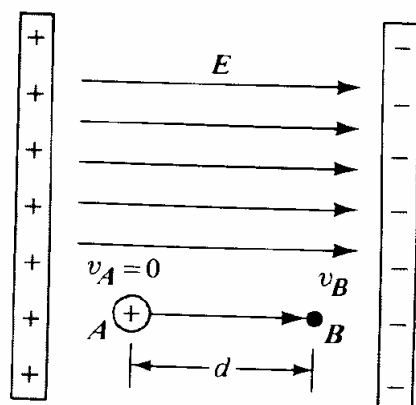


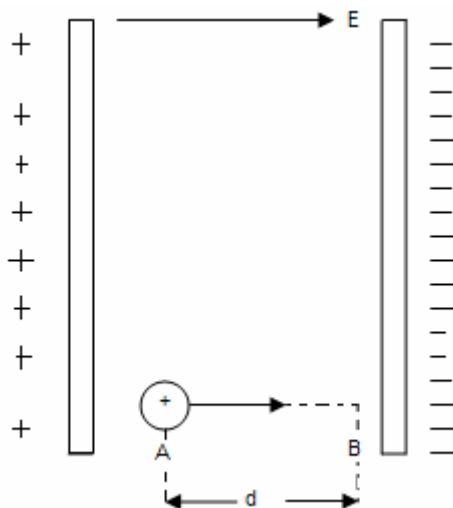
Άσκηση 1

Ένα πρωτόνιο που αρχικά ηρεμεί αφήνεται ελεύθερο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο έχει μέτρο $8 \times 10^4 \text{ V/m}$ και κατευθύνεται παράλληλα προς τον θετικό άξονα x. Το πρωτόνιο μετατοπίζεται κατά 0.5 m προς την κατεύθυνση του E. (α) Υπολογίστε την μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B. (β) Υπολογίστε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του πρωτονίου η οποία αντιστοιχεί στην μετατόπιση αυτή. (γ) Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου αφού αυτό μετατοπιστεί κατά 0.5 m.



Ασκ.1

Λύση



* Παρατήρηση: Απο σχήμα Ασκ 1

$$U_B - U_A = \Delta V_{A \rightarrow B} * q_{(p)} \vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow$$

$$q_{(p)} = 1.6 * 10^{-19} \text{ Cb} \quad \Rightarrow \vec{E} * d\vec{S} = |E| |dS| \quad (2)$$

(α)

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = \frac{U_B - U_A}{q} = - \int_A^B E \cdot dS \quad (1)$$

Απο (1):

$$\begin{aligned} \Delta V_{A \rightarrow B} &= - \int_0^{0.5} 8 \cdot 10^4 \cdot dS = \\ &= -8 \cdot 10^4 (0.5) = -4 \cdot 10^4 \text{ volt} \end{aligned}$$

Το (-) έχει την φυσική σημασία ότι το (ε) κινείται από την θέση του υψηλότερου δυναμικού προς το χαμηλότερο δυναμικό.

(β) Από (1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας:

$$\left. \begin{aligned} U_B - U_A &= \Delta V_{A \rightarrow B} \cdot q_{(p)} \\ q_{(p)} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} U_B - U_A &= (-4 \cdot 10^4 \text{ V}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow U_B - U_A = -6.4 \cdot 10^{-15} \text{ joules} \end{aligned}$$

(γ) Από αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι οποιαδήποτε μεταβολή (π.χ αύξηση) της δυναμικής ενέργειας ισούτε με την αντίστροφη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΑΡΑ:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} m u_p^2 - 0 \right) + (-6.4 \cdot 10^{-15}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_p^2 &= \frac{12.8 \cdot 10^{-15}}{1.67 \cdot 10^{-27}} \Leftrightarrow U = 2.77 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Ένα πρωτόνιο κινείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πρωτόνιο αυξάνει την κινητική του ενέργεια κατά $5 \times 10^{-18} \text{ J}$ αφού διανύσει απόσταση 2 cm παράλληλα προς την κατεύθυνση του πεδίου. Ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου;

Λύση

Από ορισμό διαφοράς δυναμικού ισχύει ότι:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B E dS \quad (1)$$

Από αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

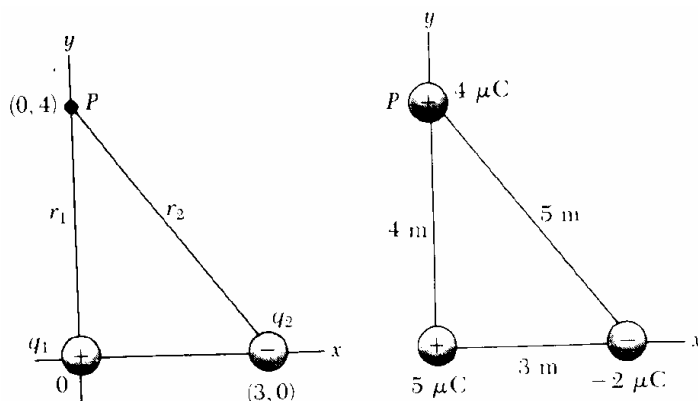
$$\Delta U + \Delta k = 0 \Leftrightarrow \Delta k = -\Delta U = -5 \cdot 10^{18} \text{ J} \quad (2)$$

Από 2 στην 1 έχουμε:

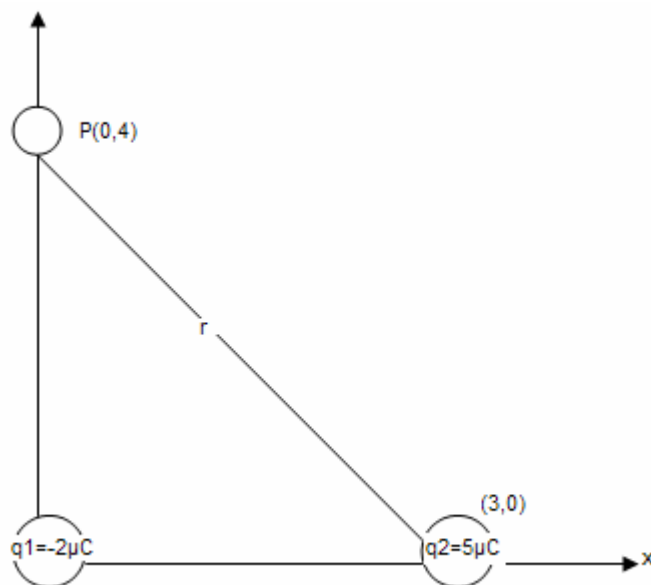
$$\begin{aligned} -5 \cdot 10^{18} \text{ J} &= \int_0^{2 \cdot 10^{-2}} E dS \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{5 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2.5 \cdot 10^{20} \text{ Nt/Cb} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ένα φορτίο $5 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, ένα άλλο φορτίο $-2 \mu\text{C}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα x με συντεταγμένες $(3,0) \text{ m}$, όπως στο σχήμα Ασκ.3. (α) Θεωρήστε ότι το δυναμικό είναι μηδενικό στο άπειρο και υπολογίστε το ολικό δυναμικό που δημιουργούν τα δύο αυτά φορτία στο σημείο P , το οποίο έχει συντεταγμένες $(0,4) \text{ m}$. (β) Πόσο έργο απαιτείται για να φέρουμε ένα τρίτο σημειακό φορτίο $4 \mu\text{C}$ από το άπειρο στο σημείο P .



Λύση



(α) Το δυναμικό στο σημείο P βρίσκεται αθροίζοντας αλγεβρικά τα δυναμικά που οφείλονται λόγω του φορτλιου q_1, q_2

Το δυναμικό σημειακού φορτίου δίνεται απο την σχέση:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (1)$$

Έτσι το δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q_2 στο P είναι ίσο με

$$V_2 = k \frac{q_2}{r_{q_2 \rightarrow P}} = k \frac{q_2}{4} = K_{\eta\lambda} \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4} \quad (2)$$

Το δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q_1 στο P δίνεται απο την (1):

$$V_1 = k \frac{q_1}{r} = k_{\eta\lambda} \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{5} \quad (3)$$

Το ολικό δυναμικό είναι ίσο με (προσθέσε (2),(3))

$$\begin{aligned} V_{ol} &= k_{\eta\lambda} \frac{q_1}{r_1} + k_{\eta\lambda} \frac{q_2}{r} = k_{\eta\lambda} \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{4} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{ol} &= 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} * \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{4} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_{ol} &= 7.65 \cdot 10^{-3} V \end{aligned}$$

(β) Το έργο που απαιτείται για να φέρεις ένα φορτίο q από το άπειρο στο P ισούται με το δυναμικό στο σημείο P επί το φορτίο q . ΑΡΑ:

$$W = V_p * q = (7.65 * 10^{-3}) * (4 * 10^{-6}) = 3.06 * 10^{-2} \text{ J}$$

Άσκηση 4

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο q , σε απόσταση r από το φορτίο, έχει ένταση $E = 150 \text{ N/C}$ και το δυναμικό είναι 400 V . Προσδιορίστε τις τιμές των q και r .

Λύση

(α) Το Η.Π που δημιουργεί σημειακό φορτίο δίνεται από την σχέση:

$$E = K_{\eta\lambda} \frac{q}{r^2} \quad (1)$$

Το δυναμικό που δημιουργεί σημειακό φορτίο σε απόσταση r δίνεται από την σχέση:

$$V = K_{\eta\lambda} \frac{q}{r} \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) και (2) κατά μέλη:

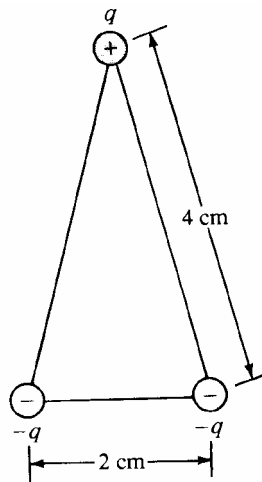
$$\begin{aligned} \frac{E}{V} &= \frac{K_{\eta\lambda} \frac{q}{r^2}}{K_{\eta\lambda} \frac{q}{r}} = \frac{1}{r} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= \frac{E}{V} = \frac{400}{150} = 2.66 \text{ m} \end{aligned}$$

(β)

$$V = K_{\eta\lambda} \frac{q}{r} \Leftrightarrow q = \frac{r * V}{K_{\eta\lambda}} = \frac{(2.66) * (400)}{9.0 * 10^9} = 118.2 * 10^{-9} \text{ Cb}$$

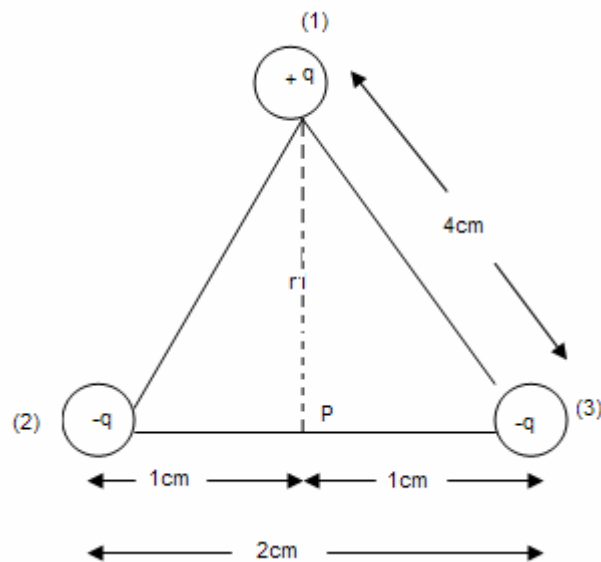
Άσκηση 5

Τα τρία φορτία που φαίνονται στο σχήμα Ασκ. 5 βρίσκονται στις κορυφές ενός ισοσκελούς τριγώνου. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο μέσον της βάσης του τριγώνου, παίρνοντας $q = 7 \mu\text{C}$.



Ασκ.5

Λύση



Παρατήρηση: Λόγω του ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές η διάμεσος είναι υψος και διχοτόμος .

Το δυναμικό στο σημείο P ισούτε με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών απο τα φορτία $-q$ και $+q$.

Το δυναμικό σημειακού φορτίου δίνεται από την σχέση: $V = k_{\eta\lambda} \frac{q}{r}$ (1)

Δυναμικό στο σημείο P από το φορτίο (1)

$$V_{(1) \rightarrow P} = k_{\eta\lambda} \frac{q}{r_1} = 9.0 * 10^9 \frac{7 * 10^{-6}}{\sqrt{[(1) * 10^{-2}]^2 + [(4 * 10^{-2})]^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(1) \rightarrow P} = \frac{63 * 10^3}{\sqrt{1 * 10^{-4} + 16 * 10^{-4}}} = \frac{63 * 10^3}{4.12 * 10^{-2}} \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow V_{(1) \rightarrow P} = 15.29 * 10^5 \text{ volt}$$

Δυναμικό στο σημείο P από το φορτίο (2),(3)

$$V_{(1) \rightarrow P} = k_{\eta\lambda} \frac{q}{r_2} = 9 * 10^9 \frac{(-7) * 10^{-6}}{10^{-2}} = -63 * 10^5 \text{ volt} \quad (3)$$

Ομοίως το δυναμικό του (3) στο P είναι ίσο με (3)

Αθροίζοντας την (2), (3) έχουμε :

$$V_{P_{\Sigma\text{ov}}} = 15.29 * 10^5 - 126 * 10^5 = -110.7 * 10^5 \text{ VOLT}$$

Άσκηση 6

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση:

$$V(x, y) = -A(x^3 + 3y) \text{ όπου } A \text{ σταθερά.}$$

(α) Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

(β) Να υπολογιστεί η χωρική πυκνότητα ρ της κατανομής του φορτίου στην οποία οφείλεται αυτό το πεδίο.

Λύση

α) Η σχέση που συνδέει το Η/Π με το δυναμικό είναι η:

$$E = -\nabla V = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) V \quad (1)$$

Αντικαθιστώ την συνάρτηση της τάσης στην (1) οπότε:

$$E = -\hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(-Ax^3) - \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(-A3y) + \hat{k}(0) \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(x, y) = (3Ax^2)\hat{i} + \hat{j}(3A)$$

(β) Απο διαφορική έκφραση νόμου Gauss έχω:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] * [(3Ax^2)\hat{i} + (3A)\hat{j}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \epsilon_0(6Ax + 0) \Leftrightarrow \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \rho = 6A\epsilon_0 x$$

Άσκηση 7

Η συνάρτηση δυναμικού ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από την σχέση:

$$V(x, y) = k(x^2 - y^2) \text{ όπου } k \text{ σταθερά.}$$

Να υπολογιστούν

(α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε τυχαίο σημείο του χώρου

(β) Η χωρική πυκνότητα φορτίου σε τυχαία θέση

(γ) Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης για μετακίνηση ενός φορτίου q από την θέση A(1,1) μέχρι την θέση B(3,4)

Λύση

(α) Η σχέση που συνδέει το Η.Π με το δυναμικό δίνεται από την σχέση: $E = -\vec{\nabla}V$ (1)

Αντικαθιστώντας την έκφραση του V στην (1) έχουμε:

$$E = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) * [k(x^2 - y^2)] = \quad (2)$$

$$= (-2kx)\hat{i} + (2ky)\hat{j}$$

(β) Η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \rho = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) =$$

$$= \rho = \epsilon_0 (-2k + 2k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

(γ) Το έργο της μετακίνησης ενός φορτίου q από την θέση $A(1,1)$ μέχρι την θέση $B(3,4)$ ισούται με:

Το έργο που παράγει μια δύναμη είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_{(1,1)}^{(3,4)} [(-2kxq)\hat{i} + (2kyq)\hat{j}] * [(dx)\hat{i} + (dy)\hat{j}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W &= \int_1^3 (-2kxq)dx + \int_1^4 (2kyq)dy = \\ &= -2kxq \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + 2kq \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = -kq(3^2 - 1^2) + kq(4^2 - 1^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W &= -8kq + 15kq \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W_{AB} &= 7kq \end{aligned}$$

Άσκηση 8

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \frac{E_0}{a}(x-y)\hat{x} - \frac{E_0}{a}(x+y)\hat{y}$

(α) Να υπολογιστεί η πυκνότητα φορτίου στο χώρο

(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού $V(x,y,z)$, λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς δυναμικού το σημείο $O(0,0,0)$

Λύση

(α) Από διαφορική μορφή του νόμου του Gauss έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{[(k_{\eta\lambda}Q)' \sqrt{x^2 + a^2} - k_{\eta\lambda}Q(\sqrt{x^2 + a^2})']}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= \frac{k_{\eta\lambda}Q \frac{1}{2} 2x(x^2 + a^2)^{-1/2}}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= k_{\eta\lambda} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} * E = \frac{p}{\epsilon_0} \Rightarrow p = \epsilon_0 \vec{\nabla} * E = \epsilon_0 \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) * \frac{E_0}{a}(x-y)\hat{i} - \frac{E_0}{a}(x+y)\hat{j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \epsilon_0 \left(\frac{E_0}{a} - \frac{E_0}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 0$$

(β) Η σχέση που συνδέει το δυναμικό με το Η.Π είναι:

$$\begin{aligned}\vec{E} = \vec{\nabla} * V \Rightarrow E = -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\hat{i}Ex + \hat{j}Ey) = -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} &\end{aligned} \quad (1)$$

Από (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}Ex = -\frac{\partial V}{\partial x} &\Leftrightarrow \frac{E_0}{a}(x-y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow -\partial V = \left[\frac{E_0}{a}(x-y) \right] \partial x \Rightarrow \\ \frac{E_0}{a}(x-y)dx &= -\frac{E_0}{a} \left[\int_0^x xdx - \int_0^x ydx \right] \Leftrightarrow \\ \Rightarrow V = -\int_0^x & \\ \Leftrightarrow V = -\frac{E_0}{a} \left[\frac{x^2}{2} - yx \right] &+ c(y)\end{aligned} \quad (2)$$

Από (2), (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{E_0}{a}(x+y) &\Rightarrow \frac{E_0}{a}x + \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{E_0}{a}(x+y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{E_0}{a}y &\Rightarrow c(y) = \frac{E_0}{2a}y^2 + c\end{aligned} \quad (3)$$

Επομένως η συνάρτηση που μας δίνει το δυναμικό είναι:

$$V(x, y) = -\frac{E_0}{a} \left[\frac{x^2}{2} - yx \right] + \frac{E_0}{2a} y^2 + c \quad (4)$$

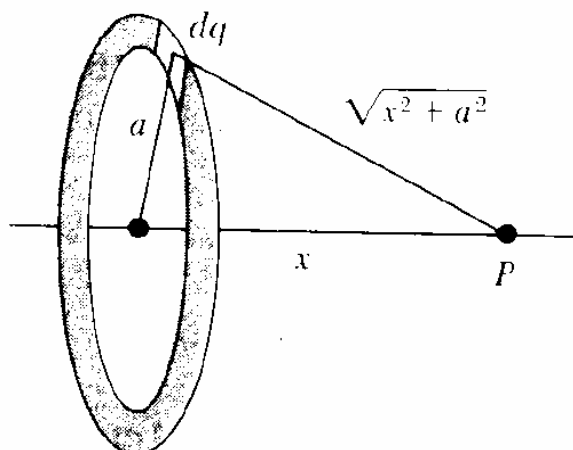
Μπορώ να θεωρήσω ότι $V(0,0)=0$ άρα $C=0$. Επομένως

$$V(x, y) = -\frac{E_0}{a} \left[\frac{x^2}{2} - yx \right] + \frac{E_0}{2a} y^2$$

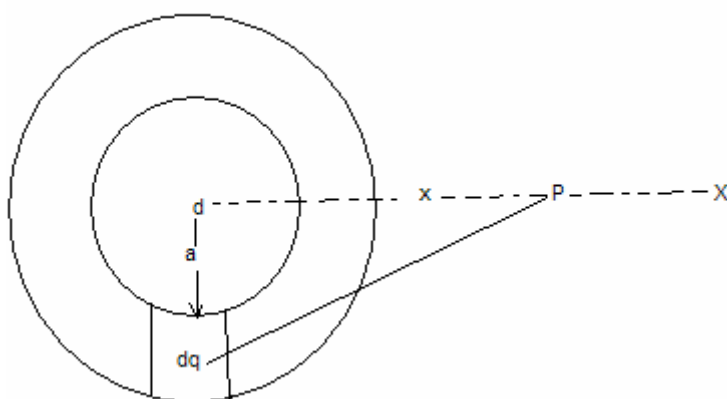
Άσκηση 9

Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που κείται πάνω στον άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου ακτίνας a και ολικού φορτίου Q . Υπολογίστε επίσης το ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο P. Ποιο είναι το δυναμικό στο κέντρο ενός

ομοιόμορφα δακτυλίου; Τι σας λέει για το V το γεγονός ότι $E = 0$; Ο δακτύλιος κείται πάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα x .



Λύση



Σε τέτοιου είδους προβλήματα που έχω ομοιόμορφη κατανομή φορτίου (α) χωρίζω την κατανομή σε στοιχειώδη φορτία dq , (β) υπολογίζω το δυναμικό που δημιουργεί το στοιχειώδη φορτίο dq στο δεδομένο σημείο του χώρου P κάνοντας χρήση της σχέσης του δυναμικού στοιχειώδους φορτίου και (γ) αθροίζω αλγεβρικά όλες τις στοιχειώδους συνεισφορές δυναμικού στο P και υπολογίζω αλγεβρικά το ολικό δυναμικό.

Απα το δυναμικό που δημιουργεί στο σημείο P το στοιχειώδες φορτίο dq δίνεται απο την σχέση:

$$dV = k_{\eta\lambda} \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (1)$$

Το ολικό δυναμικό στο σημείο P δίνεται απο την ολοκλήρωση της (1) πάνω σ'ολη την επιφάνεια του δακτυλίου Έτσι:

$$V_{ol} = \int_0^Q k_{\eta\lambda} \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (2)$$

Από την (2) παρατηρούμε ότι από την μοναδική συνιστώσα που εξαρτάται το δυναμικό είναι η x.

Το ηλεκτρικό πεδίο E λοιπόν θα έχει και αυτό μόνο μια συνιστώσα x. Άρα:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \\ &= -\frac{\left[(k_{\eta\lambda} Q)' * \sqrt{x^2 + a^2} - k_{\eta\lambda} Q (\sqrt{x^2 + a^2})' \right]}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E = \frac{k_{\eta\lambda} Q \frac{1}{2} * 2x(x^2 + a^2)^{-1/2}}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E = k_{\eta\lambda} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Στο κέντρο του ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\text{Κέντρο δακτυλίου δηλαδή } x=0 \Rightarrow^{(3)} E = 0 \quad (4)$$

Αλλά :

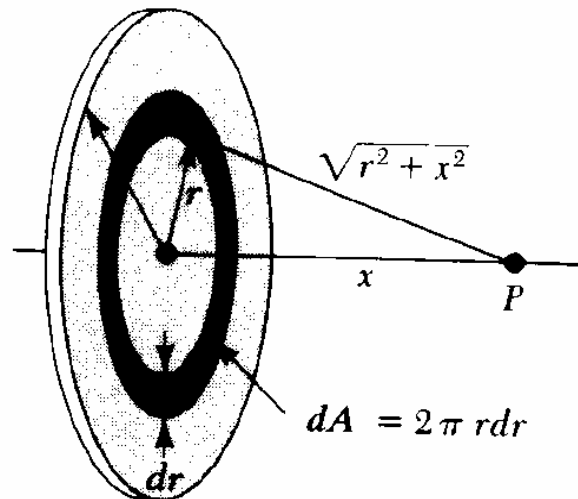
$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow^{(4)} 0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(\text{κέντρο δακτ}) = \text{σταθερό} \quad (5)$$

Το αποτέλεσμα (5) επιβεβαιώνεται από την 2 αντικαθιστώντας για $x=0$. Άρα:

$$V(\text{κέντρο δακτυλίου}) = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{a} \quad (6)$$

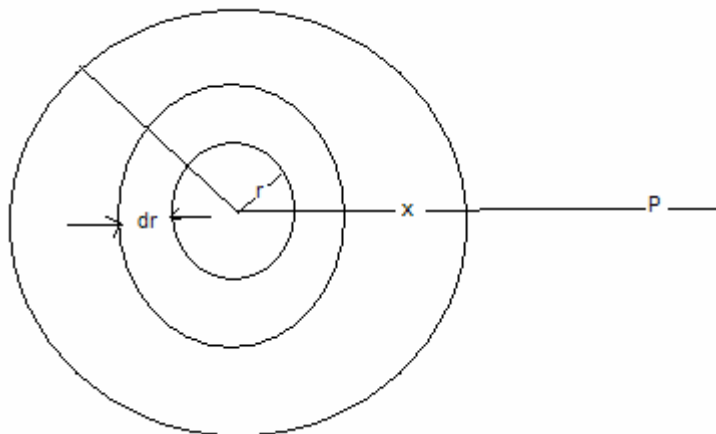
Άσκηση 10

Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας ενός δίσκου ακτίνας a , ομοιόμορφα φορτισμένου, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ .



Λύση

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε στην άσκηση αυτή είναι παρόμοια με την 9. Χωρίζω τον δίσκο σε στοιχειώδους δακτυλίους. Κατόπιν υπολογίζουμε το δυναμικό στο σημείο P που δημιουργεί ο κάθε στοιχειώδης δακτύλιος και στην συνέχεια αθροίζω τα στοιχειώδη δυναμικά και υπολογίζω το ολικό δυναμικό που δημιουργεί ο δίσκος στο σημείο P.



Απο αποτέλεσμα της άσκησης 9 έχω ότι το δυναμικό που δημιουργεί ένας δακτύλιος είναι:

$$\left. \begin{aligned} dV &= k_{\eta\lambda} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} & (1) \\ dq &= \sigma A & (2) \end{aligned} \right\}$$

$$A = 2\pi r dr \quad (3)$$

$$\Rightarrow dV = K_{\eta\lambda} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την 4 υπολογίζουμε το δυναμικό που δημιουργεί ο δίσκος στο σημείο P:

$$\begin{aligned} V_{ol} &= \int_0^r k_{\eta\lambda} \frac{\sigma 2\pi r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr = \sigma k_{\eta\lambda} \pi \int_0^r \frac{2r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_{ol} &= \sigma k_{\eta\lambda} \pi \int_0^r \frac{d(r^2 + x^2)}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \sigma k_{\eta\lambda} \pi \int_0^r (r^2 + x^2)^{-1/2} d(r^2 + x^2) = \\ &= 2\sigma k_{\eta\lambda} \pi \int_0^r d(r^2 + x^2)^{1/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{ol} &= 2\sigma k_{\eta\lambda} \pi \left[\sqrt{r^2 + x^2} - xa \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Παρατηρούμε από 5 ότι το δυναμικό έχει εξάρτηση από την μεταβλητή x. Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την σχέση:

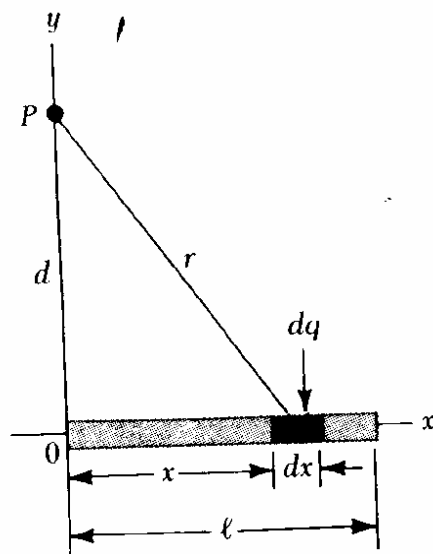
$$\begin{aligned} E = \frac{\partial V}{\partial x} &= -2\sigma\pi k_{\eta\lambda} \left(\frac{1}{2} * \frac{2x}{\sqrt{r^2 + x^2}} - 1 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= 2\sigma\pi k_{\eta\lambda} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Από 6 μπορούμε να υπολογίσουμε το Η.Π στο κέντρο του δίσκου. Επομένως για X=0 έχω:

$$E = 2\pi\sigma k_{\eta\lambda}$$

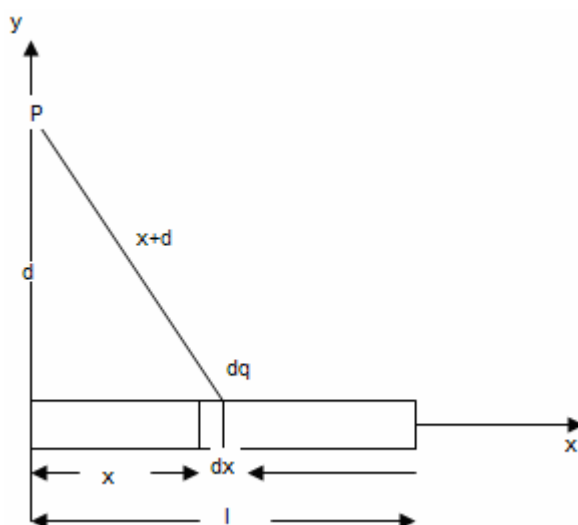
Άσκηση 11

Μια ράβδος μήκους l κείται πάνω στον άξονα x και είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P πάνω στον άξονα y και σε απόσταση d από την αρχή των συντεταγμένων.



Λύση

Χωρίζουμε την ράβδο σε στοιχειώδη φορτία dq και υπολογίζουμε το δυναμικό που δημιουργούν στο σημείο P. Αθροίζοντας τα στοιχειώδη δυναμικά και υπολογίζουμε το ολικό.



Το στοιχειώδες δυναμικό dV που δημιουργεί το στοιχειώδες φορτίο dq στο σημείο P
 ΑΠΑ:

$$dV = k_{\eta\lambda} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad (1)$$

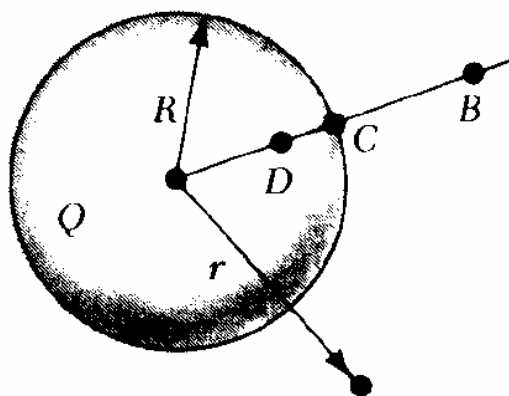
Ολοκληρώνουμε την (1) κατα μήκος της ράβδου και βρίσκουμε το ολικό δυναμικό

στο σημείο ΑΡΑ:

$$\begin{aligned}
 V_{ol} &= \int_0^Q k_{\eta\lambda} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \int_0^l k_{\eta\lambda} \frac{\lambda dq}{\sqrt{x^2 + d^2}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_{ol} &= \lambda k_{\eta\lambda} \int_0^l \frac{dq}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \lambda k_{\eta\lambda} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_0^l \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow V_{ol} &= \lambda k_{\eta\lambda} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} = \frac{kQ}{l} \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} \right)
 \end{aligned}$$

Άσκηση 12

Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R , κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό, είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη με ολικό φορτίο Q . (α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό για ένα σημείο που κείται έξω από την σφαίρα, $r > R$. Θεωρήστε ότι το δυναμικό είναι μηδενικό όταν $r = \infty$. (β) Βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο μέσα στην σφαίρα, όταν δηλαδή $r < R$. (γ) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο ενός ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας; Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο αυτό;



Λύση

(α) Το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί η σφαίρα σε απόσταση $r > R$ δίνεται από την σχέση που δίνει το στοιχειώδες φορτίο:

$$V = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{r} \quad (1)$$

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε την 1 είναι μέσω του Η.Π. Πιο συγκεκριμένα:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow dV(r) = -E_r dr \Rightarrow V(r) = -\int_0^r E_r dr = -k_{\eta\lambda} Q \int_0^r \frac{dr}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r) = \frac{k_{\eta\lambda} Q}{r} \quad (2)$$

(β) Το δυναμικό για αποστάσεις $r < a$ βρίσκεται μέσω του Η.Π. Έτσι το Η.Π στο εσωτερικό του αγωγού δίνεται από την σχέση:

$$E_r = \frac{kQr}{R^3}$$

Άρα:

$$V_D - D_C = -\int_R^r E_r dr = -\int_R^r \frac{kQ}{R^3} r dr = -\frac{kQ}{R^3} \int_R^r r dr =$$

$$= -\frac{kQ}{R^3} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_D - D_C = -\frac{kQ}{2R^3} (r^2 - R^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_D - D_C = \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r^2) \quad (3)$$

Αντικαθιστώ στην (3) $V_D = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{R}$ άρα:

$$V_D = \frac{k_{\eta\lambda} QR^2}{2R^3} - \frac{kQr^2}{2R^3} + \frac{kQ}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_D = \frac{3k_{\eta\lambda} Q}{2R} - \frac{k_{\eta\lambda} Q}{2R^3} r^2 \Leftrightarrow \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow V_D = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

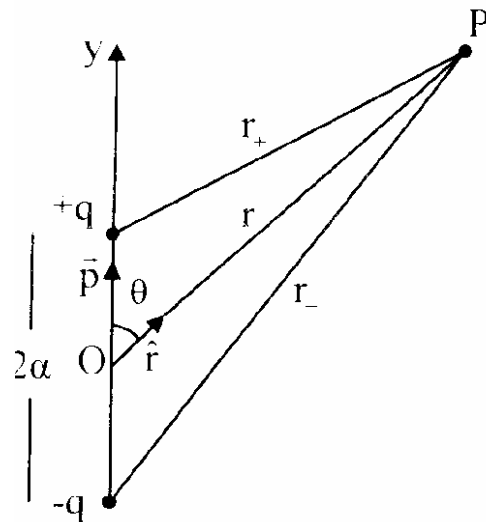
Το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της σφαίρας βρίσκεται από την σχέση για $x=0$ άρα είναι $\mathbf{E}=0 \text{ Nt / Cb}$

Το δυναμικό στο κέντρο της σφαίρας για $r=0$ βρίσκεται από την σχέση (4) και είναι:

$$V_D = \frac{3kQ}{2R}$$

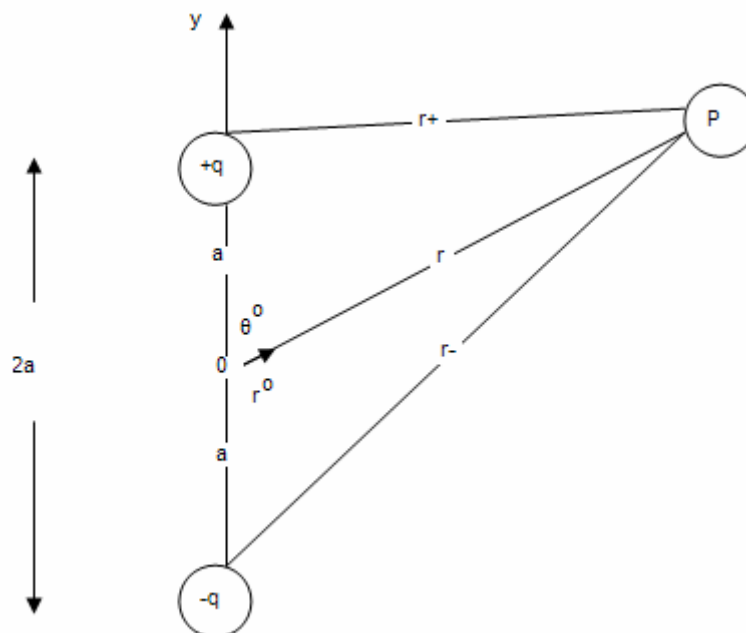
Άσκηση 13

Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται σε ένα ηλεκτρικό δίπολο, σε ένα σημείο μακριά από το δίπολο και μέσω αυτού το ηλεκτρικό πεδίο διπόλου στο ίδιο σημείο.



Λύση

Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από 2 ίσα αλλά αντίθετα φορτία που έχουν μεταξύ τους απόσταση 2a.



Το δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο q στο σημείο P είναι ίσο με :

$$V_q = k_{\eta\lambda} \frac{q}{r_+} \quad (1)$$

Το δυναμικό που δημιουργεί το φορτίο $-q$ στο σημείο P είναι ίσο με:

$$V_{-q} = -k_{\eta\lambda} \frac{q}{r_-} \quad (2)$$

Το ολικό δυναμικό στο σημείο P είναι ίσο με

$$V_{ol} = \kappa_{\eta\lambda} q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \kappa_{\eta\lambda} q \left(\frac{r_- - r_+}{r_- * r_+} \right) \quad (3)$$

Αλλά $r \gg 2^a$ άρα $r_- - r_+ = 2a \cos \theta$ και $r_- * r_+ = r^2$

Άρα στην 3 έχω:

$$\begin{aligned} V_{ol} &= \kappa_{\eta\lambda} q \frac{2a \cos \theta}{r^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_{ol} &= \kappa_{\eta\lambda} \frac{\vec{P} * \hat{r}}{r^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Το δυναμικό παρατηρούμε ότι εξαρτάται από τις συντεταγμένες r, θ . Απο κυλινδρικές συν/νες έχω:

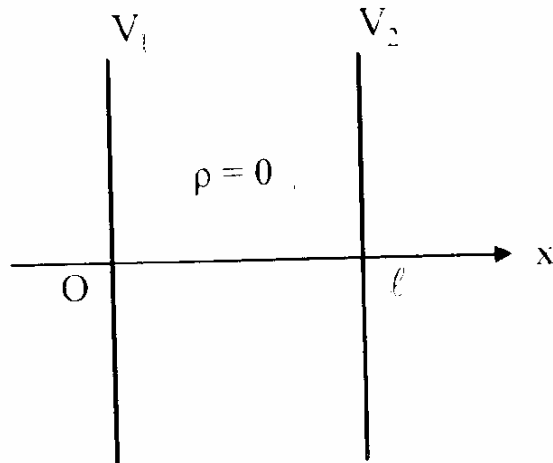
$$\vec{V} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι το Η.Π συνδέεται με το δυναμικό από την σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\nabla} V = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta) \Rightarrow^{(4)} \\ \Rightarrow \vec{E}(r, \theta) &= -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p \cos \theta}{r^2} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \\ &= -\hat{r} (p \cos \theta) (-2) \frac{1}{r^3} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{p}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{E}(r, \theta) &= \hat{r} \frac{2p \cos \theta}{r^3} + \hat{\theta} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

Άσκηση 14

Δυο παράλληλες άπειρες μεταλλικές πλάκες, που απέχουν απόσταση l μεταξύ τους είναι κάθετες στον άξονα x και διατηρούνται σε δυναμικό V_1 και V_2 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το δυναμικό $V(x)$ στο χώρο μεταξύ των πλακών καθώς και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, αν στο χώρο μεταξύ των πλακών δεν υπάρχει ηλεκτρικά φορτία.



Λύση

Από εξίσωση έχω:

$$\nabla^2 * V = 0 \quad (1)$$

Επειδή το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο η (1) μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} * \left(\frac{\partial}{\partial x} V \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int d\left(\frac{dV}{dx}\right) &= \int 0 dx = \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} &= C_1 \Rightarrow V(x) = C_1 X + C_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Για $x=0$ το

$$V(0) = V_1 \Rightarrow C_2 = V_1 \quad (3)$$

Για $x=l$ το

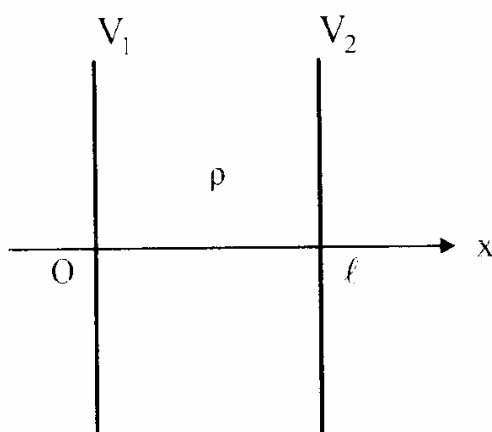
$$V(l) = C_1 l + V_1 = V_2 \Rightarrow C_1 = \frac{V_2 - V_1}{l} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχω

$$V(x) = \left(\frac{V_2 - V_1}{l} \right) x + V_1 \quad \text{για } 0 \leq x \leq l$$

Άσκηση 15

Δυο παράλληλες άπειρες πλάκες, που απέχουν απόσταση l μεταξύ τους είναι κάθετες στον άξονα x και διατηρούνται σε δυναμικό V_1 και V_2 αντίστοιχα. Στο χώρο μεταξύ των πλακών υπάρχει σταθερή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ . Να υπολογιστεί το δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των πλακών.



Λύση

Από εξίσωση Poisson έχω:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο (άξονα- x) επομένως η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int d \left(\frac{dV}{dx} \right) &= \int -\frac{\rho}{\epsilon_0} dx \Rightarrow \left(\frac{dV}{dx} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} x + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow V(x) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow V(0)=V_1 \Rightarrow^{(2)} C_2=V_1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(l) &= -\frac{p}{\varepsilon_0} \frac{e^2}{2} + C_1 l + V_1 = V_2 \Rightarrow \\ \text{Για } x=l \Rightarrow & +\frac{pl^2}{2\varepsilon_0} - V_1 + V_2 = C_1 l \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_1 &= \frac{pl}{2\varepsilon_0} + \frac{V_2 - V_1}{l} \end{aligned} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχω στην (2) :

$$V(x) = -\frac{px^2}{2\varepsilon_0} + \left[\frac{p}{2\varepsilon_0} + \frac{V_2 - V_1}{l} \right] x + V_1 \quad (5)$$

Επομένως το Η/Π που δημιουργείται στην περιοχή ανάμεσα στους 2 αγωγούς ($0 < x < l$) είναι:

$$\vec{E} = -\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} V(x) = \left\{ \frac{2px}{\varepsilon_0} + \left[\frac{pl}{2\varepsilon_0} + \frac{V_2 - V_1}{l} \right] \right\} \hat{x}$$