ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ελαχιστοποίηση κόστους διατροφής

Η επιχείρηση ζωοτροφών ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ εξασφάλισε μια ειδική παραγγελία από έναν πελάτη της για την παρασκευή 1.000 κιλών ζωοτροφής, η οποία θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 30% πρωτεΐνες και 40% υδατάνθρακες. Για την παραγωγή της συγκεκριμένης παρτίδας, ο υπεύθυνος παραγωγής της εταιρείας ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ αποφάσισε να αναμείξει μια εισαγόμενη πλούσια σε θρεπτικά υλικά τροφή, με ιχθυάλευρο και δημητριακά, ώστε να μειώσει το κόστος, ικανοποιώντας όμως τις ελάχιστες διαιτητικές απαιτήσεις του πελάτη σε περιεκτικότητα πρωτεϊνών και υδατανθράκων.

Η εισαγόμενη τροφή έχει περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες, και κοστίζει 1 ευρώ το κιλό. Το ιχθυάλευρο έχει περιεκτικότητα 25% πρωτεΐνες και 20% υδατάνθρακες και κοστίζει 0,7 ευρώ το κιλό, ενώ τα δημητριακά με περιεκτικότητα 20% και 40%, αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες έχουν κόστος 0,8 ευρώ το κιλό.

Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθούν οι ποσότητες που θα πρέπει να αναμείξει ο υπεύθυνος παραγωγής ώστε να επιτύχει το μικρότερο δυνατό κόστος, ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις ελάχιστες απαιτήσεις του πελάτη σε θρεπτικά υλικά.

	Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες (%)	Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες (%)	Κόστος (€/κιλό)
Εισαγόμενη Τροφή	40%	40%	1
Ιχθυάλευρο	25%	20%	0,7
Δημητριακά	20%	40%	0,8

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Μεταβλητές του Προβλήματος:

•Ο υπεύθυνος παραγωγής πρέπει να προσδιορίσει τις ποσότητες από κάθε υλικό που θα πρέπει να αναμείξει

•Ορίζουμε τις μεταβλητές:

- •X_1 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Εισαγόμενης Τροφής
- •X_2 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Ιχθυάλευρου
- •X_3 = Ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) Δημητριακών

Αντικειμενική Συνάρτηση

✓Στόχος του υπευθύνου παραγωγής είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των 1000 κιλών ζωοτροφής

•Με βάση τις τιμές ανά κιλό των ποσοτήτων X_1, X_2 και X_3

- **το συνολικό κόστος των 1000 κιλών** της τροφής είναι $1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3$

•**Η αντικειμενική συνάρτηση** διατυπώνεται ως:

<u>Ελαχιστοποίηση Κόστους</u>: $\mathbf{1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3}$

Περιορισμοί

•Η συνολική ποσότητα ζωοτροφής που θα παρασκευαστεί πρέπει να είναι 1000 κιλά

Επομένως:

•Συνολική ποσότητα παραγωγής: $X_1 + X_2 + X_3 = 1000$

•Η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών που θα περιέχεται στη ζωοτροφή πρέπει να αποτελεί τουλάχιστον το 30% της συνολικής ποσότητας της τροφής

•Αφού θα παραχθούν ακριβώς 1000 κιλά ζωοτροφής, η ποσότητα των πρωτεϊνών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 300 κιλά

Περιορισμοί

•Κάθε κιλό εισαγομένης τροφής περιέχει 40% πρωτεΐνες, επομένως τα X_1 κιλά που θα χρησιμοποιηθούν περιέχουν $0,40X_1$ κιλά πρωτεϊνών

• αν λάβουμε υπόψη τις αντίστοιχες περιεκτικότητες σε πρωτεΐνες του ιχθυάλευρου και των δημητριακών από τον πίνακα, έχουμε:

- •πρωτεΐνες σε X_2 κιλά ιχθυάλευρου = $0,25X_2$
- •πρωτεΐνες σε X_3 κιλά δημητριακών = $0,20X_3$

•Επομένως, **η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών** που θα περιέχεται στο μείγμα θα είναι $0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3$ κιλά

•Η μαθηματική διατύπωση του περιορισμού είναι:

Περιεκτικότητα σε Πρωτεΐνες (Kgr): $0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 \geq 300$

Περιεκτικότητα σε Υδατάνθρακες (Kgr): $0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 \geq 400$

Το μαθηματικό μοντέλο ΓΠ του προβλήματος

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 \geq 300$
(Υδατάνθρακες):	$0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 \geq 400$
	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Μεταβλητές πλεονασμού σε περιορισμούς τύπου ≥

✓Οι περιορισμοί του προβλήματος ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ είναι διαφορετικού τύπου από τους αντίστοιχους του παραδείγματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

- ο πρώτος περιορισμός είναι περιορισμός ισότητας
- οι δύο τελευταίοι περιορισμοί είναι τύπου πλεονασμού ≥ (μεγαλύτερου ή ίσου), θέτουν δηλαδή ένα ελάχιστο όριο που πρέπει να ικανοποιεί η λύση του προβλήματος

Το δεξιό μέλος των περιορισμών

Αλγεβρικά κάθε περιορισμός τύπου ≥ μπορεί να μετατραπεί σε περιορισμό τύπου ≤ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας με -1. Η μετατροπή αυτή δεν είναι δυνατό να γίνει στην εφαρμογή της μεθόδου Simplex.

Η εφαρμογή τhς μεθόδου Simplex απαιτεί να υπάρχουν θετικές ποσότητες στο δεξιό μέλος κάθε περιορισμού (οι τιμές των δεξιών μελών των περιορισμών δίνουν τη λύση στον αρχικό πίνακα Simplex, και ότι οι εφικτές λύσεις είναι μη αρνητικές)

✓Ας θεωρήσουμε τον περιορισμό των πρωτεϊνών

•Η ποσότητα πρωτεϊνών που θα περιέχεται στο μείγμα θα είναι είτε ακριβώς 300 κιλά ή περισσότερη

•Έστω S_2 η ποσότητα πρωτεϊνών που υπερβαίνει το ελάχιστο όριο των 300 κιλών (πλεονάζουσα ποσότητα)

  - •Αν η ποσότητα αυτή αφαιρεθεί από το αριστερό μέλος της ανισότητας, τότε θα έχουμε ακριβώς 300 κιλά πρωτεϊνών

Όπως συνέβη και με τον ορισμό μεταβλητών περιθωρίου στις ανισότητες τύπου ≤ που προστίθενται στο αριστερό μέλος της ανισότητας, για περιορισμούς ανισοτήτων τύπου ≥ ορίζουμε **μεταβλητές πλεονασμού** οι οποίες αφαιρούνται από το αριστερό μέλος της ανισότητας για να μετατραπεί αυτή σε ισότητα

•Με τη χρήση της μεταβλητής πλεονασμού, η δεύτερη ανισότητα μετατρέπεται σε:

$0{,}40X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 - S_2 = 300$

Η έννοια της μεταβλητής πλεονασμού

✓Η έννοια της μεταβλητής πλεονασμού είναι αντίστοιχη με αυτή που εξηγήθηκε στους περιορισμούς τύπου ≤

•αν η τιμή της S_2 είναι μηδενική, τότε η ποσότητα πρωτεϊνών είναι αυτή που ορίζεται από τον περιορισμό, δηλαδή η ελάχιστη επιτρεπόμενη

•αν αντίθετα είναι θετική, τότε στο συνολικό μείγμα της τροφής υπάρχει πλεόνασμα πρωτεϊνών, δηλαδή ποσότητα μεγαλύτερη από τα 300 κιλά όπως ορίζεται από τις ελάχιστες διατροφικές απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούνται

•αν συμβολίσουμε με S_3 την πλεονάζουσα ποσότητα υδατανθράκων που μπορεί να περιέχεται στα 1000 κιλά της τροφής (πάνω από το ελάχιστο όριο των 400 κιλών), ο τρίτος περιορισμός του προβλήματος διαμορφώνεται σε:

$$0{,}40X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}40X_3 - S_3 = 400$$

Η διατύπωση του προβλήματος ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ σε κανονική μορφή ΓΠ, με τη χρήση των μεταβλητών πλεονασμού

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0{,}40X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 - S_2 = 300$
(Υδατάνθρακες):	$0{,}40X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}40X_3 - S_3 = 400$
$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3 \geq 0$	

✓Σε περιορισμούς του τύπου -μεγαλύτερο ή ίσο- οι μεταβλητές πλεονασμού εκφράζουν τις ποσότητες που είναι πέραν των ελάχιστων απαιτήσεων των περιορισμών

Τεχνητές (μη πραγματικές) Μεταβλητές

Η μεθοδολογία της μεθόδου Simplex που αναπτύξαμε στις προηγούμενες ενότητες, βασίζεται σε μια επαναληπτική μέθοδο αναζήτησης τής βέλτιστης λύσης

Ως αρχική λύση εκκίνησης της μεθόδου Simplex θεωρήσαμε την απλούστερη λύση που προέκυπτε όταν θέτουμε όλες τις αρχικές μεταβλητές του προβλήματος (X_1, X_2, X_3) ίσες με μηδέν

•Αν και σε αυτό το πρόβλημα ακολουθηθεί η ίδια προσέγγιση και θέσουμε $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ και $X_3 = 0$, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τεχνικά προβλήματα

•Καταρχήν ο πρώτος περιορισμός είναι αδύνατος διότι προκύπτει το αποτέλεσμα $0 = 1000$

Αυτό συμβαίνει διότι ο πρώτος περιορισμός στην αρχική του μορφή ήταν ένας περιορισμός ισότητας και επομένως, δεν χρησιμοποιήθηκε μεταβλητή περιθωρίου ή μεταβλητή πλεονασμού.

Στους δύο επόμενους περιορισμούς προκύπτουν οι λύσεις $S_2 = -300$ και $S_3 = -400$, οι οποίες δεν είναι αποδεκτές διότι έχουν αρνητικές τιμές

✓Για να ξεπερασθεί το πρόβλημα αυτό και να μπορέσουμε να έχουμε μία αρχική εφικτή λύση για τη μέθοδο Simplex, ώστε να ακολουθηθεί η διαδικασία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στα προβλήματα όπου όλοι οι περιορισμοί ήταν του τύπου ≤, κάνουμε το εξής τέχνασμα:

✓Για κάθε περιορισμό ο οποίος είναι είτε ισότητα είτε ανισότητα τύπου ≥, εισάγουμε μία **τεχνητή μεταβλητή**

✓π.χ, **ο πρώτος περιορισμός με την εισαγωγή μιας τεχνητής μεταβλητής** θα γραφτεί ως εξής: $\mathbf{X_1+X_2+X_3 \quad + A_1 = 1000}$

•Η A_1 είναι μια τεχνητή μεταβλητή

•Τι σημαίνει αυτό; Δεν υπάρχει φυσική ερμηνεία της μεταβλητής αυτής όπως υπάρχει για τις αρχικές μεταβλητές X_1, X_2, X_3 και για τις μεταβλητές πλεονασμού S_2 και S_3

•Δεύτερον, εφόσον η A_1 δεν αντιπροσωπεύει καμία φυσική ποσότητα, η τιμή της θα πρέπει τελικά να είναι 0

• Πώς μπορεί να υποχρεώσουμε την A_1 να λάβει την τιμή μηδέν μέσα από τη διαδικασία Simplex;

- •αν θεωρήσουμε ότι το αντίστοιχο κόστος της μεταβλητής A_1 είναι πάρα πολύ μεγάλο, και επομένως εφόσον στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, η διαδικασία Simplex θα οδηγήσει από μόνη της την τιμή της A_1 στο μηδέν.

- •συμβολικά θα θεωρήσουμε ότι το κόστος κάθε μονάδος της τεχνητής μεταβλητής A_1, όπως και κάθε τεχνητής μεταβλητής, είναι ίσο με Μ (**όπου Μ ένας "πολύ μεγάλος" αριθμός**)

Το πρόβλημα ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ σε κανονική μορφή ΓΠ μετά την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών στους περιορισμούς του προβλήματος και στην αντικειμενική συνάρτηση

Ελαχιστοποίηση της $1X_1 + 0,7X_2 + 0,8X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$

Υπό τους περιορισμούς:

(Ποσότητα): $X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 1000$

(Πρωτεΐνες): $0,40X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 - S_2 + A_2 = 300$

(Υδατάνθρακες): $0,40X_1 + 0,20X_2 + 0,40X_3 - S_3 + A_3 = 400$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

Ο πρώτος πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό είναι ο Πίνακας Ε.1

•οι βασικές μεταβλητές στον αρχικό πίνακα Simplex είναι οι τεχνητές μεταβλητές.

•οι τιμές όλων των άλλων μεταβλητών στον αρχικό πίνακα είναι μηδέν

- Η λύση που αντιστοιχεί στον πρώτο αυτό πίνακα είναι A_1=1000, A_2=300 και A_3=400
- Το κόστος αυτής της λύσης είναι 1700M.

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	*1000/1=1000*
M	A_2	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	300	*300/0,4=750* →
M	A_3	0,4	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	400	*400/0,4=1000*
	Z_j	1,8M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M		1700M
	$C_j - Z_j$	1-1,8M ↑	0,7 -1,45M	0,8 -1,6M	M	M	0	0	0		

Πίνακας Ε.1

•Η σειρά Z_j δηλώνει τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μία μη βασική μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα

π.χ στήλη X_1:

• Αν η τιμή της X_1 αυξηθεί κατά μία μονάδα, οι τιμές των A_1, A_2 και A_3 θα μειωθούν κατά 1, 0,4 και 0,4 μονάδες αντίστοιχα

• Επειδή οι συντελεστές κόστους των A_1, A_2 και A_3 έχουν όλοι την τιμή M, η συνολική μείωση κόστους όταν η X_1 αυξηθεί κατά 1 μονάδα είναι 1M+0,4M+0,4M = 1,8M, όπως παρατηρούμε στη σειρά Z_j για τη μεταβλητή X_1.

•Επομένως, στη σειρά C_j - Z_j η τιμή της X_1 μεταβλητής θα είναι η διαφορά της τιμής της C_1(1) μείον την τιμή της Z_1 (1,8M)

• Αν η X_1 αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε το κόστος θα αυξηθεί κατά 1 - 1,8M.

•Επειδή ο M είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός η ποσότητα 1 - 1,8M είναι αρνητικός αριθμός, το οποίο σημαίνει ότι αύξηση της X_1 κατά 1 μονάδα θα έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του κόστους

•

•Το ίδιο συμβαίνει και με τις τιμές των μεταβλητών X_2 και X_3 στη σειρά C_j - Z_j

•(βλέπε Πίνακα Ε.1). Μεταξύ όλων αυτών των αρνητικών τιμών η μικρότερη είναι αυτή που έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M, δηλαδή η τιμή που αντιστοιχεί στην X_1

Επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση

✓Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση στα προβλήματα ελαχιστοποίησα γίνεται με παρόμοιο τρόπο

✓Από τη σειρά C_j - Z_j επιλέγουμε τη μεταβλητή εκείνη με τη μικρότερη (αρνητική τιμή C_j - Z_j)

✓Η επιλογή αυτής της μεταβλητής θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη μείωση του κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης

✓Στον αρχικό πίνακα Simplex (ΠίνακαςΕ.1) η μεταβλητή με το μικρότερη τιμή στη σειρά C_j - Z_j είναι η X_1, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του Μ.

Η επιλογή της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί από τη X_1 πραγματοποιείται με τους κανόνες του βήματος 3 της μεθόδου Simplex, όπως και στο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

✓Επιλέγεται, δηλαδή, η μεταβλητή με το μικρότερο πηλίκο τιμών της στήλης B_1 προς τις τιμές της οδηγού στήλης (στην προκειμένη περίπτωση της X_1)

✓Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μεταβλητή που αντικαθίσταται είναι η A_2

Ο νέος πίνακας Simplex που προκύπτει μετά την αντικατάσταση

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,375	0,5	2,5	0	1		0	250	*250/2,5=100*
1	X_1	1	0,625	0,5	-2,5	0	0		0	750	
M	A_3	0	-0,05	0,2	1	-1	0		1	100	*100/1=100* →
	Z_j	1	0,625 +0,325M	0,5 +0,7M	-2,5 +3,5M	-M	M		M		
	C_j - Z_j	0	0,075 -0,325M	0,3 -0,7M	2,5 -3,5M ↑	M	0		0		

Πίνακας Ε.2

✓Επειδή η τεχνητή μεταβλητή A_2 δεν συμπεριλαμβάνεται στη βάση μετά την αντικατάσταση της με τη X_1, και δεν υπάρχει περίπτωση να επανέλθει λόγω του μεγάλου συντελεστή κόστους (M), δεν είναι ανάγκη να συνεχίσουμε με τους υπολογισμούς των τιμών για τη στήλη της A_2, ή για οποιαδήποτε άλλη στήλη τεχνητής μεταβλητής που δεν περιλαμβάνεται στις βασικές μεταβλητές

•Στο δεύτερο πίνακα Simplex Ε.2 παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές X_2, X_3 και S_2, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά C_j - Z_j και επιλέγουμε τη μεταβλητή S_2 διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

•Η μεταβλητή S_2 θα αντικαταστήσει την A_3.

•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τρίτος πίνακας Simplex (πίνακας Ε.3).

Επιλογή της βασικής μεταβλητής που "φεύγει" από τη βάση

•Οι βασικές μεταβλητές με αρνητική τιμή στην οδηγό στήλη δεν λαμβάνονται υπ' όψη στη επιλογή της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί

•Έτσι στον πίνακα Ε.2 δεν υπολογίζεται το πηλίκο της δεύτερης σειράς (μεταβλητή X_1), διότι η αντίστοιχη τιμή στην οδηγό στήλη είναι -2,5. Η εξήγηση για τον παραπάνω κανόνα προκύπτει από την ερμηνεία των συντελεστών μετατροπής

•Εφόσον η τιμή της οδηγού στήλης (συντελεστής μετατροπής) είναι αρνητική, κάθε αύξηση στη μεταβλητή που επιλέχθηκε για να γίνει βασική (S_2 στον πίνακα Ε.2) αυξάνει επίσης και την τιμή της βασικής μεταβλητής (X_1). Επομένως, δεν τίθεται θέμα άνω ορίου στην τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση

•Αν δύο ή περισσότερα πηλίκα τιμών είναι ίσα, τότε επιλέγεται μία από τις αντίστοιχες μεταβλητές αυθαίρετα

•Στον πίνακα Ε.2 τα πηλίκα που αντιστοιχούν στις μεταβλητές A_1 και A_3 είναι ίσα και επιλεγούμε αυθαίρετα την A3 για να φύγει από τη βάση

•Σε αυτή την περίπτωση, οι τιμές των άλλων βασικών μεταβλητών με τα ίδια πηλίκα στον επόμενο πίνακα Simplex θα είναι μηδενικές (βλέπε τιμή της A_1 στον πίνακα Ε.3)

(Πίνακας Ε.3) 3ος Πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,5	0	0	2,5	1			0	0/2,5=0 ➜
1	X_1	1	0,5	1	0	-2,5	0			1000	
0	S_2	0	-0,05	0,2	1	-1	0			100	
	Z_j	10	0,5 -0,5M	1	0	-2,5 +2,5M	M				
	$C_j - Z_j$	0	0,2 +0,5M	-0,2	0	2,5 -2,5M ↑	0				

•Στον τρίτο πίνακα Simplex Ε.3 παρατηρούμε ότι δύο μεταβλητές, οι X_3 και S_3, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j – Z_j$

• Επιλέγουμε τη μεταβλητή S_3 διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

•Στην οδηγό στήλη υπάρχει μόνο ένα θετικό στοιχείο αυτό της A_1.

•Επομένως, η μεταβλητή S_3 θα αντικαταστήσει την A_1

•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τέταρτος πίνακας Simplex (πίνακας Ε.4)

(Πίνακας Ε.4) 4ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j → ↓		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0	S_3	0	0,2	0	0	1				0	*0/0,2=0* →
1	X_1	1	1	1	0	0				1000	*1000/1=1000*
0	S_2	0	0,15	0,2	1	0				100	*100/0,15=6667*
	Z_j	1	1	1	0	0					
	C_j - Z_j	0	-0,3 ↑	-0,2							

•Στον τέταρτο πίνακα Simplex δεν υπάρχουν πλέον τεχνητές μεταβλητές

•Οι αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j – Z_j$ δηλώνουν ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι βέλτιστη

•Σύμφωνα με τους κανόνες αντικατάστασης βασικών με μη βασικές μεταβλητές, η μεταβλητή X_2 είναι αυτή που εισέρχεται στη βάση στη θέση της S_3

(Πίνακας Ε.5) 5ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j → ↓		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0,7	X_2	0	1	0	0	5				0	
1	X_1	1	0	1	0	-5				1000	*1000/1=1000*
0	S_2	0	0	0,2	1	-0,75				100	*100/0,2=500* →
	Z_j	1	0,7	1	0	-1,5					
	C_j - Z_j	0	0	-0,2 ↑	0	1,5					

•Στον πέμπτο πίνακα Simplex υπάρχει μία αρνητική τιμή στη σειρά $C_j - Z_j$ αυτή που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X_3.

•Έτσι η μεταβλητή X_3 εισέρχεται στη βάση και αντικαθιστά τη μεταβλητή S_2, όπως φαίνεται στον πίνακα Ε.5

• Ο έκτος και τελικός πίνακας Simplex της ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ δίνεται στον πίνακα Ε.6

Πίνακας Ε.6

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i
0,7	X_2	0	1	0	0	5				0
1	X_1	1	0	0	-5	-1,25				500
0	X_3	0	0	1	5	-3,75				500
	Z_j	1	0,7	0,8	-1	-0,75				
	$C_j - Z_j$	0	0	0	1	0,75				

Η βέλτιστη λύση που προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος για το πρόβλημα της επιχείρησης ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ είναι η εξής:

Ποσότητες (Μεταβλητές):

Ποσότητα Εισαγόμενης Τροφής (X_1)	*500 κιλά*
Ποσότητα Ιχθυάλευρου (X_2)	*0 κιλά*
Ποσότητα Δημητριακών (X_3)	*500 κιλά*

Αντικειμενική Συνάρτηση:

Συνολικό κόστος	*500(1) + 500(0,8) = 900€*

Περιορισμοί:

Συνολική Ποσότητα:	*1000 κιλά - δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες ($S_2 = 0$):	*300 κιλά (30%) - δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες ($S_3=0$):	*400 κιλά (40%) - δεσμευτικός περιορισμός*

Δηλαδή για την παραγωγή των 1000 κιλών της ζωοτροφής, ο υπεύθυνος της παραγωγής θα πρέπει να αναμείξει 500 κιλά εισαγόμενης τροφής με 500 κιλά δημητριακών. Ο συνδυασμός αυτός ικανοποιεί τις απαιτήσεις σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες και ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Προβλήματα με Μη Εφικτές Λύσεις

✓Σε μερικές περιπτώσεις, ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι δυνατό να μην έχει εφικτές λύσεις, δηλαδή το πρόβλημα να είναι αδύνατο να επιλυθεί

✓Η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους:

✓Πρώτο, διότι όντως μπορεί να μην υπάρχει εφικτή λύση στο πρόβλημα που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Δηλαδή οι απαιτήσει που διατυπώνονται μέσω των περιορισμών είναι αντικρουόμενες και δεν μπορούν να ικανοποιούνται όλες ταυτόχρονα. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε τη δυνατότητα **"χαλάρωσης"** κάποιων περιορισμών, εφόσον βέβαια αυτό είναι δυνατόν

✓ Ένας δεύτερος λόγος που μπορεί να οδηγήσει σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που να μην έχει λύση, είναι η λανθασμένη διατύπωση είτε των περιορισμών του προβλήματος είτε των δεδομένων του

Παράδειγμα προβλήματος ΓΠ με μη εφικτές λύσεις

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της επιχείρησης ζωοτροφών ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ της προηγούμενης ενότητας, και ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις του πελάτη για πρωτεΐνες και υδατάνθρακες στο παραγόμενο μείγμα ήταν 30% και 50% αντίστοιχα.

Αν θυμηθούμε τα δεδομένα του προβλήματος:

τα τρία συστατικά που επρόκειτο να αναμειχθούν ήταν:
•εισαγόμενη τροφή με περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες
•ιχθυάλευρο με περιεκτικότητα 25% πρωτεΐνες και 20% υδατάνθρακες
•δημητριακά με περιεκτικότητα 20% και 40% αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες.

Είναι προφανές ότι με οποιοδήποτε τρόπο και σε οποιαδήποτε αναλογία αναμειχθούν τα τρία αυτά συστατικά, το μείγμα δεν είναι δυνατό να έχει περιεκτικότητα 50% σε υδατάνθρακες, αφού όλα τα συστατικά έχουν αντίστοιχη περιεκτικότητα το πολύ 40%.

✓Επομένως, **το ζητούμενο είναι αδύνατο**

✓Η διατύπωση του προβλήματος της ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ με αυξημένες απαιτήσεις σε περιεκτικότητα υδατανθράκων σε μοντέλο ΓΠ είναι ίδια με αυτή που διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, με μόνη διαφορά την αύξηση της ποσότητας του δεξιού μέλους του περιορισμού των υδατανθράκων από 400 σε 500

Ελαχιστοποίηση της	$1X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}8X_3$
Υπό τους περιορισμούς:	
(Ποσότητα):	$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0{,}40X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}20X_3 \geq 300$
(Υδατάνθρακες):	$0{,}40X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}40X_3 \geq 500$
	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Αφού προσθέσουμε τις μεταβλητές πλεονασμού και τις τεχνητές μεταβλητές ο πρώτος πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό διαμορφώνεται ακολούθως:

Αρχικός πίνακας Simplex - μη εφικτές λύσεις

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	*1000/1=1000*
M	A_2	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	300	*300/0,4=750* →
M	A_3	0,4	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	500	*400/0,4=1000*
	Z_j	1,8M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M		1700M
	$C_j - Z_j$	1-1,8M ↑	0,7 -1,45M	0,8 -1,6M	M	M	0	0	0		

Στον αρχικό πίνακα Simplex η μεταβλητή με τη μικρότερη τιμή στη σειρά $C_j - Z_j$ είναι η X_1, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

✓Η βασική μεταβλητή που θα αντικατασταθεί από τη X_1 είναι η A_2 και ο επόμενος πίνακας Simplex δίνεται στον επόμενο πίνακα (**2ος πίνακας Simplex**)

✓(**2ος πίνακας Simplex**)

Συντ. Κόστους C_j →		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
M	A_1	0	0,375	0,5	2,5	0	1		0	250	250/2,5=100 →
1	X_1	1	0,625	0,5	-2,5	0	0		0	750	
M	A_3	0	-0,05	0,2	1	-1	0		1	200	200/1=100
	Z_j	10	0,625 +0,325M	0,5 +0,7M	-2,5 +3,5M	-M	M		M		
	$C_j - Z_j$	0	0,075 -0,325M	0,3 -0,7M	2,5 -3,5M ↑	M	0		0		

Στο δεύτερο πίνακα Simplex παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές X_2, X_3 και S_2, έχουν αρνητικές τιμές στη σειρά $C_j – Z_j$ και επιλέγουμε τη μεταβλητή S_2 για τη βάση, διότι έχει το μικρότερο αρνητικό συντελεστή του M

•Η μεταβλητή που αντικαθίσταται από τη S_2 είναι η A_3, διότι έχει το μικρότερο πηλίκο τιμών της Bi προς τις τιμές της οδηγού στήλης

•Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο τρίτος πίνακας Simplex

•3ος πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i	
0	S_2	0	0,15	0,2	1	0			0	100	*100/0,2=500* →
1	X_1	1	1	1	0	0			0	1000	*1000/1=1000*
M	A_3	0	-0,2	0	0	-1			1	100	
	Z_j	1	1 -0,2M	1	0	-M			M		
	$C_j - Z_j$	0	-1 +0,2M	-0,2 ↑	0	M			0		

Εκτελώντας ένα ακόμα βήμα του αλγορίθμου **Simplex** με **αντικατάσταση της μεταβλητής S_2 από τη X_3 που είναι η μόνη με αρνητικό συντελεστή στη σειρά C_j – Z_j** (η ποσότητα -1+2M είναι θετική επειδή το M συμβολίζει έναν πολύ μεγάλο θετικό αριθμό), παίρνουμε τον **4ο πίνακα:**

Συντ. Κόστους $C_j \rightarrow$		1	0,7	0,8	0	0	M	M	M	Ποσότητα
$\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	B_i
0	X_3	0	0,75	1	5	0			0	500
1	X_1	1	0,25	0	-5	0			0	500
M	A_3	0	-0,2	0	0	-1			1	100
	Z_j	1	0,25-0,2M	0	-5	-M			M	
	$C_j - Z_j$	0	-0,25+2M	0,8	5	M			0	

✓Όπως παρατηρούμε στον 4ο πίνακα, όλα τα στοιχεία της σειράς **C_j – Z_j** είναι μη αρνητικά, επομένως ο 4ος πίνακας ικανοποιεί τη συνθήκη βελτιστοποίησης της αντικειμενικήw συνάρτησης

✓**<u>Η υποτιθέμενη όμως βέλτιστη λύση περιλαμβάνει και τεχνητές μεταβλητές, συγκεκριμένα την A_3, η οποία δεν έχει καμία φυσική ερμηνεία</u>**

Είναι η λύση που προέκυψε βέλτιστη;

✓Η απάντηση είναι όχι

✓Από μαθηματικής πλευράς, τα βήματα του αλγόριθμου Simplex έχουν ολοκληρωθεί

✓ Αν δούμε όμως προσεκτικά τη λύση που δίνει ο τέταρτος και τελικός πίνακας Simplex θα διαπιστώσουμε ότι μία από τις τεχνητές μεταβλητές, η A_3 συγκεκριμένα, παραμένει στη βάση, και έχει τιμή 100

✓Η συγκεκριμένη μεταβλητή, όπως και όλες οι τεχνητές μεταβλητές, έπρεπε να έχει τιμή μηδέν, διότι όπως έχουμε εξηγήσει, δεν έχει καμία φυσική ερμηνεία και έχει χρησιμοποιηθεί προσωρινά για να διευκολυνθεί η δημιουργία του πρώτου πίνακα Simplex

Διαπίστωση Μη - Εφικτών Λύσεων

✓Ε<u>φόσον υπάρχει μία τουλάχιστον τεχνητή μεταβλητή με μη μηδενική τιμή στον τελικό πίνακα, ο αλγόριθμος Simplex κατέληξε σε μία τελική λύση η οποία δεν είναι καν εφικτή</u>

Προβλήματα με Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

•Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού προσδιορίζεται από τις τιμές των βασικών μεταβλητών στον τελικό πίνακα Simplex

•Στα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα, ο τελικός πίνακας Simplex έδινε είτε μία και μοναδική βέλτιστη λύση ή καμία λύση

•Υπάρχει όμως περίπτωση σε κάποια προβλήματα ΓΠ να έχουμε περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις

- •Δηλαδή, με διαφορετικές τιμές των μεταβλητών του προβλήματος να έχουμε την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Παράδειγμα προβλήματος ΓΠ με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

- Ας υποθέσουμε ότι το κέρδος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ για τα τραπέζια και τις καρέκλες που κατασκευάζει είναι 140 και 105 ευρώ αντίστοιχα (αντί των αρχικών τιμών 140 και 100 ευρώ)
- Ας υποθέσουμε επίσης, ότι οι συντελεστές παραγωγής παραμένουν ίδιοι σε όλα τα τμήματα ξυλουργείου, Βαφείου και Στιλβωτηρίου
- Ο τελικός πίνακας Simplex του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ ήταν:

Συντ. Κόστους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$3/4$	$-1/2$	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

✓Η αλλαγή του συντελεστή κέρδους της μεταβλητής X_2 από 100 σε 105 θα οδηγήσει στις εξής αλλαγές στους υπολογισμούς της σειράς $\mathbf{Z_j}$

Συντ. Κόστους C_j →		140	105	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	$^3/_4$	$^{-1}/_2$	90
105	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(105) 140	4(0) +0(140) +1(105) 105	1(0) +0(140) +0(105) 0	-2(0) +$^3/_4$(140) -1(105) 0	-4(0) -$^1/_2$(140) +1(105) 35	14700
	C_j - Z_j	0	0	0	0	-35	

Διαπίστωση Μη-Μοναδικής Βέλτιστης Λύσης

•Σε κάθε πίνακα Simplex οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j - Z_j}$ που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές είναι πάντα μηδενικές

•Στο συγκεκριμένο τελικό πίνακα Simplex παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν και μη βασικές μεταβλητές, οι οποίες στη σειρά $\mathbf{C_j - Z_j}$ έχουν τιμή ίση με μηδέν, όπως για παράδειγμα η μεταβλητή S_2

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j - Z_j}$ δηλώνουν την καθαρή μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η συγκεκριμένη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα

•Αν η S_2 αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα παραμείνει αμετάβλητη στα 14700

- •Δηλαδή θα έχουμε μια άλλη λύση που θα δίνει την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

•Επομένως, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την S_2 ως τη νέα βασική μεταβλητή στον πίνακα Simplex, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία θα παραμείνει στο βέλτιστο επίπεδο

- •Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί είναι η Sι, διότι έχει το μικρότερο πηλίκο τιμών της Bi προς την οδηγό στήλη

προκύπτει ο πίνακας Simplex:

Συντ. Κόστους C_j →		140	105	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_2	0	0	½	1	-2	40
140	X_1	1	0	-0,375	0	1	60
105	X_2	0	1	½	0	-1	60
	Z_j	0(0) +1(140) +0(105) 140	0(0) 0(140) +1(105) 105	½(0) -0,375(140) ½(105) 0	1(0) 0(140) 0(105) 0	-2(0) +1(140) -1(105) 35	14700
	C_j - Z_j	0	0	0	0	-35	

✓Και αυτός και ο αμέσως προηγούμενος πίνακας αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ με συντελεστές κέρδους για τραπέζια και καρέκλες 140 και 105 αντίστοιχα

Σύγκριση δύο βέλτιστων λύσεων

1η Βέλτιστη λύση	2η Βέλτιστη λύση
Τραπέζια: X_1=90 Καρέκλες: X_2=20 Κέρδος: 14.700€	Τραπέζια: X_1=60 Καρέκλες: X_2=60 Κέρδος: 14.700€
Ξυλουργείο: 960 ώρες διαθέσιμες, 880 απαιτούνται 80 ώρες μη χρησιμοποιούμενες	Ξυλουργείο: 960 ώρες διαθέσιμες, 960 απαιτούνται
Βαφείο: 400 ώρες διαθέσιμες, 400 απαιτούνται	Βαφείο: 400 ώρες διαθέσιμες, 360 απαιτούνται 40 ώρες μη χρησιμοποιούμενες
Στιλβωτήριο: 420 ώρες διαθέσιμες, 420 απαιτούνται	Στιλβωτήριο: 420 ώρες διαθέσιμες, 420 απαιτούνται
Οι περιορισμοί βαφείου και στιλβωτηρίου είναι δεσμευτικοί.	Οι περιορισμοί ξυλουργείου και στιλβωτηρίου είναι δεσμευτικοί.

Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

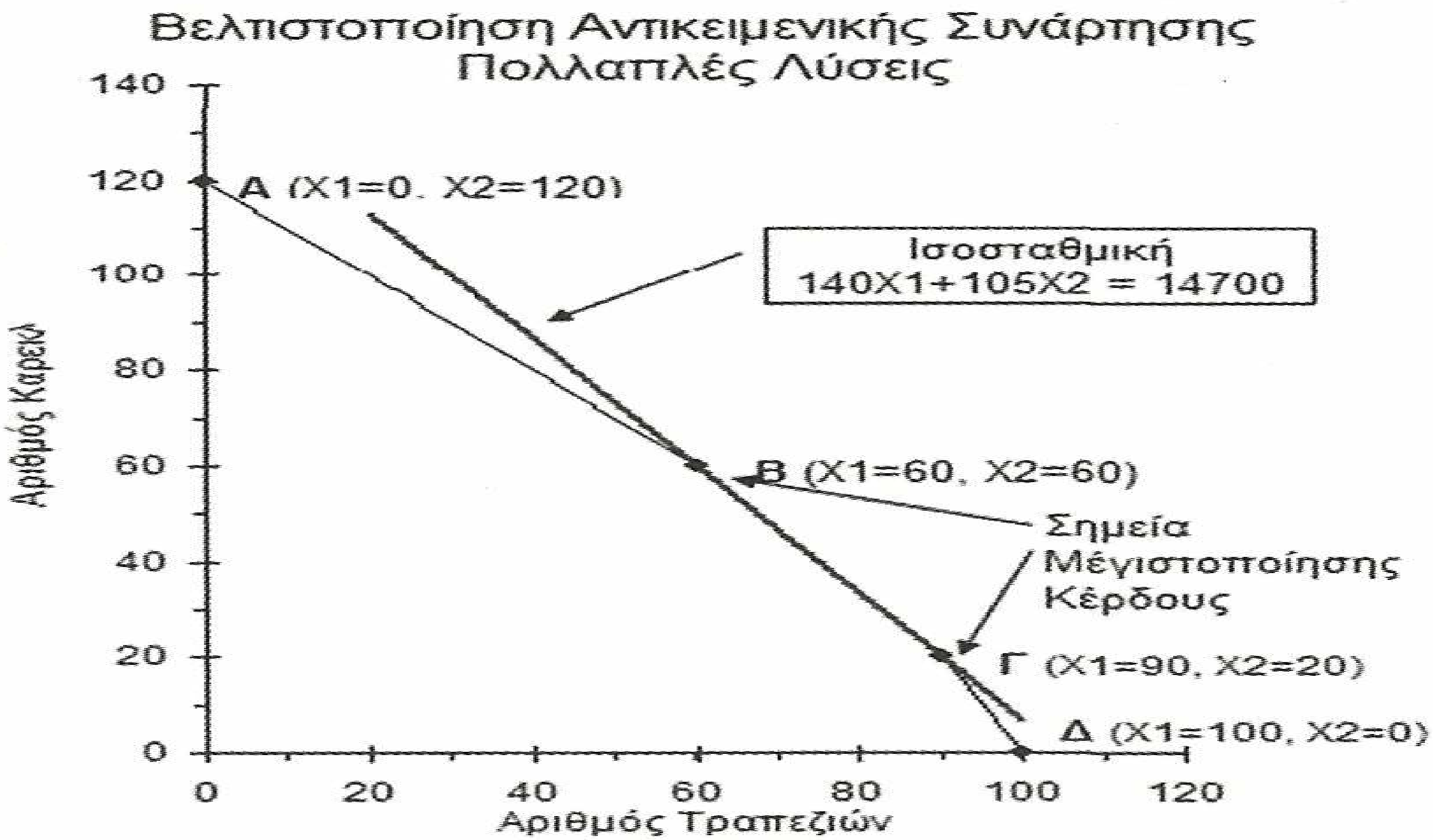
•Όταν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις

•Κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο ή περισσότερων λύσεων είναι επίσης βέλτιστη λύση

•Το σχήμα που ακολουθεί εξηγεί τι συμβαίνει στην περίπτωση που υπάρχουν δύο ή περισσότερα ακραία σημεία με την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

• Η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλη με τον περιορισμό που ορίζεται από τα δύο βέλτιστα σημεία (σημεία Β και Γ στο σχήμα)

    •κάθε σημείο μεταξύ του σημείου Β και του σημείου Γ δίνει την ίδια τιμή (τη βέλτιστη) στην αντικειμενική συνάρτηση



•Οι λύσεις που αντιστοιχούν στα σημεία μεταξύ των ακραίων σημείων Β και Γ υπολογίζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των δύο ακραίων σημείων:

Τραπέζια: $X_1 = 90λ + 60(1-λ)$ Καρέκλες: $X_2 = 20λ + 60(1-λ)$, $0< λ< 1$

•Για παράδειγμα για λ=0,5, η λύση X_1=75 (τραπέζια) και X_2=40 (καρέκλες) δίνει την ίδια τιμή του βέλτιστου κέρδους, το ίδιο και η X_1=66 και X_2=52 (λ=0,2) κ.ο.κ.