Εφαρμογές Θεωρίας

1. Κατανομή πόρων σε συνθήκες στατικής αποτελεσματικότητας

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για την κατανάλωση του νερού ενός φράγματος (εκφρασμένη σε ευρώ) είναι q = 12-P και το οριακό κόστος παραγωγής του (σε ευρώ) είναι MC =2+q, όπου P είναι η οριακή προθυμία για πληρωμή για το νερό και q είναι η ζητούμενη και/ή προσφερόμενη ποσότητα. Να υπολογισθούν α) η προσφερόμενη ποσότητα νερού σε μία στατική αποτελεσματική κατανομή και β) το μέγεθος του καθαρού οφέλους από την κατανάλωση του νερού (σε ευρώ).

Λύση:

α) Υπολογισμός της προσφερόμενης ποσότητας νερού.

<u>Δεδομένα</u>:

q = 12-P (1)

MC =2+q (2)

Επειδή από τα δεδομένα το P είναι η οριακή προθυμία για πληρωμή για νερό, δηλαδή σε αποτελεσματική αγορά ταυτίζεται με τη τιμή του νερού, πρέπει τη συνάρτηση ζήτησης που δίδεται να τη λύσουμε ως προς P για να εξάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης, δηλαδή:

q = 12-P=> P=12 - q (3)

Είναι γνωστό επίσης ότι, η μεγιστοποίηση του καθαρού οφέλους από τη χρήση του νερού (συνθήκη για την στατική αποτελεσματική κατανομή του) επιτυγχάνεται όταν το οριακό όφελος της χρήσης του είναι ίσο με το οριακό κόστος του, δηλαδή:

P = MC=> λόγω των (2), (3) 12- q=2+q=>12-2=2 q=> q=5

Άρα, η προσφερόμενη ποσότητα σε μία στατική αποτελεσματική κατανομή αντιστοιχεί σε q*=5 μονάδες νερού.

β) Υπολογισμός του καθαρού οφέλους από τη κατανάλωση νερού.

Πρώτον, σχεδιάζουμε το διάγραμμα καμπυλών ζήτησης και οριακού κόστους:

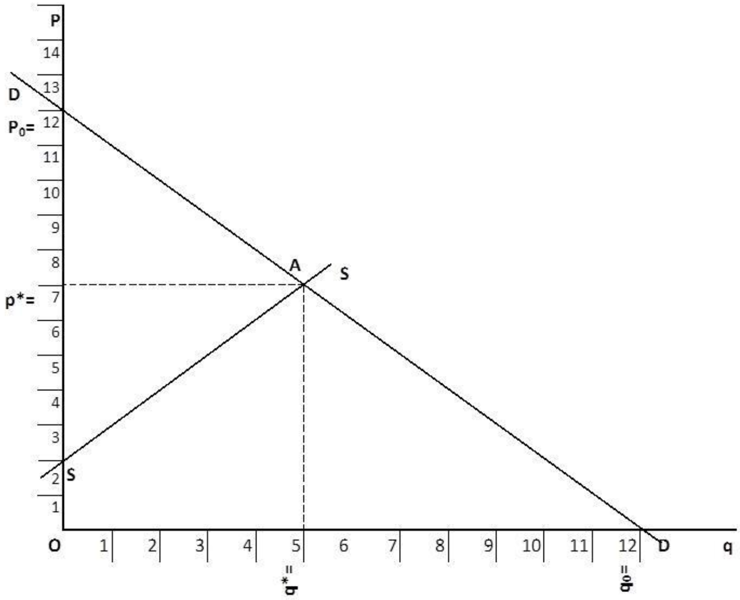
<u>Σχεδιασμός της καμπύλης (ευθείας) ζήτησης:</u>

Θέτοντας όπου q=0 στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης P=12–q, βρίσκουμε ότι η καμπύλη ζήτησης τέμνει τον άξονα των τιμών (κάθετος άξονας) στο σημείο P_0 = 12. Επίσης, θέτοντας όπου P = 0 στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης P=12–q, βρίσκουμε ότι η καμπύλη ζήτησης τέμνει τον άξονα των ποσοτήτων (οριζόντιος άξονας) στο σημείο q_0=12.

<u>Σχεδιασμός της καμπύλης (ευθείας) προσφοράς:</u>

Θέτοντας q=0 στη συνάρτηση οριακού κόστους MC = 2+q, βρίσκουμε ότι MC = 2 και άρα η καμπύλη προσφοράς (ταυτίζεται με αυτή του οριακού κόστους) περνάει από το σημείο 2 του άξονα των τιμών (κάθετος άξονας) επειδή ισχύει P = MC. Επίσης, θέτοντας όπου q=q* = 5 στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης P = 12-q, βρίσκουμε ότι P*=7. Άρα, οι καμπύλες οριακού κόστους και ζήτησης τέμνονται στο σημείο (P*, q*) =(7,5).

Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα καμπυλών ζήτησης και προσφοράς, όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα:



Το συνολικό όφελος δίδεται από το εμβαδόν του πολυγωνικού σχήματος OP_0Aq*που βρίσκεται κάτω από τη γραμμή της αντίστροφης ζήτησης D. Όπως παρατηρείται το πολύγωνο σχήμα αυτό αποτελείται από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο OP*Aq* και από το ορθογώνιο τρίγωνο p*P_0A. Επομένως το συνολικό εμβαδόν το προαναφερομένου πολυγώνου αποτελείται από το άθροισμα των εμβαδών των προαναφερόμενων παραλληλόγραμμου και τριγώνου, θα είναι δηλαδή:

B(Όφελος)=(OP*xP*A)+(P*P_0xP*A)/2=(7x5)+(5x5)/2=35+12,5=47,5 ευρώ.

Το συνολικό κόστος δίδεται από το εμβαδόν του πολυγωνικού σχήματος OSAq*που βρίσκεται κάτω από τη γραμμή προσφοράς S. Όπως παρατηρείται το πολύγωνο σχήμα αυτό προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο OP*Aq* το ορθογώνιο τρίγωνο SP*A. Επομένως το συνολικό εμβαδόν το προαναφερομένου πολυγώνου αποτελείται από τη διαφορά των εμβαδών των προαναφερόμενων παραλληλόγραμμου και τριγώνου, θα είναι δηλαδή:

C(Κόστος)= (OP*xP*A)- (SP*xP*A)/2=(7x5)-(5 x 5)/2 =35-12,5=22,5 ευρώ.

Επομένως, Καθαρό όφελος(NB) = όφελος(B)– κόστος(C) = 47,5-22,5=25 ευρώ.

2. Κατανομή πόρων σε συνθήκες δυναμικής αποτελεσματικότητας

Υποθέτουμε ότι το συνολικό κοινωνικό όφελος από την κατανομή ενός φυσικού πόρου (π.χ. η ξυλεία από ένα δάσος) δίδεται από τη σχέση:

$$\mathrm{TB_i} = 50\mathrm{q_i} - 0{,}5\mathrm{q_i^2}\ (1)$$

Επίσης το συνολικό κόστος της κατανομής αυτής δίδεται από τη σχέση:

$$\mathrm{TC_i} = 4\mathrm{q_i}(2)$$

Έστω δε ότι το απόθεμα Q της ξυλείας είναι εξαντλήσιμο και ισούται με 100.

Να υπολογισθεί η άριστη κατανομή της ποσότητας της ξυλείας στις χρονικές στιγμές 0 και 1, αν ληφθεί υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο 10%.

Λύση:

Είναι γνωστό ότι, η άριστη κατανομή της ξυλείας στις χρονικές στιγμές 0 και 1 επιτυγχάνεται όταν μεγιστοποιείται η παρούσα αξία του συνολικού καθαρού κοινωνικού οφέλους, με τον περιορισμό ότι η συνολική διαθέσιμη ποσότητα της ξυλείας είναι πεπερασμένη.

Το συνολικό καθαρό κοινωνικό όφελος που προκύπτει από τις (1) και (2) θα είναι:

$$\mathrm{TNB_i} = \mathrm{TB_i} - \mathrm{TC_i} = 50\mathrm{q_i} - 0{,}5\mathrm{q_i^2} - 4\mathrm{q_i} = 46\mathrm{q_i} - 0{,}5\mathrm{q_i^2}\,(4)$$

Επομένως, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την παρούσα αξία του συνολικού καθαρού κοινωνικού οφέλους που προκύπτει από την κατανομή του πόρου, έχοντας το περιορισμό της πεπερασμένης προσφερόμενης ποσότητας του, δηλαδή:

$$\max_{q_i} \mathrm{PVNB(NB_0, NB_1)} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{1} \frac{46\mathrm{q_i} - 0{,}5\mathrm{q_i^2}}{(1+0{,}1)^{\mathrm{i}}}, \quad s.t. \sum_{\mathrm{i=0}}^{1} \mathrm{q_i} = \mathrm{Q}\ (5)$$

Γνωρίζουμε ότι η προαναφερόμενη συνάρτηση μεγιστοποιείται όταν οι συνθήκες πρώτης τάξης της συνάρτησης Lagrange που εξάγεται από αυτή μηδενίζονται.

Η εξαγόμενη συνάρτηση Lagrange είναι:

$$\mathrm{L} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{1} \frac{46\mathrm{q_i} - 0{,}5\mathrm{q_i^2}}{(1+0{,}1)^{\mathrm{i}}} + \lambda\left(\mathrm{Q} - \sum_{\mathrm{i=0}}^{1} \mathrm{q_i}\right)\ (6)$$

Άρα μηδενίζουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης ως εξής:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q_0}} = 0 => \frac{46 - 1\mathrm{q_0}}{(1+0{,}1)^0} - \lambda = 0 => \frac{46 - 1\mathrm{q_0}}{1} = \lambda => 46 - 1\mathrm{q_0} = \lambda (7)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q_1}} = 0 => \frac{46 - 1\mathrm{q_1}}{(1+0{,}1)^1} - \lambda = 0 => \frac{46 - 1\mathrm{q_1}}{1{,}1} = \lambda\ (8)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = 0 => \mathrm{Q} - \mathrm{q_0} - \mathrm{q_1} = 0 => \mathrm{q_0} + \mathrm{q_1} = 100\ (9)$$

Στην συνέχεια διαιρούμε κατά μέλη τις (7) και (8) και λύνουμε ως προς q_0, δηλαδή,

$$\frac{46 - 1\mathrm{q_0}}{\frac{46 - 1\mathrm{q_1}}{1{,}1}} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 => 1{,}1(46 - 1\mathrm{q_0}) = 46 - 1\mathrm{q_1} =>$$

$$=> 50{,}6 - 1{,}1\mathrm{q_0} = 46 - 1\mathrm{q_1} => 50{,}6 - 46 + 1\mathrm{q_1} = 1{,}1\mathrm{q_0} =>$$

$$=> 4{,}6 + \mathrm{q_1} = 1{,}1\mathrm{q_0} => \mathrm{q_0} = \frac{4{,}6 + \mathrm{q_1}}{1{,}1} = 4{,}18 + 0{,}91\mathrm{q_1}$$

Ακολούθως αντικαθιστούμε στην (9) το ίσον του q_0 και λύνουμε ως προς q_1, δηλαδή:

$$(9) => q_0 + \mathrm{q_1} = 100 => 4{,}18 + 0{,}91\mathrm{q_1} + \mathrm{q_1} = 100 => 1{,}91\mathrm{q_1} = 100 - 4{,}18 =>$$

$$=> \mathrm{q_1} = \frac{100 - 4{,}18}{1{,}91} = 50{,}19$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε επίσης στην (9) το ίσον του q_1 και λύνουμε ως προς q_0, δηλαδή:

$$(9) => q_0 + \mathrm{q_1} = 100 => \mathrm{q_0} + 50{,}19 = 100 => \mathrm{q_0} = 49{,}81$$

Κατά συνέπεια η άριστη κατανομή του φυσικού πόρου είναι τη χρονική στιγμή 0:49,81 και τη χρονική στιγμή 1:50,19, επειδή με αυτές τις τιμές μεγιστοποιείται το καθαρό όφελος του όπως αποδείξαμε παραπάνω, έχοντας το περιορισμό του πεπερασμένου αποθέματος του.

3. Υπολογισμός της αγοραίας καμπύλης ζήτησης για ένα δημόσιο αγαθό

Έστω ότι μία κοινότητα αποτελείται από 1.286 κατοίκους. Το 50% των κατοίκων έχει ταυτόσημη συνάρτηση ζήτησης του νερού του υδραγωγείου της κοινότητας που δίδεται από την εξίσωση:

$P_j = 10 – q$, j=0%,…,50%(1)

όπου q είναι η ποσότητα νερού από το κοινοτικό υδραγωγείο, και Pj είναι το χρηματικό ποσό ανά λίτρο νερού που ο κάθε κάτοικος από το 50% των κατοίκων της κοινότητας είναι πρόθυμος να καταβάλλει.

Το 30% των κατοίκων έχει ταυτόσημη συνάρτηση ζήτησης του νερού του υδραγωγείου της κοινότητας που δίδεται από την εξίσωση:

$P_k= 25 – 2q$, k=0%…,30% (2)

όπου P_k είναι το χρηματικό ποσό ανά λίτρο νερού που ο κάθε κάτοικος από το 30% των κατοίκων της κοινότητας είναι πρόθυμος να καταβάλλει.

Τέλος το 20% των κατοίκων έχει ταυτόσημη συνάρτηση ζήτησης του νερού του υδραγωγείου της κοινότητας που δίδεται από την εξίσωση:

$P_i = 30 – 2{,}8q$, i=0%,…,20% (3)

όπου Pi είναι το χρηματικό ποσό ανά λίτρο νερού που ο κάθε κάτοικος από το 20% των κατοίκων της κοινότητας είναι πρόθυμος να καταβάλλει.

Να υπολογιστεί η αγοραία καμπύλη ζήτησης νερού του συνόλου των κατοίκων της κοινότητας.

Λύση:

Η αγοραία καμπύλη συνολικής ζήτησης του νερού του υδραγωγείου προκύπτει από την κατακόρυφη άθροιση των 1.286 ατομικών καμπυλών ζήτησης του συνόλου των κατοίκων της κοινότητας. Επειδή όμως δεν έχουν όλοι οι κάτοικοι την ίδια συνάρτηση ζήτησης, αλλά το 50% αυτών δηλαδή οι 643 εκφράζονται από την συνάρτηση ζήτησης (1), το 30% αυτών δηλαδή οι 386 εκφράζονται από την συνάρτηση ζήτησης (2), και το 20% αυτών δηλαδή οι 257 εκφράζονται από την συνάρτηση ζήτησης (3), η συνολική αγοραία καμπύλη ζήτησης δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{643} \mathrm{P_j} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{386} \mathrm{P_k} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{257} \mathrm{P_i} => P = 643(10 - \mathrm{q}) + 386(25 - 2\mathrm{q}) + 257(30 - 2{,}8\mathrm{q}) =>$$

$$=> P = 6430 - 643\mathrm{q} + 9650 - 772\mathrm{q} + 7710 - 719{,}6\mathrm{q} => \mathrm{P} = 23790 - 2134{,}6\mathrm{q}$$

4. Αξιολόγηση περιβαλλοντικών προγραμμάτων με το κριτήριο του Λόγου Οφέλους/Κόστους

Παράδειγμα 1

Έστω ότι σύμφωνα με την οικονομοτεχνική μελέτη ενός περιβαλλοντικού προγράμματος, τα αναμενόμενα οφέλη και κόστη δίδονται από τον παρακάτω πίνακα:

ΕΤΗ	ΟΦΕΛΗ (B)	ΚΟΣΤΗ (C)
0	0	5.000
1	6.000	200
2	6.200	220

Ζητείται να αξιολογηθεί αν το πρόγραμμα είναι αποτελεσματικό με την εν λόγω μέθοδο, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο προεξόφλησης 16%.

Λύση:

Είναι γνωστό ότι, ένα πρόγραμμα είναι αποτελεσματικό σύμφωνα με αυτή την μέθοδο αξιολόγησης, όταν η παρούσα αξία του συνολικού καθαρού οφέλους του είναι θετική, δηλαδή:

$$\mathrm{PVTNB} > 0$$

Επομένως, με εφαρμογή της παραπάνω σχέσης στα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{NB_i}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{NB_0}}{(1+\mathrm{r})^0} + \frac{\mathrm{NB_1}}{(1+\mathrm{r})^1} + \frac{\mathrm{NB_2}}{(1+\mathrm{r})^2} = \frac{0-5.000}{(1+0{,}16)^0} + \frac{6.000-200}{(1+0{,}16)^1} + \frac{6.200-220}{(1+\mathrm{r})^2} =$$

$$= -5.000 + \frac{5.800}{1{,}16} + \frac{5.980}{1{,}3456} = -5.000 + 5.000 + 4.444{,}11 = 4.444{,}11$$

Επομένως $\mathrm{PVTNB} > 0$, άρα το πρόγραμμα είναι αποτελεσματικό.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι σύμφωνα με τις οικονομοτεχνικές μελέτες δυο περιβαλλοντικών προγραμμάτων, τα αναμενόμενα οφέλη και κόστη δίδονται από τον παρακάτω πίνακα:

ΕΤΗ	ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Χ		ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Ψ	
	ΟΦΕΛΗ (B)	ΚΟΣΤΗ (C)	ΟΦΕΛΗ (B)	ΚΟΣΤΗ (C)
0	0	5.000	0	5.100
1	6.000	200	6.100	300
2	6.200	220	6.500	350

Με δεδομένο ότι το δημόσιο μπορεί να διαθέσει μόνο 5.200€ για τη χρηματοδότηση τους, να αξιολογηθεί ποιο από τα προαναφερόμενα προγράμματα θα επιλεχθεί κατά προτεραιότητα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο προεξόφλησης 16%.

Λύση:

Σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο, θα επιλεχθεί εκείνο το πρόγραμμα που έχει την μεγαλύτερη PVTNB, εφόσον και στα δύο προγράμματα το κόστος κατασκευής τους καλύπτεται από το διαθέσιμο ποσό χρηματοδότησης του δημοσίου. Επομένως θα υπολογισθεί η PVTNB καθενός χωριστά και στην συνέχεια θα επιλεγεί αυτό που έχει την μεγαλύτερη από το άλλο. Θα έχουμε:

Για το πρόγραμμα Χ:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{NB_i}{(1+r)^i}=\frac{NB_0}{(1+r)^0}+\frac{NB_1}{(1+r)^1}+\frac{NB_2}{(1+r)^2}=\frac{0-5.000}{(1+0{,}1)^0}+\frac{6.000-200}{(1+0{,}1)^1}+\frac{6.200-220}{(1+1)^2}=$$

$$=-5.000+\frac{5.800}{1{,}16}+\frac{5.980}{1{,}3456}=-5.000+5.000+4.444{,}11=4.444{,}11$$

Για το πρόγραμμα Ψ:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{NB_i}{(1+r)^i}=\frac{NB_0}{(1+r)^0}+\frac{NB_1}{(1+r)^1}+\frac{NB_2}{(1+r)^2}=\frac{0-5.100}{(1+0{,}1)^0}+\frac{6.100-300}{(1+0{,}1)^1}+\frac{6.500-350}{(1+1)^2}=$$

$$=-5.100+\frac{5.800}{1{,}16}+\frac{6.150}{1{,}3456}=-5.000+5.000+4.570{,}45=4.570{,}45$$

Επομένως επιλέγεται να χρηματοδοτηθεί το πρόγραμμα Ψ.

5. Μαθηματική ανάλυση του φόρου ανά μονάδα ρύπων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την περίπτωση μιας επιχείρησης παραγωγής αλατιού, που βρίσκεται δίπλα σε θάλασσα, από την οποία αλιεύουν ψάρια οι αλιείς της γύρω περιοχής.

Έστω $TC^s= XS^2- \partial X$ το συνολικό κόστος της επιχείρησης παραγωγής αλατιού, το οποίο είναι συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας αλατιού S, της ποσότητας μόλυνσης X που προκαλεί η επιχείρηση στη θάλασσα από την επεξεργασία του αλατιού, και μιας σταθερής παραμέτρου θ.

Επίσης, έστω $TC^f=fX^2$ το τ συνολικό κόστος των αλιέων, το οποίο είναι συνάρτηση όχι μόνο της ποσότητας αλιευόμενων ψαριών f, αλλά και της ποσότητας μόλυνσης X που προκαλεί η επιχείρηση στη θάλασσα.

Ζητείται να υπολογισθεί ο φόρος ανά μονάδα ρύπων που πρέπει να επιβληθεί στην επιχείρηση, ώστε η ποσότητα μόλυνσης από την παραγωγή της να είναι κοινωνικά αποδεκτή.

Λύση:

Καταρχήν θεωρούμε ότι, η επιχείρηση λειτουργεί χωρίς να εφαρμόζει μέτρα περιορισμού της μόλυνσης που προκαλεί. Έτσι, υπολογίζουμε τα επίπεδα μόλυνσης που είναι άριστα για την κοινωνία από τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κερδών του συνόλου της κοινωνίας (δηλαδή, και των αλιέων και της επιχείρησης μαζί), χωρίς την επιβολή φόρου στην επιχείρηση από την επιβάρυνση που προκαλεί στην κοινωνία λόγω της μόλυνσης που παράγει.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς περιορισμό και δεν απαιτείται συνάρτηση Lagrange για την επίλυσή του. Η συνθήκη πρώτης τάξης ως προς X για άριστο είναι:

$$\max_{x}\ \pi^T=TR^s+TR^f-TC^s-TC^f=p_sS+p_ff-XS^2+\partial X-fX^2$$

όπου:

– Π^T είναι τα συνολικά κέρδη κοινωνίας, δηλαδή της επιχείρησης αλατιού και των αλιέων,

- p^s είναι η αγοραία τιμή του αλατιού,
- P^f είναι η αγοραία τιμή των ψαριών.

Η συνθήκη πρώτης τάξης ως προς X για άριστο είναι:

$$\frac{\partial \pi^T}{\partial x} = 0 => -2XS + \partial - 2fX = 0 => \partial = 2XS + 2fX => \partial = X(2S + 2f) => X = \frac{\partial}{(2S + 2f)} (1)$$

Επειδή όμως η επιχείρηση λειτουργώντας με μοναδικό σκοπό την μεγιστοποίηση του κέρδους της δεν λαμβάνει υπόψη της το κέρδος της κοινωνίας, η πολιτεία της επιβάλλει ένα φόρο t, προκειμένου να την υποχρεώσει να περιορίσει τη μόλυνση που παράγει. Επομένως η συνάρτηση κόστους της που προαναφέρουμε θα τροποποιηθεί ως εξής:

$TC^s = XS^2 - \partial X + tX$

Τότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης των κερδών της θα είναι:

$$\max_x \pi^s = TR^s - TC^s = p_s s - XS^2 + \partial X - tX$$

Η άριστη ποσότητα X^t που μεγιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση προκύπτει όταν εξισώσουμε τη συνθήκη πρώτης τάξης της ως προς X με το μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{\partial \pi^s}{\partial x^t} = 0 => -2SX^t + \partial - t = 0 => \partial - t = 2SX^t => X^t = \frac{\partial - t}{2S} (2)$$

Επειδή δε η επιβολή του φόρου επιδιώκει να υποχρεώσει την επιχείρηση να παράγει ποσότητα μόλυνσης ίση με την κοινωνικά αποδεκτή, τότε εξισώνουμε αυτές τις ποσότητες ώστε να υπολογισθεί το ύψος του φόρου, δηλαδή:

$$X = X^t => \frac{\partial}{(2S + 2f)} = \frac{\partial - t}{2S} => \frac{\partial}{(2S + 2f)} = \frac{\partial}{2S} - \frac{t}{2S} => \frac{t}{2S} = \frac{\partial}{2S} - \frac{\partial}{(2S + 2f)} =>$$

$$=> \frac{t}{2S} = \partial \left\{ \frac{1}{2S} - \frac{1}{(2S + 2f)} \right\} => \frac{t}{2S} = \partial \left\{ \frac{2S + 2f - 2S}{2S(2S + 2f)} \right\} => \frac{t}{2S} = \frac{\partial 2f}{2S(2S + 2f)} =>$$

$$=> t = \frac{2S \, \partial 2f}{2S(2S + 2f)} => t = \frac{2 \, \partial f}{2S + 2f}$$