρα–Αθήνα	-3
Πάτρα–Ηράκλειο	+1
Βόλος–Ιωάννινα	+3
Βόλος–Ηράκλειο	+1
Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα	0
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	-1

•Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, οι επιλογές των διαδρομών Πάτρα-Αθήνα ή Θεσσαλονίκη-Λάρισα μπορεί να οδηγήσουν σε μείωση του κόστους μεταφοράς

- •Η τρέχουσα λύση επιδέχεται βελτίωση

•Από τις δύο διαδρομές που η χρήση τους μπορεί να μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς, επιλέγουμε αυτή με το μικρότερο αρνητικό συντελεστή, δηλαδή τη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, η επιλογή της οποίας θα επιφέρει τη μεγαλύτερη μείωση κόστους ανά μονάδα μεταφερόμενα ποσότητας

Οι συντελεστές οριακής μεταβολής του κόστους στη μέθοδο Stepping Stone

✓Τα βήματα της επαναληπτικής μεθόδου **Stepping Stone** είναι αντίστοιχα με τα βήματα της μεθόδου **Simplex**

• Οι συντελεστές της οριακής μεταβολής του κόστους μεταφοράς για κάθε διαδρομή που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στην τρέχουσα λύση, που υπολογίστηκαν παραπάνω, αντιστοιχούν στις τιμές της γραμμής C_j-Z_j αν το πρόβλημα λυθεί με τη μέθοδο **Simplex**

•Και η οικονομική τους ερμηνεία είναι αντίστοιχη

Βελτίωση της Λύσης

Καταλήξαμε στο ότι η επιλογή και χρησιμοποίηση τηw διαδρομής Πάτρα-Αθήνα θα οδηγήσει σε μείωση του κόστους και μάλιστα γνωρίζουμε ότι για κάθε μονάδα φορτίου που θα μεταφερθεί στη διαδρομή αυτή το κόστος θα μειωθεί κατά 3 μονάδες

Τρία άλλα σημεία τα οποία πρέπει να λάβουμε υπ' όψη είναι τα εξής:

1. Ο αριθμός των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν δεν πρέπει να ξεπερνά τις 6 (4+3-1), όπως εξηγήσαμε και προηγουμένως
Επομένως, χρησιμοποιώντας τη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα θα πρέπει να αποκλειστεί μια από τις ήδη χρησιμοποιούμενες διαδρομές
2. Εφόσον το συνολικό κόστος μεταφοράς μειώνεται κατά 3 μονάδες για κάθε μονάδα φορτίου που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, θα πρέπει να επιδιώξουμε την εκχώρηση όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ποσότητας φορτίου στη διαδρομή αυτή
3. Σύμφωνα με τον κλειστό βρόγχο του πίνακα που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για τον υπολογισμό των οριακών μεταβολών του κόστους μεταφοράς για κάθε νέα-μη χρησιμοποιούμενη διαδρομή, κάθε ανάθεση φορτίου στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, οδηγεί σε μεταβολές των μεταφερόμενων ποσοτήτων στις άλλες διαδρομές. Συγκεκριμένα για κάθε ποσότητα φορτίου που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα , η ίδια ποσότητα φορτίου θα αφαιρεθεί από τις διαδρομές Πάτρα-Λάρισα και Βόλος-Αθήνα (σημείο -) ενώ αντίθετα το ίδιο φορτίο θα προστεθεί στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα (σημείο +).

Εκχώρηση φορτίου στη νέα διαδρομή

•Το πρόβλημα εντοπίζεται στις διαδρομές από τις οποίες θα αφαιρεθεί φορτίο

•Από τη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα η μεγαλύτερη ποσότητα φορτίου που μπορεί να αφαιρεθεί είναι 150 μονάδες, ενώ από τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα μπορούν να αφαιρεθούν επίσης έως 150 μονάδες

•Επομένως, η μεγαλύτερη ποσότητα που μπορεί να εκχωρηθεί στη νέα διαδρομή Πάτρα-Αθήνα είναι 150 μονάδες και οι αλλαγές στα φορτία των διαδρομών έχουν ως εξής:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 – 150-150=0	3 + **150**	9	350
Βόλος	6	3 + 150+150=300	4 – 150-150=0	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

που δίνουν την παρακάτω βελτιωμένη λύση:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 300	4 0	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας

Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Αθήνα	150	3	450
Βόλος–Λάρισα	300	3	900
Θεσσαλονίκη–Αθήνα	250	6	1500
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			5450

✓Ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Πάτρα-Αθήνα

•Είχαμε βρει ότι για κάθε μεταφερόμενη μονάδα το κόστος μειώνεται κατά 3 μονάδες, επομένως η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 150 μονάδων είναι 450 μονάδες μικρότερο από το κόστος της προηγούμενα λύσης που ανέρχονταν σε 5900

Stepping Stone και Simplex

*Η αντιστοιχία των βημάτων της επαναληπτικής μεθόδου **Stepping Stone** και της μεθόδου **Simplex** συνεχίζεται:*

•Σε κάθε βήμα η λύση βελτιώνεται με την αλλαγή κάποιας εκ των χρησιμοποιούμενων διαδρομών με μία από τις μη-χρησιμοποιούμενες

*•Οι χρησιμοποιούμενες διαδρομές αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του πίνακα **Simplex**, ενώ οι μη-χρησιμοποιούμενες στις μη-βασικές*

*•Οι υπολογισμοί στη μέθοδο **Stepping Stone** είναι πιο απλοί, λόγω του ότι οι συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς (τεχνολογικοί συντελεστές) είναι όλοι είτε μοναδιαίοι είτε μηδενικοί*

Stepping Stone: 2η επανάληψη

- Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου **Stepping Stone** έδωσε τη λύση της προηγούμενης παραγράφου
- Στη λύση αυτή χρησιμοποιούνται μόνο 5 διαδρομές, ενώ 7 διαδρομές δεν χρησιμοποιούνται

Η περίπτωση που χρησιμοποιούνται λιγότερες από m+n-1 διαδρομές

- Στην περίπτωση που οι διαδρομές στη λύση είναι λιγότερες από **m+n-1** (δηλαδή 6 στη συγκεκριμένη περίπτωση), **μία από τις διαδρομές με μηδενικό φορτίο**, από αυτές που μηδενίστηκαν ταυτόχρονα σε κάποια συγκεκριμένη εκχώρηση, θεωρείται για την δημιουργία των κλειστών βρόγχων ως διαδρομή που έχει επιλεγεί με φορτίο 0
- Στην περίπτωση του παραδείγματος μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα ως επιλεγείσα.

Εξετάζουμε τώρα τις οριακές μεταβολές του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην πρώτη επανάληψη της μεθόδου **Stepping Stone**

ΠΡΟΣ: / ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 +	3 150	9 +	350
Βόλος	6 +	3 300	4 0	7 +	300
Θεσ/νίκη	5 +	4 +	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

•Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή φαίνονται στον παραπάνω πίνακα μεταφοράς

•Στα κελιά που αντιστοιχούν σε μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές έχει τοποθετηθεί το σημείο +

•Ακολουθώντας τον κάθε βρόγχο μπορούμε να τοποθετήσουμε εναλλάξ τα σημεία - και +, ώστε σε κάθε περίπτωση να υπάρχει αντιστάθμιση των + και - σε κάθε γραμμή και στήλη

•Τα αποτελέσματα με τους υπολογισμούς της οριακής μεταβολής του συνολικού κόστους μεταφοράς έχουν ως εξής:

Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσης διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόγχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα–Λάρισα	+5	Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα Βόλος–Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα–Ηράκλειο	+9	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Αθήνα Πάτρα–Αθήνα	-8 +6 -3	+4
Βόλος–Ιωάννινα	+6	Πάτρα–Ιωάννινα Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα	-5 +3 -4	0
Βόλος–Ηράκλειο	+7	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Αθήνα Βόλος–Αθήνα	-8 +6 -4	+1
Θεσ/νίκη–Ιωάννινα	+5	Πάτρα–Ιωάννινα Πάτρα–Αθήνα Θεσ/νίκη–Αθήνα	-5 +3 -4	-1
Θεσ/νίκη–Λάρισα	+4	Βόλος–Λάρισα Βόλος–Αθήνα Θεσ/νίκη–Αθήνα	-3 +4 -6	-1

•Παρατηρούμε ότι η επιλογή της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα, όπως και της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, θα μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς κατά 1 μονάδα ανά μονάδα μεταφερόμενης ποσότητας

• Εφόσον η οριακή μεταβολή του κόστους είναι ίδια, επιλέγουμε μία εκ των δυο τυχαία, έστω τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα

•Για να αποφασίσουμε ποια διαδρομή θα αντικατασταθεί από την προσθήκη της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα στις διαδρομές που θα χρησιμοποιηθούν, εξετάζουμε τις αντίστοιχες μεταβολές στον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 − 300	4 + 0	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 +	6 − 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

•Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να εκχωρηθεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα, περιορίζεται από τις διαδρομές με πρόσημο –

•Η μικρότερη τιμή στα κελιά με το σημείο - καθορίζει το φορτίο που θα εκχωρηθεί στη νέα διαδρομή που έχει επιλεγεί, στην προκειμένη περίπτωση τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα

•Από τις δύο διαδρομές του πίνακα με πρόσημο -, τις Βόλος-Λάρισα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα το μικρότερο φορτίο βρίσκεται στη δεύτερη

•Επομένως, εκχωρούμε 250 μονάδες στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα, το οποίο αφαιρείται από τις διαδρομές Βόλος-Λάρισα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα, και προστίθεται στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα

Ο νέος πίνακας μεταφοράς:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 50	4 250	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της νέας βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας

Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Αθήνα	150	3	450
Βόλος–Λάρισα	50	3	150
Βόλος–Αθήνα	250	4	1000
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	250	4	1000
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			5200

•Όπως και στο προηγούμενο βήμα, ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του συνολικού κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα

•Εφόσον για κάθε μεταφερόμενη μονάδα στη διαδρομή αυτή, το συνολικό κόστος μειώνεται κατά 1 μονάδα, η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 250 μονάδων είναι 250 μονάδες, μειώνοντας το κόστος από 5.450 σε 5.200

Stepping Stone: 3η επανάληψη

Η λύση που προέκυψε με το τέλος του 2ου επαναληπτικού βήματος της μεθόδου **Stepping Stone**, δίνεται στον πίνακα μεταφοράς που ακολουθεί:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 50	4 250	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

✓Ο υπολογισμός των οριακών μεταβολών του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες επαναλήψεις της μεθόδου **Stepping Stone**. Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή δίνονται στον παρακάτω πίνακα με φορά σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού:

Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσης διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόγχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα–Λάρισα	+5	Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα Βόλος–Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα–Ηράκλειο	+9	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα Βόλος–Αθήνα Πάτρα–Αθήνα	-8 +4 -3 +4 -3	+3
Βόλος–Ιωάννινα	+6	Πάτρα–Ιωάννινα Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα	-5 +3 -4	0
Βόλος–Ηράκλειο	+7	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα	-8 +4 -3	0
Θεσ/νίκη–Ιωάννινα	+5	Πάτρα–Ιωάννινα Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα Βόλος–Λάρισα Θεσ/νίκη–Λάρισα	-5 +3 -4 +3 -4	-2
Θεσ/νίκη–Αθήνα	+6	Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα Βόλος–Αθήνα	-4 +3 -4	+1

- Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μόνο διαδρομή με αρνητικό συντελεστή οριακού κόστους, αυτή της Θεσ/νίκης-Ιωάννινα, η οποία πρέπει να επιλεγεί
- Για να αποφασίσουμε ποια διαδρομή θα αντικατασταθεί από τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, εξετάζουμε τι$ αντιστοιχεί μεταβολές στον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 − 200	5	3 + 150	9	350
Βόλος	6	3 + 50	4 − 250	7	300
Θεσ/νίκη	5 +	4 − 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

- Για να προσδιορίσουμε το φορτίο που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα εξετάζουμε τις διαδρομές που χαρακτηρίζονται με πρόσημο –
- Η μικρότερη ποσότητα βρίσκεται στη διαδρομή Πάτρα-Ιωάννινα
- Επομένως, εκχωρούμε 200 μονάδες στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, το οποίο αφαιρείται από τις διαδρομές Πάτρα-Ιωάννινα, Βόλος-Αθήνα και Θεσσαλονίκη-Λάρισα (πρόσημο -) και προστίθεται στις διαδρομές Πάτρα-Αθήνα και Βόλος-Λάρισα (πρόσημο +)

Ο νέος πίνακας μεταφοράς:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 350	9	350
Βόλος	6	3 250	4 50	7	300
Θεσ/νίκη	5 200	4 50	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της νέας βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας			
Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος–Λάρισα	250	3	750
Βόλος–Αθήνα	50	4	200
Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	50	4	200
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			4800

•Όπως και με στο προηγούμενο βήμα, ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα

•Εφόσον για κάθε μεταφερόμενη μονάδα το κόστος μειώνεται κατά 2 μονάδες, η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 200 μονάδων είναι 400 μονάδες από το κόστος της προηγούμενης λύσης που ήταν 5200

Stepping Stone: 4η επανάληψη

•Εξετάζουμε τώρα τις οριακές μεταβολές του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες επαναλήψεις της μεθόδου **Stepping Stone** :

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 350	9	350
Βόλος	6	3 250	4 50	7	300
Θεσ/νίκη	5 200	4 50	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

✓Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή δίνονται στον παρακάτω πίνακα με φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού με τα αποτελέσματα των υπολογισμών της οριακής μεταβολής του συνολικού κόστους μεταφοράς:

Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσης διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόγχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα–Ιωάννινα	+5	Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα Βόλος–Λάρισα Θεσ/νίκη–Λάρισα Θεσ/νίκη–Ιωάννινα	-3 +4 -3 +4 -5	+2
Πάτρα–Λάρισα	+5	Πάτρα–Αθήνα Βόλος–Αθήνα Βόλος–Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα–Ηράκλειο	+9	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα Βόλος–Αθήνα Πάτρα–Αθήνα	-8 +4 -3 +4 -3	+3
Βόλος–Ιωάννινα	+6	Βόλος–Λάρισα Θεσ/νίκη–Λάρισα Θεσ/νίκη–Ιωάννινα	-3 +4 -5	+2
Βόλος–Ηράκλειο	+7	Θεσ/νίκη–Ηράκλειο Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα	-8 +4 -3	0
Θεσ/νίκη–Αθήνα	+6	Θεσ/νίκη–Λάρισα Βόλος–Λάρισα Βόλος–Αθήνα	-4 +3 -4	+1

•Παρατηρούμε ότι σε όλες τις μη επιλεγείσες διαδρομές της τελευταίας λύσης, ο συντελεστής οριακού κόστους είναι θετικός, επομένως οποιαδήποτε αλλαγή της λύσης με αντικατάσταση μιας εκ των διαδρομών που έχουν επιλεγεί από μία άλλη, θα είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους

Κριτήριο βέλτιστης λύσης στα προβλήματα μεταφοράς

✓Όταν οι συντελεστές οριακού κόστους για όλες τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί στην τρέχουσα λύση είναι μη αρνητικοί, τότε η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη

Η Μέθοδος Αναθεωρημένης Εκχώρησης (MODI)

•Η μέθοδος **MODI** επιτρέπει τον υπολογισμό των οριακών μεταβολών στο συνολικό κόστος μεταφοράς για κάθε μη επιλεγείσα διαδρομή με αλγεβρικό τρόπο, χωρίς τη διαδικασία σχηματισμού των κλειστών βρόγχων, όπως στη μέθοδο **Stepping Stone**

•Με αυτό τον τρόπο, όταν προσδιοριστεί η διαδρομή που επιφέρει τη μεγαλύτερη μείωση στο συνολικό κόστος μεταφοράς (αν υπάρχει), είναι απαραίτητη πλέον η χάραξη ενός μόνο κλειστού βρόγχου που θα αφορά τη συγκεκριμένη διαδρομή

•Η εφαρμογή της μεθόδου **MODI** ξεκινά από μια οποιαδήποτε αρχική λύση του προβλήματος μεταφοράς (όπως και η **Stepping Stone**) και προσδιορίζει μια νέα λύση με μικρότερο κόστος (αν υπάρχει) μέσω των εξής βημάτων:

1. Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές ως εξής:

R_i = μεταβλητή για τη σειρά i (πηγή προέλευσης).

K_j = μεταβλητή για τη στήλη j (προορισμού).

C_{ij} = το κόστος της αντίστοιχης διαδρομής (από τον πίνακα κόστους μεταφοράς.

2. Οι τιμές των R_i και K_j υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που αντιστοιχούν στα κελιά των διαδρομών που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στην τρέχουσα λύση.

$$R_j + K_j = C_{ij}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένα σύστημα με $m+n-1$ εξισώσεις και $m+n$ αγνώστους.

3. Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών R_j και K_j θέτοντας $R_1=0$ και λύνοντας το σύστημα ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές.

4. Υπολογίζουμε το δείκτη βελτίωσης (οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους μεταφοράς) για κάθε μη χρησιμοποιηθείσα στην τρέχουσα λύση διαδρομή ως εξής:

$$\text{Δείκτης Βελτίωσης} = C_{ij} - (R_i + K_j)$$

5. Επιλέγουμε τη διαδρομή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη για να χρησιμοποιηθεί στη νέα βελτιωμένη λύση.

6. Τροποποιούμε τα φορτία των διαδρομών με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήθηκε στη μέθοδο Stepping Stone.

Ας εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου **MODI** μέσα από το προηγούμενο παράδειγμα.

Θεωρούμε λοιπόν την αρχική λύση που προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου της "ΒΔ Γωνίας" και τις μεταβλητές R_i και K_j για κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα:

		K_1	K_2	K_3	K_4	
	ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
R_1	Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
R_2	Βόλος	6	3 150	4 150	7	300
R_3	Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
	Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Οι εξισώσεις του βήματος 2 της μεθόδου MODI έχουν ως εξής:

Διαδρομή	Εξίσωση
Πάτρα–Ιωάννινα	$R_1 + K_1 = 5$
Πάτρα–Λάρισα	$R_1 + K_2 = 5$
Βόλος–Λάρισα	$R_2 + K_2 = 3$
Βόλος–Αθήνα	$R_2 + K_3 = 4$
Θεσσαλονίκη–Αθήνα	$R_3 + K_3 = 6$
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	$R_3 + K_4 = 6$

Θέτοντας $R_1 = 0$, υπολογίζουμε διαδοχικά τις εξής τιμές για τις υπόλοιπες μεταβλητές:

$$R_1 = 0$$

$$\begin{array}{lcl}
0 + K_1 = 5 & \Rightarrow & K_1 = 5 \\
0 + K_2 = 5 & \Rightarrow & K_2 = 5 \\
R_2 + 5 = 3 & \Rightarrow & R_2 = -2 \\
-2 + K_3 = 4 & \Rightarrow & K_3 = 6 \\
R_3 + 6 = 6 & \Rightarrow & R_3 = 0 \\
0 + K_4 = 8 & \Rightarrow & K_4 = 8
\end{array}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το δείκτη βελτίωσης που εκφράζει την οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους για τη χρήση κάθε μίας από τις μη χρησιμοποιηθείσες διαδρομές στην τρέχουσα λύση σύμφωνα με τον τύπο: $C_{ij}-(R_i+K_j)$

Διαδρομή	$C_{ij}-(R_j+K_j)$	
Πάτρα–Αθήνα	$C_{13}-(R_1+K_3)$:	3–0–6 = -3
Πάτρα–Ηράκλειο	$C_{14}-(R_1+K_4)$:	9–0–8 = 1
Βόλος–Ιωάννινα	$C_{21}-(R_2+K_1)$:	6–(-2)–5 = 3
Βόλος–Ηράκλειο	$C_{24}-(R_2+K_4)$:	7 -(-2)–8 = 1
Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα	$C_{31}-(R_3+K_1)$:	5–0 -5 = 0
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	$C_{32}-(R_3+K_2)$:	4–0–5 = -1

•Η διαδρομή που πρέπει να επιλεγεί είναι η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα που αντιστοιχεί στον μικρότερο αρνητικό συντελεστή μεταβολής του κόστους

•Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι δείκτες βελτίωσης για κάθε διαδρομή είναι ακριβώς οι ίδιοι που είχαν υπολογιστεί με τους κλειστούς βρόγχους της μεθόδου **Stepping Stone**

•Επομένως το κριτήριο βελτιστοποίησης ικανοποιείται όταν όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί ή μηδέν

•Από το σημείο αυτό και μετά, ο προσδιορισμός της επόμενης λύσης ακολουθεί την ίδια μεθοδολογία που περιγράψαμε στη μέθοδο **Stepping Stone**

•Προσδιορίζεται το φορτίο που μπορεί να μεταφερθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, και ακολούθως τροποποιούνται τα φορτία των άλλων διαδρομών ώστε να καλύπτεται η συνολική διαθέσιμη και η συνολική ζητούμενη ποσότητα, και συνεχίζονται οι επαναλήψεις έως ότου βρεθεί η βέλτιστη λύση

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΕΩΝ

•Πρόβλημα της ανάθεσης ή αντιστοίχησης ή εκχώρησης

•Αποτελεί ένα από τα ειδικής μορφής προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και ακριβέστερα αποτελεί μια απλούστευση του προβλήματος μεταφοράς

•Προκύπτει όταν οι δραστηριότητες (έργα, γεωγραφικές περιοχές, διαδικασίες) μπορούν να εκτελεστούν από, ή να αντιστοιχηθούν σε m διαφορετικούς πόρους (μηχανήματα, άτομα κ.ά.)

- •όπου το κόστος εκτέλεσης κάθε δραστηριότητος ή το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι διαφορετικό και εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ανάθεση της σε ένα συγκεκριμένο πόρο (λόγω εξειδίκευσης, εμπειρίας, καταλληλότητας ή και άλλων παραγόντων)

• Το αντικείμενο των προβλημάτων ανάθεσης είναι η αντιστοίχηση πόρων σε δραστηριότητες, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος ή να μεγιστοποιείται το αποτέλεσμα

•Ο μόνος περιορισμός του προβλήματος είναι ότι ο κάθε πόρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε μία δραστηριότητα και η κάθε δραστηριότητα θα χρησιμοποιήσει μόνο ένα πόρο

Παράδειγμα

Μια επιχείρηση διαθέτει πέντε (5) πωλητές στους οποίους πρόκειται να αναθέσει τις πωλήσεις των προϊόντων της σε πέντε γεωγραφικές περιοχές: Αττική, Μακεδονία, Κεντρική Ελλάδα, Πελοπόννησο και Κρήτη. Με βάση την προηγούμενη εμπειρία των πωλητών από πωλήσεις άλλων προϊόντων σε διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές, η επιχείρηση κατέληξε στον παρακάτω πίνακα στον οποίο φαίνονται οι εκτιμήσεις για το αναμενόμενο ύψος των πωλήσεων σε εκατομμύρια ευρώ από την πιθανή δραστηριοποίηση κάθε πωλητή σε κάθε διαφορετική γεωγραφική περιοχή.

Το πρόβλημα της επιχείρησης είναι ο προσδιορισμός του γεωγραφικού τομέα που θα ανατεθεί σε κάθε πωλητή ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

Διατύπωση Προβλημάτων Αναθέσεων

•Έστω ότι διαθέτουμε m δραστηριότητες οι οποίες πρέπει να ανατεθούν σε m διαθέσιμους πόρους, έτσι η ανάθεση κάθε πόρου i (i =1,2,3, ..., m), σε κάθε δραστηριότητας 0=1,2,3, ..., m), δημιουργεί ένα κόστος (ή κέρδος) C_{ij}

•Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί η αντιστοίχηση των πόρων στις δραστηριότητες με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος (ή αντίστοιχα να μεγιστοποιείται το κέρδος)

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς έχει ως εξής:

✓**Μεταβλητές**

Για κάθε συνδυασμό πόρου i και δραστηριότητος j ορίζουμε τη μεταβλητή: X_{ij} =1 αν ο πόρος i χρησιμοποιηθεί στη δραστηριότητα j, ή 0 αν δεν χρησιμοποιηθεί

✓**Αντικειμενική Συνάρτηση**

Ελαχιστοποίηση Κόστους ή Μεγιστοποίηση Κέρδους Αναθέσεων: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$

Στη αντικειμενική συνάρτηση κόστους λαμβάνονται υπ' όψη μόνο εκείνα τα στοιχεία C_{ij} για τα οποία ισχύει η ανάθεση του πόρου i στη δραστηριότητα j, οπότε η αντίστοιχη μεταβλητή X_{ij} έχει την τιμή 1

Περιορισμοί

Κάθε "πόρος" i θα χρησιμοποιηθεί μόνο σε μία από τις δραστηριότητες. Επομένως, για κάθε i υπάρχει μόνο ένα j για το οποίο το X_{ij} είναι ίσο με 1.

$\sum_{j=1}^{m} X_{ij}=1$ Επομένως, υπάρχουν m τέτοιοι περιορισμοί για $i= 1,2,3, ..., m$.

Ομοίως, κάθε δραστηριότητα j θα χρησιμοποιήσει μόνο έναν πόρο. Άρα, για κάθε j υπάρχει μόνο ένα i για το οποίο το Xij είναι ίσο με 1.

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}=1$ Επομένως, υπάρχουν m τέτοιοι περιορισμοί για $j= 1,2,3, ..., m$.

Τα δεδομένα ενός προβλήματος αναθέσεων είναι μόνο το κόστος ανάθεσης κάθε δραστηριότητας σε κάθε πόρο και καταγράφονται σε μορφή πίνακα ως εξής:

✓Πίνακας κόστους αναθέσεων

	Δραστηριότητα j			
Πόροι i	**1**	**2**	**...**	**m**
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1m}
2	C_{21}	C_{21}	...	C_{2m}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mm}

- Στην περίπτωση όπου το πλήθος των δραστηριοτήτων είναι διαφορετικό από το πλήθος των διαθέσιμων πόρων, εισάγονται τεχνητοί πόροι ή τεχνητές δραστηριότητες με μηδενικό κόστος, όπως και στο πρόβλημα μεταφοράς
- Αν μια συγκεκριμένη αντιστοίχηση δεν είναι τεχνικά δυνατή, τότε στην αντίστοιχη θέση θέτουμε ως κόστος έναν πολύ μεγάλο αριθμό (M), ώστε στη διαδικασία ελαχιστοποίησης του κόστους να αποφευχθεί η συγκεκριμένη αντιστοίχηση

Επίλυση Προβλημάτων Αναθέσεων: Η "Ουγγρική Μέθοδος"

•Το πλήθος των εφικτών λύσεων σε ένα πρόβλημα ανάθεσης με m δραστηριότητες και m πόρους είναι ίσο με m![6]

•Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των εφικτών λύσεων αυξάνεται με εκρηκτικό ρυθμό με το μέγεθος του προβλήματος

•Για να αντιληφθούμε τον εκρηκτικό ρυθμό αύξησης του αριθμού των λύσεων, αρκεί να αναλογιστούμε ότι σε ένα πρόβλημα με 5 δραστηριότητες υπάρχουν

5! = 120 εφικτές λύσεις

- •αλλά, αν οι δραστηριότητες διπλασιασθούν, το αντίστοιχο πρόβλημα με 10 δραστηριότητες έχει 3,628,800 εφικτές λύσεις
- •ενώ ένα πρόβλημα με 15 δραστηριότητες έχει 373,621,248,000 εφικτές λύσεις
- •Επομένως, είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογιστεί το κόστος όλων των λύσεων για να επιλεγεί η βέλτιστη

✓Ο πιο γνωστός από τους ειδικούς αλγόριθμους που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των προβλημάτων ανάθεσης αναφέρεται με την ονομασία **Ουγγρική Μέθοδος**

✓Η "Ουγγρική Μέθοδος" είναι μια επαναληπτική μέθοδος που περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας:

Από τον πίνακα κόστους ή κερδών του προβλήματος ανάθεσης δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας ως *εξής:*

•Αφαίρεση του μικρότερου κόστους σε κάθε γραμμή του αρχικού πίνακα κόστους από όλα τα στοιχεία της γραμμής. Στην περίπτωση προβλημάτων μεγιστοποίησης, επιλέγουμε το μεγαλύτερο κέρδος σε κάθε γραμμή και παίρνουμε τις διαφορές των υπολοίπων στοιχείων από αυτό. Με τον τρόπο αυτό, σε κάθε γραμμή υπάρχει το στοιχείο 0 στη θέση που αντιστοιχεί στην προτιμητέα ανάθεση στη συγκεκριμένη γραμμή

• Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στις στήλες του πίνακα που προέκυψε παραπάνω με αφαίρεση του μικρότερου στοιχείου σε κάθε στήλη από όλα τα στοιχεία της στήλης. Μετά και από αυτή τη μετατροπή υπάρχει τουλάχιστο ένα μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα.

Βήμα 2: Ελέγχουμε αν ο πίνακας που προέκυψε από το βήμα 1, δίνει τη βέλτιστη ανάθεση

Ο έλεγχος γίνεται με τον εξής τρόπο:

•Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών. Αν ο αριθμός των γραμμών που απαιτούνται είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντιστοίχηση που θα δώσει το μικρότερο κόστος. Προχωρούμε στο βήμα 4. Αλλιώς, συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα

Βήμα 3: Αναπροσαρμογή των τιμών του πίνακα ως εξής:

•Αφαιρούμε το μικρότερο στοιχείο του πίνακα που δεν καλύπτεται με γραμμές από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που επίσης δεν καλύπτονται, ενώ το προσθέτουμε σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στα σημεία τομής των γραμμών που τραβήχτηκαν στο βήμα 2

• Αφήνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία μεταβλητά. Επιστρέφουμε στο βήμα 2

Βήμα 4: Εκτελούμε την αντιστοίχηση δραστηριοτήτων και πόρων.

•Ξεκινούμε από μια σειρά ή μια στήλη η οποία έχει μόνο ένα μηδενικό

•Αναθέτουμε τον πόρο που αντιστοιχεί στη γραμμή, στη δραστηριότητα που αντιστοιχεί στη στήλη

• Διαγράφουμε τον πόρο και τη δραστηριότητα και προχωρούμε με το υπόλοιπο τμήμα του πίνακα με τον ίδιο τρόπο

• Αν δεν υπάρχει σειρά ή στήλη με ένα μόνο μηδενικό, διαλέγουμε τη σειρά ή στήλη με δύο μηδενικά και επιλέγουμε ένα από αυτά

•Είναι ευνόητο ότι σε αυτή την περίπτωση μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις

Εφαρμογή του αλγόριθμου της "Ουγγρικής Μεθόδου" στο συγκεκριμένο παράδειγμα που αναφέραμε

Βήμα 1. *Δημιουργία Πίνακα Κόστους Ευκαιρίας*
Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, επομένως στο πρώτο βήμα επιλέγουμε το μεγαλύτερο "κέρδος" σε κάθε σειρά (γεωγραφική περιοχή) και από αυτό αφαιρούμε τα υπόλοιπα της σειράς.

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	26	14	10	12	9
Μακ.	31	27	30	14	16
Κ. Ε.	20	19	16	25	10
Πελ.	17	12	21	30	25
Κρ.	15	18	16	25	30

Αφαίρεση τις τιμής σε κάθε κελί από το μεγαλύτερο κέρδος σε κάθε σειρά

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	12	16	14	17
Μακ.	0	4	1	17	15
Κ. Ε.	5	6	9	0	15
Πελ.	13	18	9	0	5
Κρ.	15	12	14	5	0

Για παράδειγμα, το μεγαλύτερο "κέρδος" για την περιοχή της Αττικής (πρώτη σειρά) προκύπτει όταν η περιοχή ανατεθεί στον πωλητή Α (κέρδος 26). Επομένως, τυχόν ανάθεσή της στον πωλητή Β, θα έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μικρότερου κέρδους (συγκεκριμένα 14 μονάδων). Η διαφορά 26-14 αποτελεί το "κόστος ευκαιρίας" για την περίπτωση της ανάθεσης της Αττικής στον πωλητή Β, διότι ενώ υπήρχε η ευκαιρία να πραγματοποιηθεί κέρδος 26 μονάδων με ανάθεση στον Α, πραγματοποιούμε κέρδος μόνο 14 μονάδων (διαφορά 12) όταν γίνει ανάθεση στον Β. Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα: Αν η Κρήτη ανα-

τεθεί στον πωλητή Γ το κόστος χαμένης ευκαιρίας είναι 14, διότι τόση είναι η διαφορά μεταξύ της καλύτερης ανάθεσης που θα μπορούσε να γίνει (πωλητής Ε - κέρδος 30) και της ανάθεσης της Κρήτης στον Γ με κέρδος μόνο 16.

Επομένως, σε κάθε σειρά υπάρχει ένα μηδέν στη θέση που αντιστοιχεί στην καλύτερη ανάθεση της περιοχής. Προφανώς οι θέσεις των μηδέν υποδεικνύουν πιθανές αναθέσεις. Αυτό όμως στο συγκεκριμένο στάδιο δεν είναι δυνατό, γιατί οι περιοχές για παράδειγμα Αττικής και Μακεδονίας θα έπρεπε να ανατεθούν και οι δύο στον πωλητή Α, ενώ αυτό δεν είναι εφικτό εφόσον ο κάθε πωλητής αναλαμβάνει μια περιοχή και αντίστροφα, κάθε περιοχή ανατίθεται σε έναν πωλητή.

Το επόμενο βήμα είναι η αφαίρεση του μικρότερου στοιχείου κάθε στήλης από τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης. Με αυτό τον τρόπο κάθε στήλη και κάθε σειρά περιέχει τουλάχιστον ένα μηδέν. Η εφαρμογή αυτής της διαδικασίας στο δεύτερο πίνακα δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα:

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	14	17
Μακ.	0	0	0	17	15
Κ. Ε.	5	2	8	0	15
Πελ.	13	14	8	0	5
Κρ.	15	8	13	5	0

Παρατηρούμε ότι επειδή στις στήλες των πωλητών Α, Δ και Ε υπήρχε ήδη ένα μηδενικό στοιχείο, αυτό είναι και το μικρότερο στοιχείο της στήλης, και επομένως η αφαίρεσή του από τα υπόλοιπα δεν αλλάζει τα στοιχεία των αντίστοιχων στηλών. Αντίθετα, στις στήλες Β και Γ το μικρότερο στοιχείο ήταν το 4 και το 1 αντίστοιχα, και επομένως τα αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία των αντίστοιχων στηλών με αποτέλεσμα να προκύψουν μηδενικά στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2. Έλεγχος Βέλτιστης Ανάθεσης

Προσπαθούμε να καλύψουμε όλα τα μηδενικά του πίνακα που προέκυψε με τον ελάχιστο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών. Αν ο αριθμός των γραμμών είναι 5 όσες και οι σειρές και στήλες του πίνακα, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη ανάθεση.

Περιοχή	Πωλητές				
	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	~~0~~	~~8~~	~~15~~	~~14~~	~~17~~
Μακ.	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~17~~	~~15~~
Κ. Ε.	5	2	8	~~0~~	~~15~~
Πελ.	13	14	8	~~0~~	~~5~~
Κρ.	15	8	13	~~5~~	~~0~~

•Στην περίπτωση του πίνακα του παραδείγματος, η κάλυψη όλων των μηδενικών στοιχείων μπορεί να γίνει με μόνο 4 γραμμές, όπως φαίνεται παραπάνω
•Είναι απαραίτητη η συνέχιση της μεθόδου με το επόμενο Βήμα

Βήμα 3: Αναπροσαρμογή τιμών πίνακα

•Το μικρότερο μη καλυπτόμενο από γραμμές στοιχείο είναι το 2 που αντιστοιχεί στην ανάθεση Κεντρική Ελλάδα - Πωλητής Β.
•Αφαιρούμε το στοιχείο 2 από όλα τα μη καλυπτόμενα με γραμμές στοιχεία, και το προσθέτουμε στις διασταυρώσεις των γραμμών (Αττική - Δ, Αττική - Ε, Μακεδονία - Δ, Μακεδονία - Ε)
•Αφήνουμε τα υπόλοιπα καλυπτόμενα με γραμμές στοιχεία αμετάβλητα
•Το αποτέλεσμα δίνεται στον παρακάτω πίνακα (αριστερά)
•Η κάλυψη των μηδενικών στοιχείων στον πίνακα που προέκυψε απαιτεί 5 γραμμές και δεν υπάρχει τρόπος να γίνει με λιγότερες όπως φαίνεται στον δεξιό πίνακα
•Επομένως, μπορούμε να κάνουμε τις αναθέσεις που αντιστοιχούν σε Βέλτιστη λύση ακολουθώντας το Βήμα 4 της Ουγγρικής μεθόδου

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	~~Β~~	Γ	~~Δ~~	~~Ε~~
Αττ.	~~0~~	~~8~~	~~15~~	~~16~~	~~19~~
Μακ.	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~19~~	~~17~~
Κ. Ε.	3	~~0~~	6	~~0~~	~~15~~
Πελ.	11	~~12~~	6	~~0~~	~~5~~
Κρ.	13	~~6~~	11	~~5~~	~~0~~

Διαδικασία Βέλτιστης Ανάθεσης

Βήμα 4. Αναθέσεις δραστηριοτήτων σε πόρους

•Προσδιορίζουμε μια περιοχή (γραμμή) ή έναν πωλητή για τον οποίο η αντίστοιχη σειρά ή στήλη περιέχει ένα μόνο μηδενικό στοιχείο
•Η πρώτη περιοχή, η Αττική, περιλαμβάνει ένα μόνο μηδέν
•Η θέση του μηδέν υποδεικνύει ανάθεση

Άρα, η Αττική ανατίθεται στον πωλητή Α, και διαγράφουμε την περιοχή και τον πωλητή από τη συνέχεια της διαδικασίας

•Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την προσπάθεια ανεύρεσης περιοχής ή πωλητή με ένα μόνο μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη σειρά ή στήλη στο υπόλοιπο τμήμα του πίνακα (διαγράφοντας την Αττική και τον πωλητή Α)

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

•Στη σειρά της Πελοποννήσου Ελλάδος υπάρχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο που αντιστοιχεί στον πωλητή Δ

•Άρα, γίνεται η ανάθεση Πελοπόννησος - Πωλητής Δ

•Στον τμήμα του πίνακα που απομένει, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο η Κεντρική Ελλάδα ανατίθεται στον πωλητή Β και ακολούθως η Μακεδονία ανατίθεται στον Πωλητή Γ και η Κρήτη στον Πωλητή Ε

•Με έντονα στοιχεία δηλώνονται οι αναθέσεις

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

Υπολογισμός κόστους η κέρδους της βέλτιστης ανάθεσης

- Το συνολικό κόστος ή κέρδος της βέλτιστης ανάθεσης προκύπτει από την πρόσθεση των στοιχείων του αρχικού πίνακα που αντιστοιχούν στις αναθέσεις

	Πωλητές				
Περιοχή	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	**26**	14	10	12	9
Μακ.	31	27	**30**	14	16
Κ. Ε.	20	**19**	16	25	10
Πελ.	17	12	21	**30**	25
Κρ.	15	18	16	25	**30**

Μέγιστο κέρδος: 26 + 30 +19 + 30 + 30 = 135