

Νόμος του Faraday

Άσκηση 1

Επίπεδος συρμάτινος βρόχος επιφάνειας A είναι τοποθετημένος σε μια περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου. Το μέτρο B μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση $B = B_0 e^{-at}$. Δηλαδή, την στιγμή $t = 0$, το πεδίο είναι B_0 και για $t > 0$ το πεδίο μειώνεται εκθετικά ως προς τον χρόνο. Υπολογίστε την επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Από τον νόμο του Faraday γνωρίζουμε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ σε ένα κύκλωμα είναι κατευθείαν ανάλογη ως προς τον χρόνο μεταβολής της μαγνητικής ροής η οποία διαπερνά το κύκλωμα.

Ο νόμος του Faraday εκφράζεται από την σχέση:

$$\text{Η.Ε.}\Delta = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot A) = -\frac{d}{dt}(BA) \quad (1)$$

Στη σχέση (1) το A είναι σταθερό ως προς τον χρόνο και το B μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$B = B_0 e^{-at} \quad (2).$$

Αντικαθιστώ την (2) στην (1) και έχω:

$$\text{Η.Ε.}\Delta = -\frac{d}{dt}(B_0 e^{-at} A) = -B_0 A \frac{d}{dt}(e^{-at}) \Leftrightarrow \text{Η.Ε.}\Delta = aB_0 A e^{-at} \quad (3)$$

Από την (3) παρατηρούμε ότι η $\text{Η.Ε.}\Delta$ μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο με την μέγιστη τιμή της την χρονική στιγμή $t = 0 \Rightarrow (\text{Η.Ε.}\Delta) = aB_0 A$

Άσκηση 2

Το επίπεδο ενός ορθογωνίου πηνίου διαστάσεων 5 cm επί 8 cm είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο B . Αν το πηνίο έχει 75 σπείρες και ολική αντίσταση 8 Ω , με ποιο ρυθμό πρέπει να μεταβάλλεται το μέτρο του B , ώστε να δημιουργήσει επαγόμενο ρεύμα ίσο με 0.1 A στις σπείρες του πηνίου;

Λύση

Από τον νόμο του Faraday έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{H.E.}\Delta &= -N \frac{dqm}{dt} = -N \frac{d}{dt} BA = -NA \frac{dB}{dt} \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} = -\frac{\text{H.E.}\Delta}{NA} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} &= -\frac{I_{\varepsilon\pi} R}{NA} = -\frac{(0.1\text{A})(8\Omega)}{(75)(40)(10^{-4})} \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} = -\frac{0.8}{3 \cdot 10^{-1}} \frac{T}{\text{sec}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} &= -0.27 \cdot 10 T / \text{sec} \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} = -2.7 T / \text{sec} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ένα κυκλικό πηνίο ακτίνας 4 cm και 30 σπειρών έχει αντίσταση 1 Ω και τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του πηνίου. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με την έκφραση $B = 0.01t + 0.04t^2$ όπου t είναι σε sec και B είναι σε T. Υπολογίστε την εξ επαγωγής ΗΕΔ στο πηνίο κατά την χρονική στιγμή $t = 5$ s.

Λύση

Από τον νόμο του Faraday έχω:

$$\text{H.E.}\Delta = -N \frac{dqm}{dt} = -N \frac{d(BA)}{dt} \quad (1)$$

Στην (1) αντικαθιστώ $N = 30$

$$\text{Άρα: } A = \pi R^2 = (3.14) \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 = (3.14) \cdot (16 \cdot 10^{-4}) = 50.24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$B = 0.01t + 0.04t^2$$

Άρα

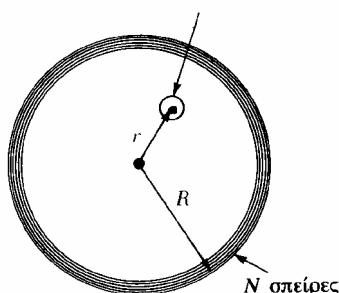
$$\text{H.E.}\Delta = -30 \cdot 50.24 \cdot 10^{-4} \frac{d}{dt} (0.01t + 0.04t^2) \Leftrightarrow \text{H.E.}\Delta(t) = -1507.2 \cdot 10^{-4} (0.01 + 0.08t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{H.E.}\Delta(t = 5\text{s}) = -1507.2 \cdot 10^{-4} - 602.88 \cdot 10^{-4} = -2110.08 \cdot 10^{-4} = -211 \text{ mV}$$

Το (-) εκφράζει τον νόμο του Lentz.

Άσκηση 4

Ένας κυκλικός βρόχος ακτίνας R αποτελείται από N πυκνά τυλιγμένες σπείρες σύρματος και διαπερνάτε από ένα εξωτερικό μαγνητικό το οποίο διευθύνεται κάθετα προς το επίπεδο του βρόχου. Το μέτρο του πεδίου στο επίπεδο του βρόχου είναι $B = B_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) \cos \omega t$ όπου R είναι η ακτίνα του βρόχου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Προσδιορίστε την εξ επαγωγής ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο βρόχο.



Λύση

Από τον Νόμο του Faraday έχουμε:

$$\text{Η.Ε.}\Delta = -N \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1)$$

$$\Phi_m = \int B dA = \int B \left(1 - \frac{r}{2R}\right) \cos \omega_0 t 2\pi r dr = \int_0^R (B_0 2\pi r) \cos \omega_0 t dr - \int_0^R \left(B_0 \frac{\pi r^2}{R}\right) \cos \omega_0 t dr =$$

$$= 2\pi B_0 \frac{R^2}{2} \cos \omega_0 t - \pi B_0 \frac{R^3}{3R} \cos \omega_0 t \Leftrightarrow \Phi_m(t) = (B_0 \pi R^2 - \pi B_0 \frac{R^3}{3}) \cos \omega_0 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi_m(t) = B_0 \pi R^2 \left(1 - \frac{R}{3}\right) \cos \omega_0 t \quad (2)$$

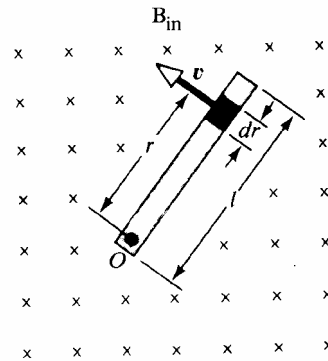
Αντικαθιστώ την (2) στην (1) και έχω:

$$\text{Η.Ε.}\Delta = -N \frac{d}{dt} \left[\pi B_0 R^2 \left(1 - \frac{R}{3}\right) \cos \omega_0 t \right] \Leftrightarrow \text{Η.Ε.}\Delta = -N \pi B_0 R^2 \left(1 - \frac{R}{3}\right) \frac{d}{dt} (\cos \omega_0 t) \Leftrightarrow$$

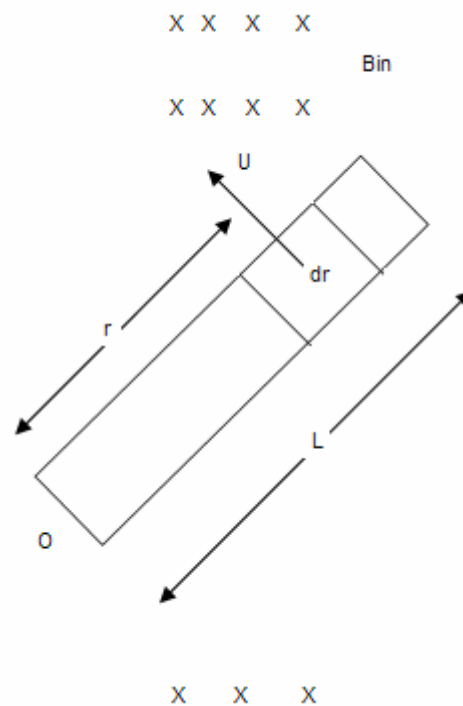
$$\Leftrightarrow \text{Η.Ε.}\Delta = +N \pi B_0 R^2 \left(1 - \frac{R}{3}\right) \omega \sin \omega t$$

Άσκηση 5

Αγώγιμη ράβδος, μήκους l περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα άξονα που διαπερνά το ένα άκρο της. Κάθετα στο επίπεδο της περιστροφής υπάρχει μαγνητικό πεδίο B , όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε την ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου.



Λύση



Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η επαγόμενη Η.Ε.Δ στα άκρα του στοιχειώδους τμήματος dr είναι ίση με :

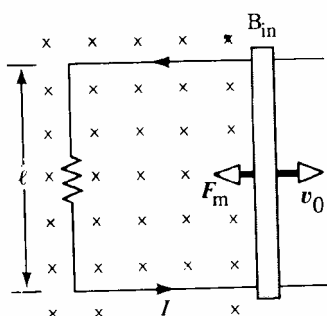
$$\text{Η.Ε.Δ} = Bvdr \quad (1)$$

Επομένως η ολική Η.Ε.Δ στα άκρα της ράβδου είναι :

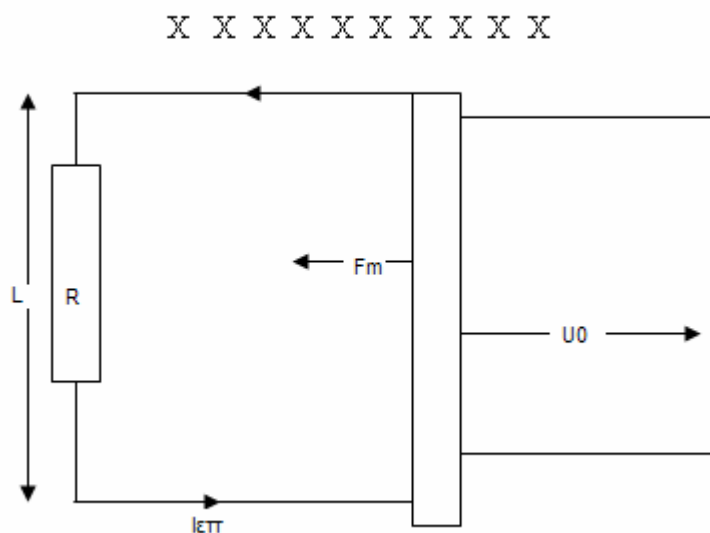
$$H.E.\Delta_{o\lambda} = B \int_0^l \omega r dr \Leftrightarrow H.E.\Delta_{o\lambda} = B\omega \frac{l^2}{2}$$

Άσκηση 6

Ράβδος μήκους l και μάζας m ολισθαίνει πάνω σε δυο παράλληλες ράγες με παρουσία μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετο προς το επίπεδο τους και κατευθύνεται προς τα κάτω. Σύρουμε τη ράβδο προς τα δεξιά με αρχική ταχύτητα v_0 και αμέσως την αφήνουμε. Βρείτε την ταχύτητα της ράβδου συναρτήσει του χρόνου.



Λύση



Η ράβδος κινείται μέσα σε Μ.Π

Η μαγνητική ροή που διαπερνά το κύκλωμα μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Άρα επάγεται ρεύμα $I_{\varepsilon\pi}$.

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{H.E.\Delta}{R} = \frac{Bvl}{R} \quad (1)$$

Έχουμε λοιπόν ρευματοφόρο αγωγό να κινείται μέσα σε Μ.Π άρα θα ασκείται πάνω του μαγνητική δύναμη η φορά της οποίας δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και το μέτρο της από την σχέση:

$$F_m = i_{\varepsilon\pi} l B \quad (2)$$

Από τον 2^ο κανόνα του Νεύτωνα έχω:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -F_m \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = -I_{\varepsilon\pi} l B = -\frac{Bvl}{R} l B \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt \Leftrightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2 l^2}{mR} t \Leftrightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \quad (3) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχω:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bvl}{R} e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$$

Άσκηση 7

Ένα ελικόπτερο έχει πτερύγια της κύριας έλικας μήκους 3m, που περιστρέφονται με συχνότητα 2 στροφές / s γύρω από τον κεντρικό άξονα. Αν η κατακόρυφη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου της Γης είναι $0.5 \times 10^{-4} T$, ποια είναι η εξ επαγωγής ΗΕΔ που αναπτύσσεται μεταξύ του άκρου της πτέρυγας και του άξονα περιστροφής;

Λύση

Η περιστρεφόμενη έλικα του ελικοπτερου αποτελεί ένα κινούμενο αγωγό μέσα σε Μ.Π.

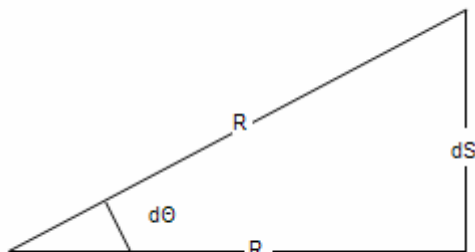
Αυτό που μεταβάλλεται με τον χρόνο είναι η επιφάνεια που διαπερνά το Μ.Π.

Επομένως και η μαγνητική ροή που διαπερνά την επιφάνεια του συστήματος μας θα μεταβάλλεται και άρα στα άκρα της πτέρυγας θα επάγεται Η.Ε.Δ ίση με:

$$\text{Η.Ε.Δ} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} BA = -B \frac{dA(t)}{dt} \quad (1)$$

Το απειροστό χρονικό διάστημα dt η πτέρυγα θα έχει διασχύσει εμβαδόν ίσο με :

$$dA = \frac{1}{2} R dS = \frac{1}{2} R^2 d\Theta$$



$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt = 2\pi\nu dt$$

Επομένως :

$$A(t) = \frac{1}{2} R^2 \int_0^t 2\pi\nu dt = R^2 \pi\nu t \quad (2)$$

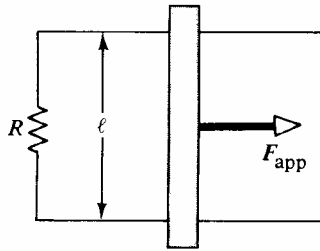
Αντικαθιστώ την (2) στην (1) άρα:

$$\text{Η.Ε.}\Delta = -BR^2\pi\nu = 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 3.14 \cdot 2 \Leftrightarrow \text{Η.Ε.}\Delta = 28.26 \cdot 10^{-4} \text{V} = 2.82 \text{mV}$$

$$\Rightarrow |\text{Η.Ε.}\Delta| = 28.26 \cdot 10^{-4} \text{V} = 2.82 \text{mV}$$

Άσκηση 8

Θεωρήστε ότι έχουμε τη διάταξη που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέστε ότι $R = 6 \, \Omega$, $l = 1.2 \, \text{m}$ και ότι ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $2.5 \, \text{T}$ κατευθύνεται προς τα κάτω της σελίδας του βιβλίου. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται η ράβδος ώστε να παράγει επαγόμενο ρεύμα ίσο με $0.5 \, \text{A}$ στην αντίσταση R ;

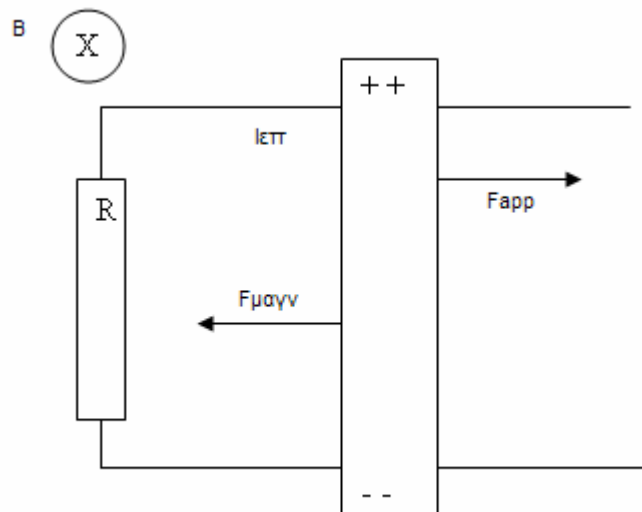


Λύση

Η επαγόμενη Η.Ε.Δ δίνεται από την σχέση:

$$\text{Η.Ε.Δ} = E \cdot l = Bvl$$

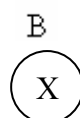
$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\text{Η.Ε.Δ}}{R} \Leftrightarrow RI_{\varepsilon\pi} = Bvl \Leftrightarrow v = \frac{RI_{\varepsilon\pi}}{Bl} = \frac{6 \cdot 0.5}{2.5 \cdot 1.2} \Leftrightarrow v = \frac{3}{3} = 1 \text{ m/sec}$$

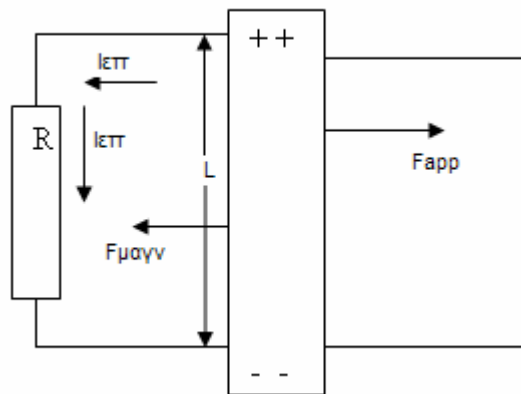


Άσκηση 9

Στην διάταξη του παρακάτω σχήματος μια αγώγιμη ράβδος κινείται προς τα δεξιά γλιστρώντας χωρίς τριβή πάνω σε δυο παράλληλους αγωγούς οι οποίοι συνδέονται στο ένα άκρο τους με αντίσταση ίση με $6 \, \Omega$. Ένα μαγνητικό πεδίο $2.5 \, \text{T}$ κατευθύνεται προς τα κάτω της σελίδας του βιβλίου. Έστω $l = 1.2 \, \text{m}$ και ότι η μάζα της ράβδου είναι αμελητέα. (α) Υπολογίστε την εφαρμοζόμενη δύναμη που απαιτείται για την κίνηση της ράβδου προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $2 \, \text{m/s}$. (β) Με ποιο ρυθμό καταναλώνεται ενέργεια στην αντίσταση;

Λύση





Η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $v = 2\text{ m/sec}$.

Αφού στην ράβδο ασκείται μια δύναμη F_{app} με κατεύθυνση προς τα δεξιά για να κινείται η ράβδος με σταθερή ταχύτητα η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω στην ράβδο είναι μηδέν $\Sigma \vec{F} = 0$ (1).

Βγαίνει λοιπόν το συμπέρασμα ότι το επαγόμενο ρεύμα $I_{\varepsilon\pi}$ στο παραπάνω κύκλωμα έχει φορά προς τα αριστερά ώστε η $F_{\mu\alpha\gamma\nu}$ να έχει φορά προς τα αριστερά επίσης και το μέτρο είναι ίσο με την F_{app} για να ισχύει η (1).

$$F_{\mu\alpha\gamma\nu} = BI_{\varepsilon\pi}l \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\varepsilon\pi 0} &= Bv \\ E_{\varepsilon\pi 0} &= \frac{V}{l} = \frac{I_{\varepsilon\pi} R}{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{I_{\varepsilon\pi} R}{l} = Bv \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{lBv}{R} \quad (2)$$

Αντικαθιστώ την (2) στην (1):

$$F_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad (3)$$

Από το σχήμα της άσκησης ,(1) και (3) έχω:

$$\frac{B^2 l^2 v}{R} = F_{appl} \Rightarrow F_{appl} = \frac{2.5^2 \cdot 1.2^2 \cdot 2}{6} = \frac{6.25 \cdot 1.44 \cdot 2}{6} \Leftrightarrow F_{appl} = 3Nt$$

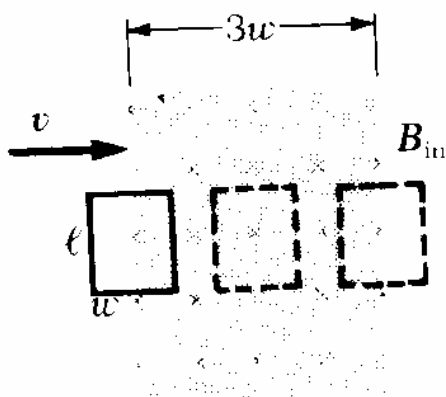
(b)

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = I_{\varepsilon\pi}^2 R = \frac{l^2 B^2 v^2}{R^2} \cdot R = \frac{l^2 B^2 v^2}{R} = \frac{(1.2)^2 \cdot (2.5)^2 \cdot 4}{6} \Leftrightarrow P = 6Watt$$

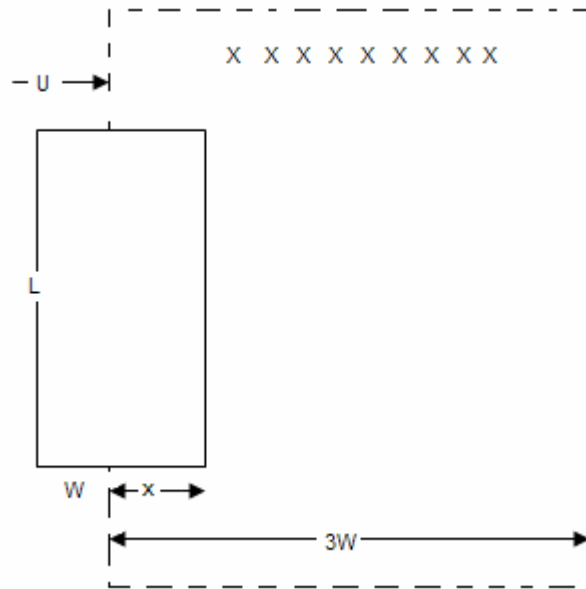
$$\Leftrightarrow P = 6Watt$$

Άσκηση 10

Ένας ορθογώνιος βρόχος διαστάσεων l επί w και ηλεκτρικής αντίστασης R κινείται με σταθερή ταχύτητα v προς τα δεξιά όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Εξακολουθεί και κινείται με την ίδια ταχύτητα μέσα σε μια περιοχή πλάτους $3w$ όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο B κάθετο από τον αναγνώστη προς την σελίδα του βιβλίου. Απεικονίστε σε γραφική παράσταση την μαγνητική ροή, την επαγόμενη ΗΕΔ και την εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στον βρόχο συναρτήσει της θέσης του βρόχου μέσα στο μαγνητικό πεδίο.



Λύση



(α)

Η μαγνητική ροή που διαπερνά τον βρόγχο δίνεται από την σχέση:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = Bx(t)l \quad (1)$$

Το x μεταβάλλεται από το $x(t=0) = 0$ ως $x(t = \frac{u}{w}) = w$

και έτσι από (1) η ροή θα πάρει τιμές μεταξύ $\Phi = 0$ και $\Phi = Bwl$ (2)

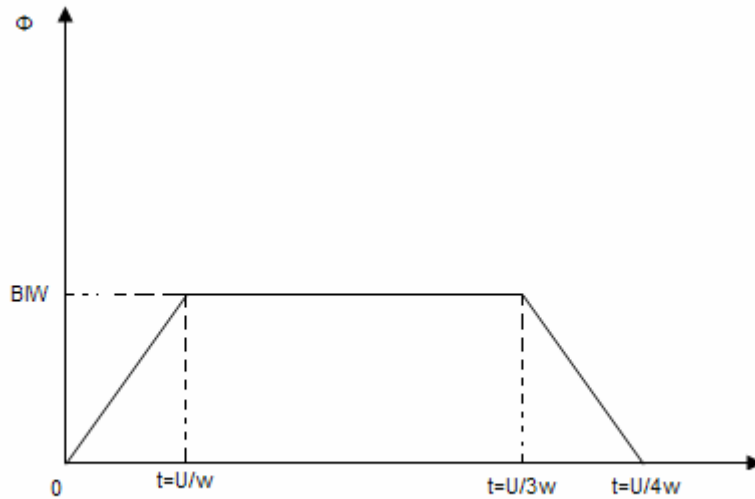
από τη χρονική στιγμή $t = \frac{u}{W}$ έως την $t = \frac{u}{3W}$ η ροή που διαπερνά τον ορθογώνιο

βρόγχο είναι σταθερή και ίση με $\Phi = BlW$

από την χρονική στιγμή $t = \frac{u}{3W}$ και $t = \frac{u}{4W}$ η μαγνητική ροή μεταβάλλεται από

$\Phi = BlW$ έως $\Phi = 0 \text{ Tm}^2$

Άρα:



(β)

Από τον νόμο του Faraday γνωρίζω ότι η επαγόμενη Η.Ε.Δ δίνεται από την σχέση:

$$\text{Η.Ε.Δ} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3)$$

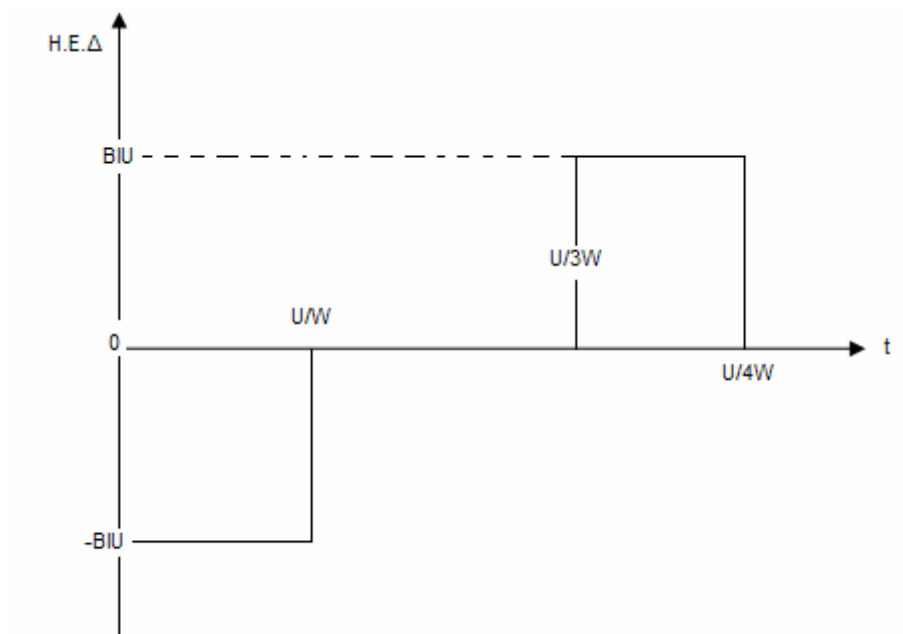
Από $t = \frac{u}{W}$ έως $t = \frac{u}{3W}$ η Η.Ε.Δ είναι μηδέν μια και δεν έχω μεταβολή της μαγνητικής ροής (παραμένει σταθερή και ίση με BlW) (6)

Από $t=0$ έως $t = \frac{u}{W}$ έχω:

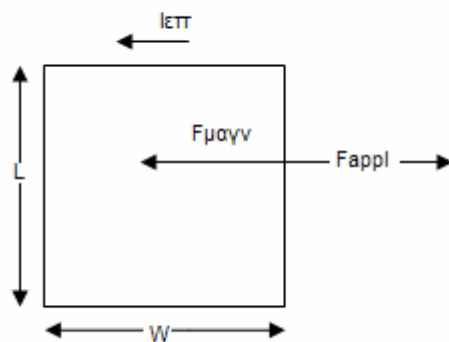
$$\text{Η.Ε.Δ} = -\frac{d}{dt}Blx = -Blv \quad (4)$$

Από την χρονική στιγμή $t = \frac{u}{3W}$ έως $t = \frac{u}{4W}$ έχουμε: $\text{Η.Ε.Δ} = -Bl\left(-\frac{dx}{dt}\right) = Blv$ (5)

Από (6),(4),(5) έχω:



(γ)



Η $\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$ δίνεται από την γενικότερη σχέση:

$$\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad (7)$$

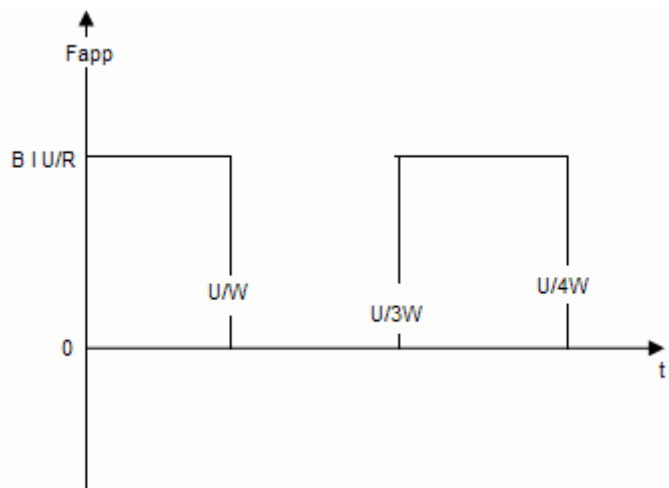
Επομένως από την (7) παρατηρώ ότι η $\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$ ασκείται πάνω στην πλευρά μήκους l και έχει φορά προς τα αριστερά έτσι ώστε να εξισορροπεί την F_{appl} και το ορθογώνιο να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Η (7) γράφεται:

$$F_{\mu\alpha\gamma\nu} = I_{\varepsilon\pi} l B = \frac{(H.E.\Delta)}{R} l B \quad (8)$$

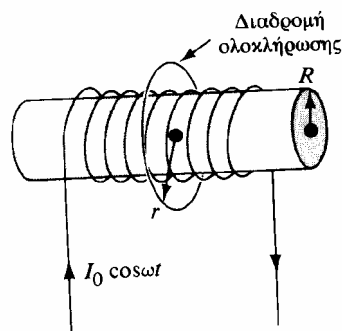
Από (8) και γ.π στο (β) έχω για εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{app} = -\vec{F}_{μαγν}$

$$\text{ή } |F_{app}| = |F_{μαγν}|$$

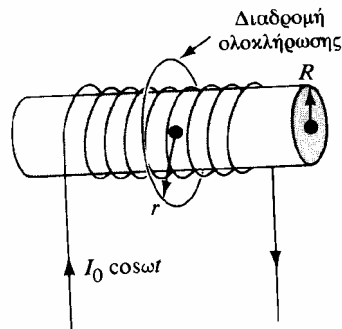


Άσκηση 11

Ένα σωληνοειδές μεγάλου μήκους και ακτίνας R αποτελείται από n σπείρες ανά μονάδα μήκους και διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται συνάρτησε του χρόνου αρμονικά ως $I = I_0 \cos \omega t$ όπου I_0 είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος και ω είναι η κυκλική συχνότητα της πηγής τροφοδοσίας. α) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έξω από το σωληνοειδές, σε απόσταση r από τον άξονα του και β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σωληνοειδές σε απόσταση r από τον άξονα.



Λύση



Το ρεύμα μεταβάλλεται χρονικά. Γνωρίζω από την θεωρία ότι γύρω από ρευματοφόρο αγωγό δημιουργείται μ.π επομένως εάν το ρεύμα είναι συνάρτηση του χρόνου και το δημιουργούμενι μ.π είναι επίσης συνάρτηση του χρόνου.

Από τις σπείρες του πηνίου παίρνάει λοιπόν μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή άρα στα άκρα του πηνίου επάγεται Η.Ε.Δ σύμφωνα με:

$$\text{Η.Ε.Δ} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) \quad (1)$$

$$A = \pi R^2 \quad (2)$$

$$\text{Η.Ε.Δ} = \oint E ds = E 2\pi r \quad (3)$$

$$B = \mu_0 n I \quad (4)$$

Από (4),(2),(3) στην (1) έχω:

$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{d}{dt}(I_0 \cos \omega t) \Leftrightarrow E = \frac{r^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t}{2r}$$

(β)

Για $r < R$ έχω από τον νόμο του Faraday:

$$\text{Η.Ε.Δ} = \oint E ds = E 2\pi r$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \text{H.E.}\Delta &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) \\ \oint Bds &= \mu_0 IN \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 IN \Rightarrow \\ &\Rightarrow B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} \end{aligned} \right\} \\
& \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d}{dt} \mu_0 nI(t)\pi r^2 = -\mu_0 n\pi r^2 \frac{dI(t)}{dt} \Rightarrow \\
& \Rightarrow E = -\frac{\mu_0 nr}{2} \frac{d}{dt} (I_0 \cos \omega t) = -\frac{I_0 \mu_0 nr}{2} \frac{d}{dt} \cos \omega t \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow E = \frac{I_0 n \omega r}{2} \sin \omega t
\end{aligned}$$

Άσκηση 12

Ένα πλαίσιο εμβαδού 0.1 m^2 περιστρέφεται με 60 rev/s και με τον άξονα περιστροφής κάθετο στο μαγνητικό πεδίο ίσο με 0.2 T . α) Αν το πλαίσιο αποτελείται από 1000 σπείρες, ποια είναι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο; β) Όταν η επαγόμενη τάση στο πλαίσιο είναι η μέγιστη, ποιος είναι ο προσανατολισμός του πλαισίου ως προς το μαγνητικό πεδίο;

Λύση

Εφόσον το πλαίσιο περιστρέφεται σημαίνει ότι με τον χρόνο μεταβάλλεται η επιφάνεια A που διαρρέεται από το Μ.Π.

Επομένως επάγεται Η.Ε.Δ στα άκρα του πλαισίου.

$$H.E.\Delta = -N \frac{d\phi_B}{dt} = -NB \frac{d}{dt} A \cos \theta \quad (1)$$

Η μέγιστη Η.Ε.Δ επάγεται στα άκρα του πλαισίου όταν η παράμετρος $\cos \theta$ πάρει την μέγιστη τιμή της.

Δηλαδή: $\cos 0^\circ = 1$ ($\vec{B} // \vec{A}$)

Επομένως :

$$H.E.\Delta = -NBA = -(1000) \cdot 0.2 \cdot 0.1 \Leftrightarrow H.E.\Delta = -20\text{Volt}$$

Η μέγιστη ΗΕΔ αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου όταν το Μ.Π $\vec{B}$ γίνει παράλληλο προς τον κάθετο $\vec{A}$ στο πλαίσιο.

Άσκηση 13

Επίπεδος κυκλικός αγωγός ακτίνας R είναι τοποθετημένος κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου $B = B_0 \cos \omega t$, όπου B_0 και ω είναι σταθερές. Να υπολογιστούν:

- Η επαγωγική τάση E που αναπτύσσεται στον αγωγό
- Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος $I_{επ}$ που διαρρέει τον αγωγό, αν αυτός εμφανίζει αντίσταση ανά μονάδα μήκους r .

Λύση

(α)

Από τον νόμο του Faraday γνωρίζω ότι:

$$H.E.\Delta = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}BA = -\frac{d}{dt}B(t)A = -A\frac{dB(t)}{dt} = -A\frac{d}{dt}(B_0 \cos \omega t) = -AB_0\frac{d}{dt}\cos \omega t \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Leftrightarrow H.E.\Delta &= AB_0\omega \sin \omega t \\ A &= \pi \cdot R^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow H.E.\Delta = \pi \cdot R^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

(β)

Από τον νόμο του Ohm έχω:

$$H.E.\Delta = I_{επ} R_{αντιστ} \Rightarrow I_{επ} = \frac{H.E.\Delta}{R_{αντιστ}} = \frac{\pi R^2 B_0 \omega \sin \omega t / 2\pi R}{\frac{R_{αντιστ}}{2\pi R}} = \frac{RB_0 \omega \sin \omega t}{2r}$$

Άσκηση 14

Το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ ενός μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_o \cos(\omega t + \phi)$$

όπου Φ_o , ϕ , ω σταθερές, t ο χρόνος και c κυκλικός βρόχος ακτίνας r .

Να υπολογιστούν η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο βρόχο και το επαγόμενο ηλεκτρικό κατά μήκος του βρόχου.

Λύση

α) Το διανυσματικό δυναμικό δίνεται από την σχέση:

$$\vec{B} = \vec{V} \times \vec{A} \quad (1)$$

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int (\vec{V} \times \vec{A}) dA = \Phi_o \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow^{(1)} \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi_o \cos(\omega t + \phi) = \Phi_B$$

Από τον νόμο του Faraday έχω:

$$H.E.\Delta = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \phi_o \cos(\omega t + \Phi) \Rightarrow H.E.\Delta = \phi_o \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\beta) \quad H.E.\Delta = \oint_c \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow \Phi_o \omega \sin(\omega t + \Phi) = E 2\pi r \Rightarrow E = \frac{\Phi_o \omega}{2\pi r} \sin(\omega t + \Phi)$$

Άσκηση 15

Μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από 8 σπείρες επιφάνειας $A = 0.09 \text{ m}^2$ η καθεμία και ολικής αντίστασης 12Ω . Το πηνίο περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα 60 Hz μέσα σε μαγνητικό πεδίο $B = 0.5 \text{ T}$. α) Υπολογίστε την μέγιστη επαγόμενη ΗΕΔ και β) υπολογίστε το μέγιστο επαγόμενο ρεύμα.

Λύση

(α)

Η Η.Ε.Δ (ac-μορφής) εμφανίζεται στα άκρα του περιστρεφόμενου πλαισίου λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το πλαίσιο.

Από τον νόμο του Faraday έχω:

$$\text{H.E.}\Delta = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -N \frac{d}{dt} BA \cos \theta \Rightarrow \text{H.E.}\Delta = -N \frac{d}{dt} BA \cos \omega t \Leftrightarrow \text{H.E.}\Delta = -NBA \frac{d}{dt} \cos \omega t$$

$$\Leftrightarrow \text{H.E.}\Delta = +NBA \omega \sin \omega t \Leftrightarrow \text{H.E.}\Delta = (8) \cdot (0.5) \cdot (0.09) \cdot (2\pi 60) \sin \omega t \Leftrightarrow \text{H.E.}\Delta = 135.64 \sin \omega t \quad (1)$$

Η (1) γίνεται μέγιστη όταν $\omega t = 90^\circ$ ή $\omega t = 270^\circ$ όπου $\sin \omega t = 1$ άρα:

$$(\text{H.E.}\Delta)_{\max} = 135.64 \text{ Volt}$$

(β)

$$(I_{\varepsilon\pi})_{\max} = \frac{(\text{H.E.}\Delta)_{\max}}{R} = \frac{135.64}{12} = 11.3 \text{ A}$$

Άσκηση 16

Ένα πρωτόνιο κινείται μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

$E = 50 \hat{j} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ και ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = (0.2\hat{i} + 0.3\hat{j} + 0.4\hat{k}) \text{ T}$. Προσδιορίστε

την επιτάχυνση του πρωτονίου όταν η ταχύτητα του είναι ίση με $v = 200 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

Λύση

Η ολική δύναμη που ασκείται στο πρωτόνιο είναι:

$$\vec{F}_{\text{ολ}} = q_p \vec{E} + q \vec{v}_x \vec{B} \Leftrightarrow m_p \vec{\gamma} = q_p \vec{E} + q \vec{v}_x \vec{B} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \left(\frac{q_p}{m_p}\right) \vec{E} + \left(\frac{q_p}{m_p}\right) \vec{v}_x \vec{B} \quad (1)$$

$$\frac{q_p}{m_p} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 10^{+8} \text{ Cb / Kgr} \quad (2)$$

$$\vec{E} = 50 \hat{j} \text{ V/m} \quad (3)$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 200 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = -(200 \cdot 0.4) \hat{j} + (0.3 \cdot 200) \hat{k} = -80 \hat{j} + 60 \hat{k} \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε (4),(3),(2) στην (1):

$$\vec{\gamma} = (10^{+8}) 50 \hat{j} - (10^{+8}) \hat{j} + 60 (10^{+8}) \hat{k} = (10^{+8}) \cdot [60 \hat{k} - 30 \hat{j}] = 30 \cdot 10^{+8} [2 \hat{k} - \hat{j}] \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 3 \cdot 10^{+9} [2 \hat{k} - \hat{j}]$$