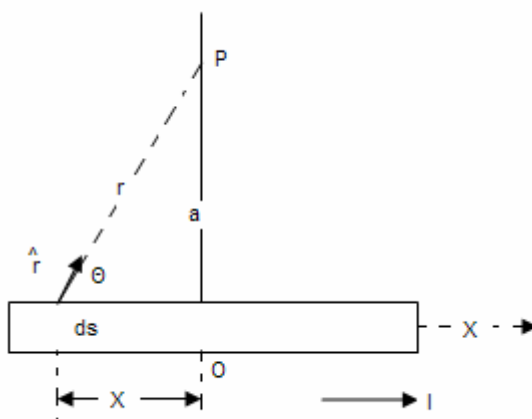


Πηγές Μαγνητικού Πεδίου

Άσκηση 1

Θεωρήστε ότι ένα λεπτό ευθύγραμμο σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I προς την θετική κατεύθυνση x , όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Ας υπολογίσουμε το ολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο P , που έχει απόσταση a από το σύρμα και το οποίο δημιουργείται από το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα.

Λύση



Για να υπολογίσω το Μ.Π στο σημείο P θα χρησιμοποιήσω τον νόμο του Biot-Savart ο οποίος μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το Μ.Π που δημιουργεί το ρεύμα I (που διαρρέει το στοιχειώδες τμήμα $ds(=dx)$).

Έτσι έχουμε:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idsx\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin \theta}{r^2} \quad (1)$$

Από (1) παρατηρούμε ότι οι ποσότητες που μεταβάλλονται είναι r, ds, θ .

Πρέπει να βρώ μια σχέση που να συνδέει τις ποσότητες αυτές.

$$\tan \theta = \frac{-a}{x} \Rightarrow x = -\frac{-a}{\tan \theta} = -\frac{a \cos \theta}{\sin \theta} \quad (2)$$

Από (2):

$$dx = -a \frac{[(\cos \theta)' \sin \theta - (\cos \theta)(\sin \theta)']}{\sin^2 \theta} = -a \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (1) άρα:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \frac{a}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta}{r^2} \Leftrightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a d\theta}{r^2 \sin \theta} \quad (4)$$

$$a = r \sin \theta \Leftrightarrow r = \frac{a}{\sin \theta} \quad (5)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (4) και έχω:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\alpha I}{\frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} \sin \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{a} d\theta \quad (6)$$

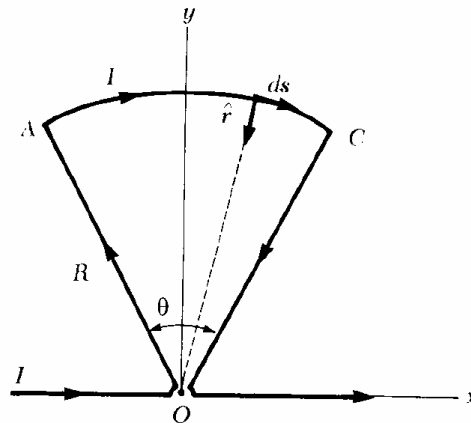
Εάν θεωρήσω ότι ο αγωγός είναι απείρου μήκους τότε η γωνία θ μεταβάλλεται από $\theta_1 \rightarrow 0$ σε $\theta_2 \rightarrow \pi$ επομένως το ολικό Μ.Π στο σημείο P είναι ίσο με:

$$B_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi d \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

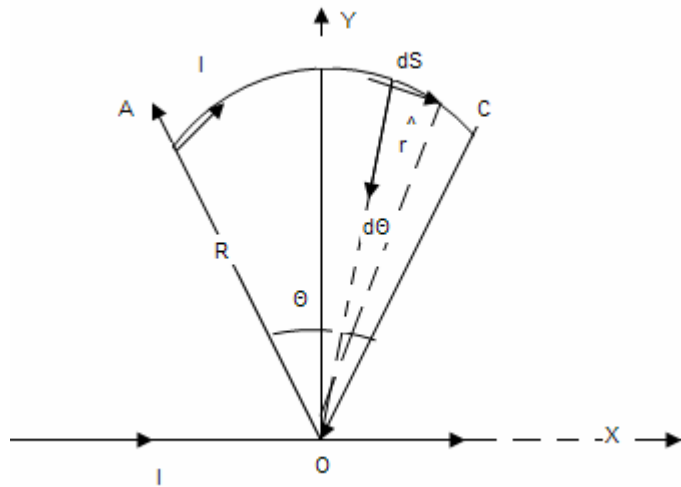
Το Μ.Π δηλαδή οι δυναμικές γραμμές δημιουργούν ομόκεντρους κύκλους γύρω από τον ρευματοφόρο αγωγό.

Άσκηση 2

Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται στο σημείο O από το ρεύμα I που διαρρέει τον κλειστό βρόχο του παρακάτω σχήματος. Ο βρόχος αποτελείται από δύο ευθύγραμμα μέρη και ένα τόξο κύκλου ακτίνας R και επίκεντρης γωνίας θ .



Λύση



Το Μ.Π που δημιουργεί ο ρευματοφόρος αγωγός δίνεται από τον νόμο του Biot-Savart.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdS \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα του ρευματοφόρου αγωγού δεν δημιουργούν μαγνητικό πεδίο στο σημείο O μια και το $dS \parallel \hat{r}$ άρα

$$d\vec{S} \times \hat{r} = 0 \Rightarrow dB = 0T$$

Επίσης το ίδιο ισχύει για τα ρευματοφόρα τμήματα (OA) και (OC). Άρα μόνο το ρευματοφόρο τμήμα (AC) δημιουργεί Μ.Π στο σημείο O.

Στην (1) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το dS με R dθ άρα:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\theta}{r^2} \stackrel{r=R}{\Leftrightarrow} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\theta}{R^2} \Leftrightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\theta}{R} \quad (2)$$

Το ολικό Μ.Π στο σημείο O προκύπτει από την ολοκλήρωση της (2).

Άρα:

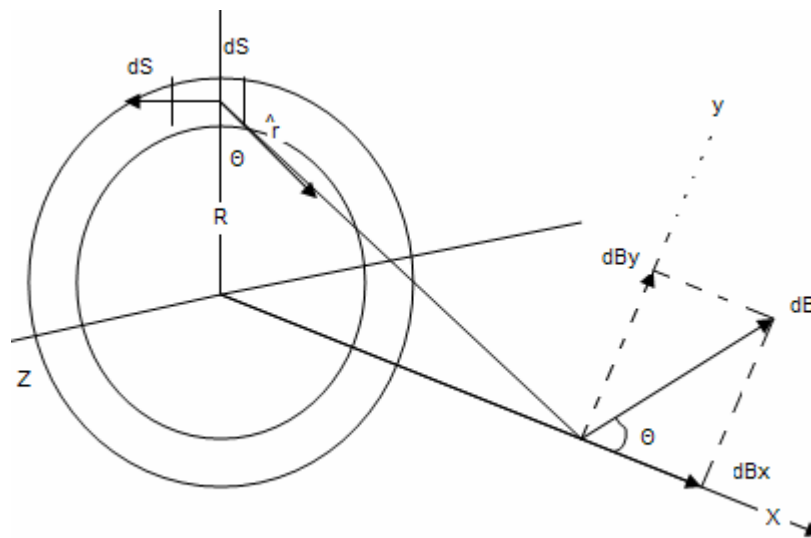
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^\theta d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

Από τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκεται η φορά του $\vec{B}$ είναι από τον αναγνώστη προς την σελίδα του βιβλίου.

Άσκηση 3

Θεωρήστε ότι ένας συμμάτινος κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R κείται στο επίπεδο yz και διαρρέεται από ρεύμα I όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται πάνω στον άξονα συμμετρίας του δακτυλίου στο σημείο P το οποίο έχει απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου.

Λύση



Από τον νόμο του Biot-Savart έχω ότι:

$$\left. \begin{aligned} |dB| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{S} \times \hat{r}|}{r^2} \\ |d\vec{S} \times \hat{r}| &= dS \sin\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow |dB| = \frac{\mu_0 I dS}{4\pi r^2} \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο του παραπάνω σχήματος έχω:

$$r^2 = R^2 + x^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώ την (2) στην (1) και έχω:

$$|dB| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dS}{(R^2 + X^2)} \quad (3)$$

Από τον νόμο του Biot-Savart επίσης γνωρίζουμε ότι το $d\vec{B}$ Μ.Π βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο σε αυτό που δημιουργούν τα $d\vec{S}, \hat{r}$.

Παρατηρούμε ότι το Μ.Π έχει 2 συνιστώσες x,y. Οι y-συνιστώσες αλληλοαναιρούνται μεταξύ τους.

Άρα το Μ.Π το ολικό βρίσκεται πάνω στον άξονα x.
Άρα:

$$dB_{o\lambda} = dB \cos \theta = dB \frac{R}{(R^2 + X^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dS}{(R^2 + X^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την (4) πάνω στην περιφέρεια του κύκλου:

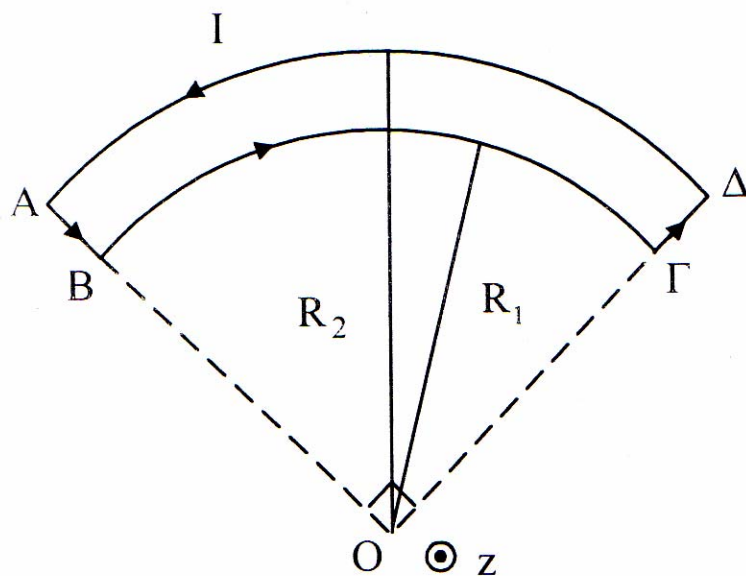
$$B_{o\lambda} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + X^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dS = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + X^2)^{3/2}} 2\pi R \Leftrightarrow \vec{B}_{o\lambda} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + X^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (5)$$

Για αποστάσεις χ πολύ μεγαλύτερες από την ακτίνα R έχω στην (5):

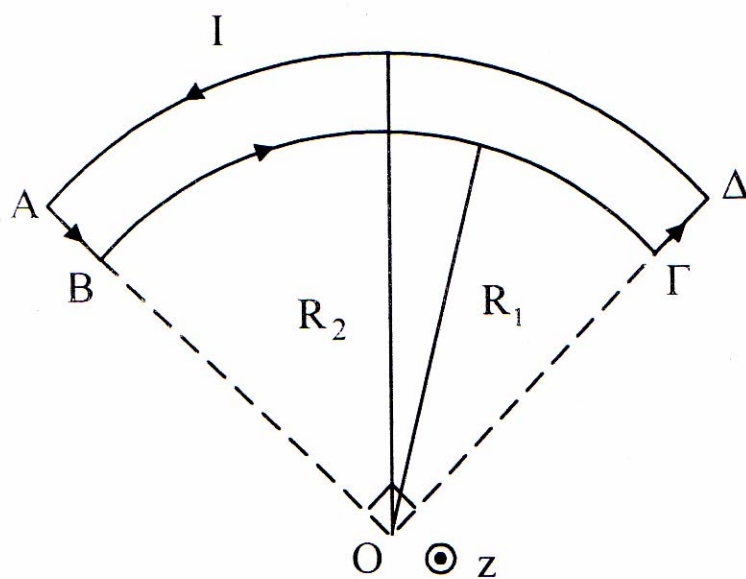
$$\vec{B}_{o\lambda} = \frac{\mu_0 I R^2}{2X^3} \hat{i} \quad (6)$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο σημείο O του ρευματοφόρου αγωγού του παρακάτω σχήματος.



ΛΥΣΗ



Τα τμήματα AB, ΓΔ δεν δημιουργούν Μ.Π στο σημείο O μια και το dS_{AB} ή το $dS_{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα με την φορά ρεύματος I.

Επομένως από νόμο Biot-Savart θα υπολογίσουμε το Μ.Π που δημιουργούν τα (ΑΔ) και (ΒΓ) στο σημείο O.

Μαγνητικό Πεδίο Τμήματος (ΑΔ)

Κατα αρχήν απο κανόνα του δεξιού χεριού το Μ.Π που δημιουργείται στο σημείο O από το τμήμα (ΑΔ) έχει φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη.

Από τον νόμο του Biot-Savart έχω:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{S} \times \hat{r}}{r^2} \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I |d\vec{S} \times \hat{r}|}{r^2} \quad (1)$$

Ισχύει ότι λόγω (ΑΔ) είναι τόξο κύκλου το διάνυσμα της απόστασης $\vec{r}$ από το σημείο Ο είναι συνεχώς κάθετη στο (ΑΔ).

Άρα

$$|d\vec{S} \times \hat{r}| = dS \quad (2)$$

Αντικαθιστώ (2) στην (1) οπότε:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dS}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} \int dS = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R_2 d\theta \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} R_2 \int_0^{\pi/2} d\theta \hat{z} \quad (3)$$

Ομοίως εργαζόμενοι για το τμήμα (ΒΓ) βρίσκουμε ότι:

$$\vec{B}_{(ΒΓ)} = \frac{\mu_0 I}{8R_1} (-\hat{z}) \quad (4)$$

Επομένως το ολικό Μ.Π στο σημείο Ο είναι:

$$\vec{B}_{ol} = \vec{B}_{\Delta\Lambda} + \vec{B}_{ΒΓ} = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \hat{z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

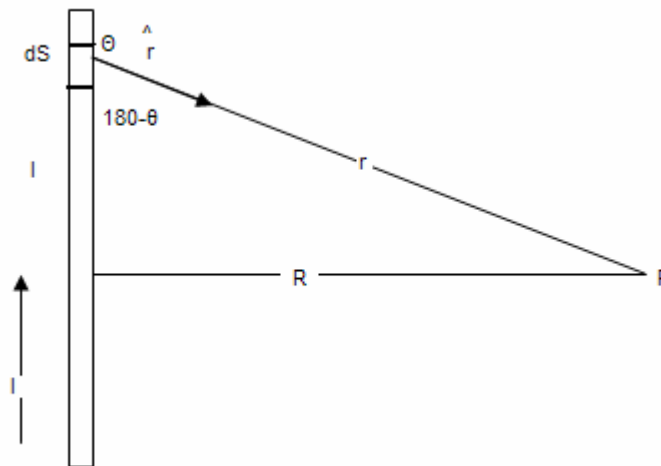
Κλειδί για την λύση της άσκησης είναι ότι τα 2 τόξα είναι εγγεγραμμένα πάνω σε γωνία.

Άσκηση 5

Με την βοήθεια του νόμου του Biot – Savart να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό, που διαρρέεται από ρευματοφόρο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I σε σημείο που απέχει απόσταση R από αυτόν αν:

- ο αγωγός έχει άπειρο μήκος
- ο αγωγός είναι ημιάπειρος
- ο αγωγός έχει πεπερασμένο μήκος $2a$

Λύση



(a) Ο αγωγός έχει άπειρο μήκος $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{S} \times \hat{r}}{r^2}$:νόμος Biot-Savart

$$d\vec{S} \times \hat{r} = dS \sin \theta \quad (1)$$

Αντικαθιστώ (1) στον νόμος Biot-Savart άρα:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dS \sin \theta}{r^2} \quad (2)$$

Στην (2) μεταβάλλονται τρεις ποσότητες : dS, θ, r . Πρέπει να βρω μια έκφραση που να τις συνδέει. Το $\sin \theta$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\sin \theta = \frac{R}{r} \quad (3)$$

Η (3) βγήκε από το γεγονός ότι $\sin(180 - \theta^\circ) = \sin \theta^\circ$

Επίσης $\tan \theta$ είναι ίσο με :

$$\tan(180 - \theta) = -\tan \theta = \frac{-R}{l} \Rightarrow l = -\frac{R}{\tan \theta} \quad (4) \Rightarrow dl = dS = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (5)$$

Αντικαθιστώ την (5) ,(3) στην (2) άρα:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\frac{R}{\sin^2 \theta} \sin \theta}{R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} d\theta \quad (6)$$

Για απείρου μήκους αγωγό έχω ότι οι τιμές του θ μεταβάλλονται από το 0 έως το π rad άρα:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\cos \theta \Big|_0^\pi \right] \Rightarrow B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

Η διανυσματικά: $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (+\hat{z})$

(β) Για Ημιάπειρο Αγωγό

Χρησιμοποιούμε ξανά την (6) αλλά στην περίπτωση αυτή η γωνία θ μεταβάλλεται από 0 έως $\pi/2$ rad .Άρα:

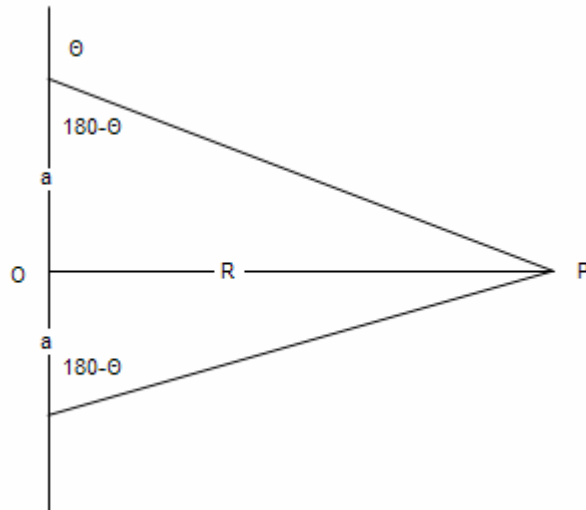
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} d \cos \theta \Leftrightarrow B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos 0 - \cos \pi/2] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

Η διανυσματικά: $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\hat{z})$

(γ) Αγωγός Με μήκος 2^a

Χρησιμοποιούμε την γενική σχέση (6) αλλά τα όρια των τιμών της θ αλλάζουν.

Έτσι η γωνία θ μεταβάλλεται από $\pi/4$ έως $3\pi/4$ άρα από (6)

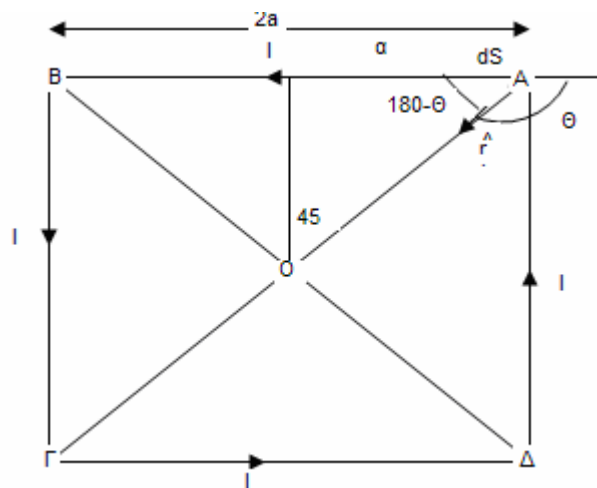


$$B_P = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi R}$$

Άσκηση 6

Ένας συρμάτινος αγωγός έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς $2a$ και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο O του τετραγώνου.

Λύση



Το Μ.Π στο κέντρο του τετραγώνου σημείο O , υπολογίζεται αθροίζοντας διανυσματικά τα Μ.Π των ρευματοφόρων αγωγών.

Από τον νόμο του Biot –Savart έχω:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{S}\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{S}r \sin \theta}{r^2} \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \Leftrightarrow r = \frac{a}{\sin \theta} \quad (2)$$

Αντικαθιστώ (2) στην (1) άρα:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{\frac{a^2}{\sin^2 \theta}} \Leftrightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \sin^3 \theta ds \quad (3)$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta = \frac{a}{l} \Rightarrow l = -\frac{a}{\tan \theta} = -\frac{a \cos \theta}{\sin \theta} \Leftrightarrow dl = ds = (-a) \left(\frac{-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dl = ds = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} \quad (4)$$

Αντικαθιστώ την (4) στην (3) και έχω:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \sin^3 \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \Leftrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta \quad (5)$$

Επομένως το Μ.Π που δημιουργεί ένας ρευματοφόρος αγωγός στο σημείο Ο είναι:

$$B_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d \cos \theta \Leftrightarrow B_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right] \Leftrightarrow B_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \quad (6)$$

Ο πάνω ρευματοφόρος αγωγός (ΑΒ) στο σημείο Ο δημιουργεί Μ.Π με φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη (θετική φορά άξονας Z).

Ο πάνω ρευματοφόρος αγωγός (ΒΓ) δημιουργεί Μ.Π στο σημείο Ο με φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη (θετική φορά άξονας Z).

Την ίδια Μ.Π δημιουργούν και οι ρευματοφόροι αγωγοί (ΓΔ) και (ΔΑ).

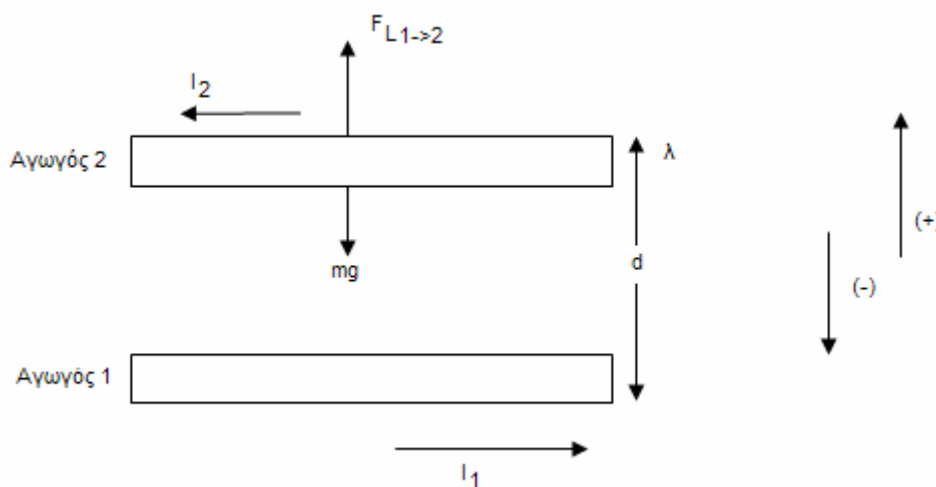
Άρα το συνολικό Μ.Π στο Ο είναι:

$$B_{ολ} = \frac{\mu_0 I 4\sqrt{2}}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a}$$

Άσκηση 7

Ένα στερεωμένο μακρύ οριζόντιο σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I_1 και ακριβώς από πάνω του και παράλληλα σε αυτό βρίσκεται ένα σύρμα με γραμμική πυκνότητα λ (kg/m), που διαρρέεται από ρεύμα I_2 . Πόσο ψηλότερα από το πρώτο σύρμα πρέπει να βρίσκεται το δεύτερο σύρμα, έτσι ώστε να ισορροπεί; Να προσδιοριστεί η κατεύθυνση των ρευμάτων I_1 και I_2 .

Λύση



Πρώτα από όλα θέλουμε εμείς βάση της άσκησης ο αγωγός 2 να ισορροπεί. Επομένως η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω του να είναι ίση με μηδέν.

Δυνάμεις πάνω στον αγωγό 2

Το βάρος του Β $|B| = mg = \lambda l_2 g$ (1)

Ο ρευματοφόρος αγωγός 2 βρίσκεται μέσα στο Μ.Π B_1 που δημιουργεί ο ρευματοφόρος αγωγός 1 άρα θα του ασκείται μια μαγνητική δύναμη F_L ίση με:

$$F_L = I_2 l_2 B_1 \quad (2)$$

Το B_1 εφαρμόζοντας τον νόμο του Biot-Savart δίνεται από την σχέση:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχω ότι το μέτρο της λαπλασιανής δύναμης που ασκείται από το Μ.Π B_1 πάνω στον ρευματοφόρο αγωγό 2 είναι ίσο με:

$$F_L = I_2 l_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi d} \quad (4)$$

Η φορά της (4) για να ισορροπεί ο αγωγός 2 θα πρέπει να είναι αντίθετης φοράς του βάρους.

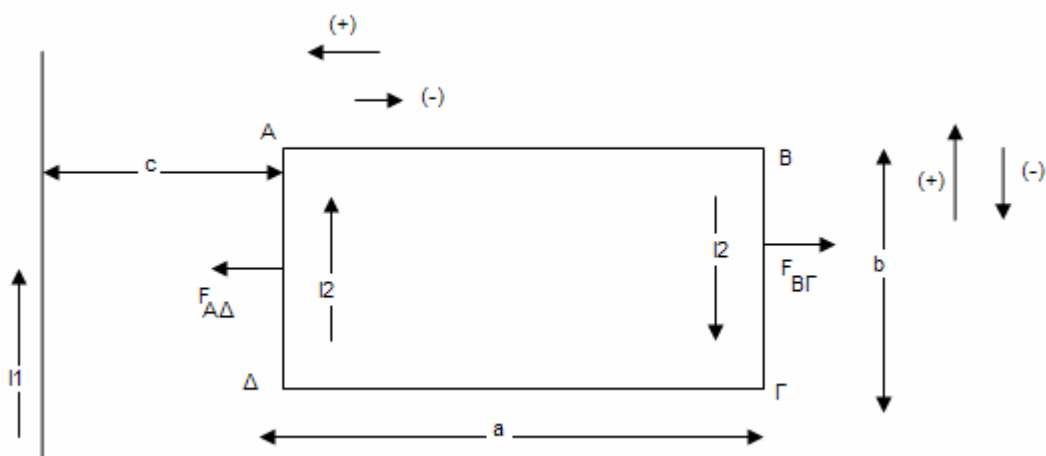
Άρα οι αγωγοί απωθούνται άρα η φορά του ρεύματος I_2 είναι αντίθετης φοράς του I_1 .

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu_0 I_2 I_1 l_2}{2\pi d} = \lambda l_2 g \Leftrightarrow \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \lambda g \Leftrightarrow d = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \lambda g} \quad (5)$$

Άσκηση 8

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα I_1 βρίσκεται στο επίπεδο συρμάτινου ορθογωνίου πλαισίου πλευρών a και b , διαρρεόμενου από ρεύμα I_2 , παράλληλα στο ένα ζεύγος των πλευρών του πλαισίου και σε απόσταση c από την πλησιέστερη. Να υπολογιστεί η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο πλαίσιο.

Λύση



Στο ορθογώνιο πλαίσιο (ΑΒΓΔ) ασκείται δύναμη Laplace από το Μ.Π του αγωγού απείρου μήκους.

Θα υπολογίσουμε την συνισταμένη δύναμη πάνω στο ορθογώνιο πλαίσιο (ΑΒΓΔ) υπολογίζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στους αγωγούς (ΑΒ), (ΒΓ), (ΓΔ), (ΔΑ) και αθροίζοντας τις στην συνέχεια διανυσματικά.

Δύναμη Πάνω Στον Αγωγό (ΑΔ)

Η δύναμη πάνω στον (ΑΔ) είναι ελκτική μια και οι 2 αγωγοί διαρρέονται από ομοιόμορφα ρεύματα.

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{ΑΔ}} &= I_2 l_{\text{ΑΔ}} B_1 \\ l_{\text{ΑΔ}} &= b \\ B_1 &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow F_{\text{ΑΔ}} = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi c} \quad (1)$$

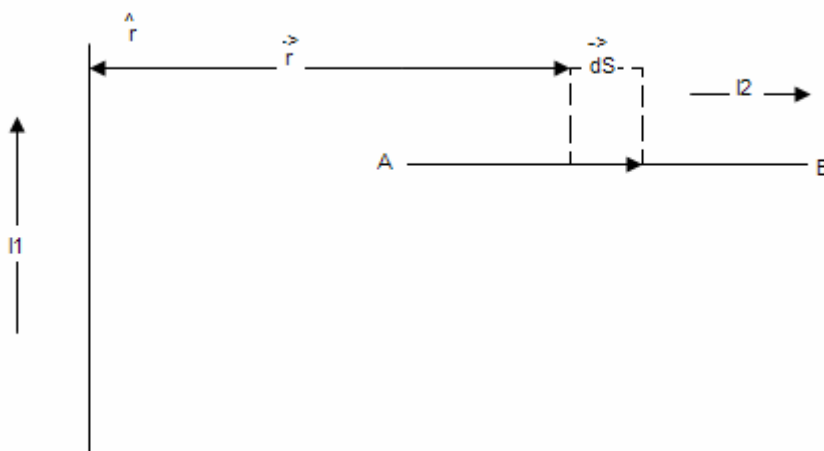
Δύναμη Πάνω Στον Αγωγό (ΒΓ)

Ο απείρου μήκους ρευματοφόρος αγωγός και το ρευματοφόρο τμήμα (ΒΓ) διαρρέονται από αωτίρροπα ρεύματα άρα απωθούνται μεταξύ τους.

$$F_{\text{ΒΓ}} = -\frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi(c+a)} \quad (2)$$

Το (-) προκύπτει από το γεγονός ότι η $F_{\text{ΒΓ}}$ έχει αντίθετη φορά από την θετική οριζόμενη φορά.

Δύναμη Πάνω Στον Αγωγό (ΑΒ)



$$\text{Από B-S: } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{S} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{0}{r^2} = 0$$

Αυτό διότι $d\vec{S} // \hat{r} \Rightarrow d\vec{S} \times \hat{r} = 0$

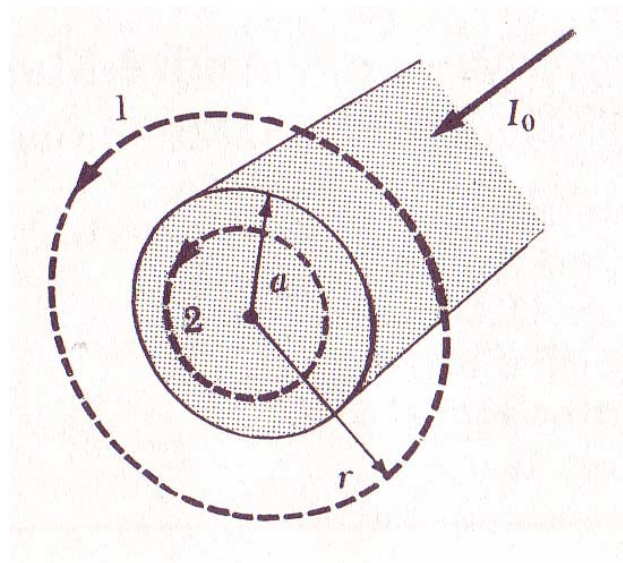
Άρα για τον ίδιο λόγο και η δύναμη πάνω στον αγωγό (ΓΔ) είναι μηδέν.

Άρα η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_{\Lambda\Lambda} + \vec{F}_{\text{B}\Gamma} = \frac{\mu_0 dI_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

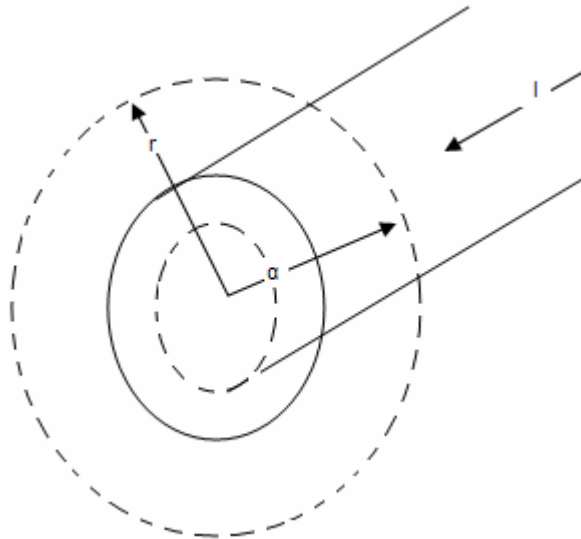
Άσκηση 9

Ένα ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους με ακτίνα διατομής a διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_0 που είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στην διατομή του σύρματος (δες παρακάτω σχήμα). Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση r από το κέντρο του σύρματος για τις περιοχές $r \geq a$ και $r < a$.



Λύση

Για συμμετρικές κατανομές ρεύματος χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ampere για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που δημιουργεί (η κατανομή).



$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{ολ}} \quad (1)$$

Για $r \geq a$ έχω από (1);

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{ολ}} \Leftrightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (2)$$

Για $r < a$ έχω:

Στην περίπτωση αυτή η κατανομή δεν περιέχει ολόκληρο το I_0 αλλά λιγότερο από (1):

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3)$$

Αφού το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο:

$$\frac{I_0}{\pi a^2} = \frac{I}{\pi r^2} \Rightarrow I = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I_0 \Rightarrow I = \frac{r^2}{a^2} I_0 \quad (4)$$

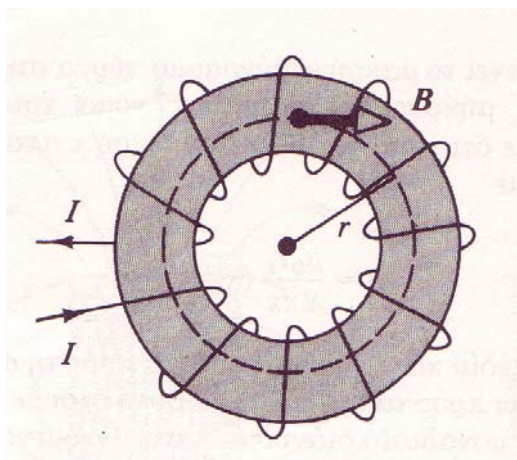
Από (4) στην (3):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{r^2}{a^2} I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} r$$

Άσκηση 10

Το δακτυλιοειδές πηνίο αποτελείται από N σπείρες σύρματος που έχουν τυλιχθεί έτσι ώστε να έχουν το σχήμα δακτυλίου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Εάν

υποθέσουμε ότι οι σπείρες είναι πυκνές, υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου και σε απόσταση r από το κέντρο του.



Λύση

Βάση τον νόμο του Ampere θα υπολογίσουμε το Μ.Π πάνω σε κάθε περιφέρεια ακτίνας r μέσα στο δακτυλιοειδές πηνίο.

Άρα :

$$\vec{B}d\vec{S} = B dS$$

Από Ampere:

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = \mu_0 NI \Leftrightarrow B 2\pi r = \mu_0 NI \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (1)$$

Από (1) παρατηρούμε ότι το Μ.Π δεν είναι ομογενές αλλά μεταβάλλεται ως $1/r$.

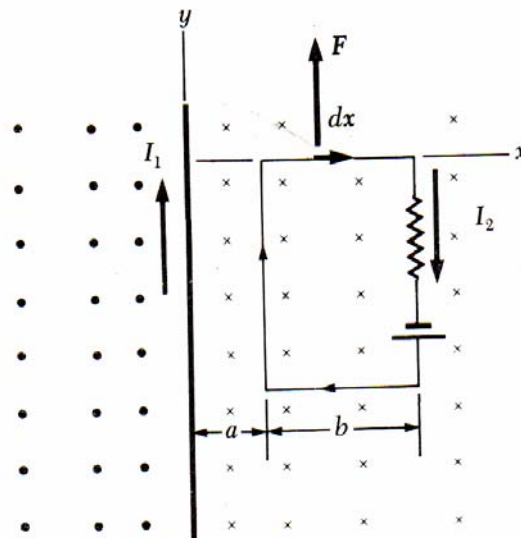
Για μεγάλα $R \gg a$ το B έξω από το πηνίο είναι ομογενές μιας και μεταβάλλεται πολύ αργά.

Εάν οι σπείρες είναι πολύ πυκνές το Μ.Π έξω από το πηνίο είναι μηδενικό μια και παγιδεύεται μέσα στο εσωτερικό του.

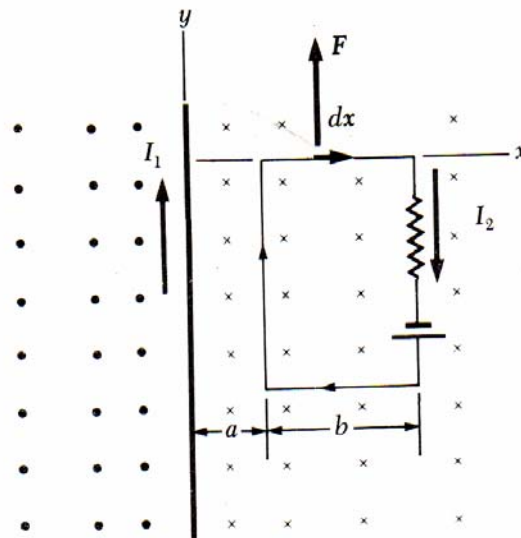
Άσκηση 11

Ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα είναι παράλληλο προς τον άξονα y και διαρρέεται από ρεύμα I_1 , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κοντά του και δεξιά υπάρχει ένα ορθογώνιο κύκλωμα που διαρρέεται από ρεύμα I_2 . Υπολογίστε την μαγνητική δύναμη

στην οποία υπόκειται η επάνω πλευρά του ορθογωνίου κυκλώματος (είναι παράλληλη προς τον άξονα x), η οποία αρχίζει στο $x = a$ και τελειώνει στο $x = a + b$.



Λύση



Το μακρύ ρευματοφόρο σύρμα διαρρέεται απο ρεύμα I_1 και έτσι δημιουργεί στο γύρω από αυτό χώρο Μ.Π έντασης B_1 ίση με:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (1)$$

Το πεδίο αυτό θα ασκεί μια δύναμη Laplace στο ρευματοφόρο ορθογώνιο που δίνεται από την σχέση $F_L = I\vec{L}\vec{B}$.

Από άσκηση μας ζητείται να υπολογίσουμε μαγνητική δύναμη που ασκείται στην πλευρά (AB). από φορά ρεύματος και Μ.Π και από τον κανόνα των 3 δακτύλων έχω ότι η φορά της δύναμης Laplace θα είναι προς τα πάνω.

Από (1) όμως παρατηρούμε ότι το Μ.Π δεν είναι ομογενές οπότε θα υπολογίσουμε την στοιχειώδη δύναμη που ασκείται στον στοιχειώδες ρευματοφόρο τμήμα dx σε απόσταση X και μετά θα αθροίσω τα μέτρα των στοιχειωδών αυτών δυνάμεων.

Έτσι:

$$dF = \frac{I_2 dx \mu_0 I_1}{2\pi x} \Rightarrow F_{ol} = \frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi} \int_a^{\alpha+\beta} \frac{dx}{x} \Leftrightarrow F_{ol} = \frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi} \left[\ln x \right]_a^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow F_{ol} = \frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{a}\right) \quad (2)$$

Διανυσματικά η (2) γράφεται:

$$\vec{F}_{ol} = \frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\beta}{a}\right) \hat{j}$$

Άσκηση 12

Έστω το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \lambda y \hat{i} - \lambda x \hat{j}$, όπου λ σταθερά.

α) Ελέγξτε αν όντως το $\vec{B}$ αποτελεί μαγνητικό πεδίο.

β) Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ που προκαλεί αυτό το μαγνητικό πεδίο.

Λύση

(α) Για να εκφράζει η συνάρτηση $\vec{B} = \lambda y \hat{i} - \lambda x \hat{j}$ Μ.Π θα πρέπει η απόκλιση της να είναι μηδέν.

Επομένως:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] [\lambda y \hat{i} - \lambda x \hat{j}] = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda y) + \frac{\partial}{\partial y} (-\lambda x) = 0$$

Επομένως όντως η συνάρτηση $\vec{B} = \lambda y \hat{i} - \lambda x \hat{j}$ εκφράζει Μ.Π

(β) Από τον νόμο Ampere έχω:

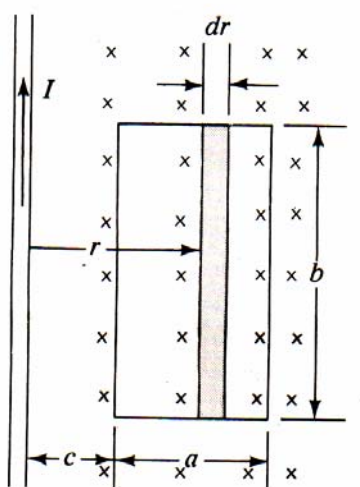
Από διαφορική του μορφή:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda y & -\lambda x & 0 \end{pmatrix} = \mu_0 j \Leftrightarrow (0\hat{i}) - (0\hat{j}) + \left(\frac{\partial(-\lambda x)}{\partial x} - \frac{\partial(\lambda y)}{\partial y} \right) \hat{k} = \mu_0 j \Rightarrow$$

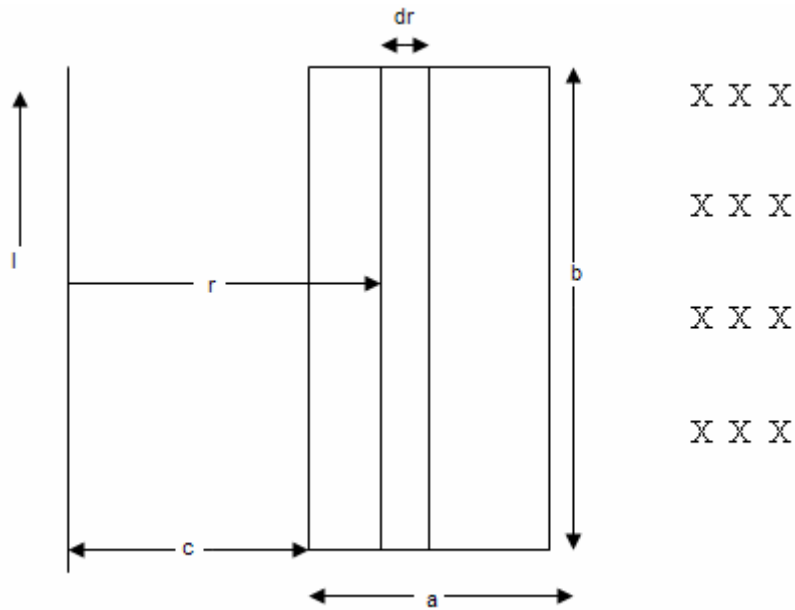
$$\Leftrightarrow (-\lambda - \lambda) \hat{k} = \mu_0 j \Rightarrow \vec{j} = \frac{-2\lambda}{\mu_0} \hat{k}$$

Άσκηση 13

Ένας ορθογώνιος βρόχος πλάτους a και μήκους b βρίσκεται σε απόσταση c από ένα μεγάλου μήκους ευθύγραμμο σύρμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I (δες παρακάτω σχήμα). Το σύρμα είναι παράλληλο προς την πλευρά μήκους b . Βρείτε την ολική ροή μαγνητικού πεδίου που διαπερνά τον βρόχο.



Λύση



Για να υπολογίσω την ολική ροή που διαπερνά τον ορθογώνιο βρόχο θα πρέπει να υπολογίσω την στοιχειώδη ροή που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια dA και στην συνέχεια θα αθροίσω τις ροές αυτές.

$$d\Phi_B = B dA$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ για σταθερή απόσταση } r \text{ το Μ.Π είναι ομογενές.}$$

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr \Rightarrow \Phi_{\text{Βολ}} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \Phi_{\text{Βολ}} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} [\ln(a+c) - \ln(c)] \Leftrightarrow \Phi_{\text{Βολ}} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

Άσκηση 14

Κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από ομοιόμορφα καταναμημένο ρεύμα έντασης I . Να υπολογιστούν:

- Η μαγνητική ενέργεια που περιέχεται στο εσωτερικό του αγωγού σε μήκος l
- Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του αγωγού σε μήκος l .

Λύση



(α) Η μαγνητική ενέργεια στο εσωτερικό του αγωγού δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B_{\varepsilon\sigma}^2 dV \quad (1)$$

Το Μ.Π στο εσωτερικό του ρευματοφόρου αγωγού βρίσκεται εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere.:

$$\oint B dS = \mu_0 I \Leftrightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

Αφού το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{2\pi r l}{2\pi R l} \Rightarrow I = \frac{r l}{R} I_0 \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (2):

$$B_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r \quad (r < R)$$

Αντικαθιστώ την (4) στην (1) άρα

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2 R^4} r^2 dV = \frac{\mu_0^2 I_0^2}{8\pi^2 R^4} \int r^2 dV \Rightarrow U = \frac{\mu_0^2 I_0^2}{8\pi^2 R^4} \int 2\pi r l r^2 dV \Leftrightarrow U = \frac{\mu_0^2 I_0^2}{8\pi^2 R^4} 2\pi r l \int_0^R r^3 dr \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow U = \frac{\mu_0^2 I_0^2}{8\pi^2 R^4} \frac{R^4}{4} \Leftrightarrow U = \frac{\mu_0 I_0^2 l}{16\pi} \quad (5) \end{aligned}$$

Επομένως από (5) επιβεβαιώνεται ότι το Μ.Π στο εσωτερικό του αγωγού είναι ομογενές.

(β) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του αγωγού δίνεται από την γενική σχέση:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{I_0^2} = \frac{2 \frac{\mu_0 I_0^2 l}{16\pi}}{I_0^2} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

Άσκηση 15

Υπό ποια προϋπόθεση η μαγνήτιση $\vec{M}$ ενός υλικού μπορεί να δημιουργήσει ελεύθερο ρεύμα πυκνότητας $\vec{J}_F$

Λύση

Η μαγνήτιση $\vec{M}$ οφείλεται στα εσωτερικά ρεύματα μέσα σε ένα υλικό. Συνδέεται με την πυκνότητα ρεύματος των ελεύθερων (e) με την σχέση:

$$\nabla \cdot \vec{M} = \vec{j}_m \quad (1)$$

Σε ένα υλικό το ολικό ρεύμα που το διαρρέει είναι αυτό στα ελεύθερα φορτία και αυτό στα δέσματα. Επομένως ο νόμος του Ampere γράφεται: (στην διαφορική του μορφή)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j}_F + \vec{j}_m) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_F + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} = \mu_0 \vec{j}_F \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{j}_F &= \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}}{\mu_0} = \frac{\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M})}{\mu_0} \quad (2) \end{aligned}$$

Από (2) καταλαβαίνουμε ότι για να δημιουργεί η μαγνήτιση $\vec{M}$ ελεύθερο ρεύμα θα πρέπει:

$$\vec{B} \neq \mu_0 \vec{M} \Rightarrow \vec{M} \neq \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ (1)

$$M = \frac{d\vec{m}}{dV} = \frac{d}{dV}(IdA) \Leftrightarrow M_0 dl = I \Leftrightarrow \int M dl = \int J dA \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}$$