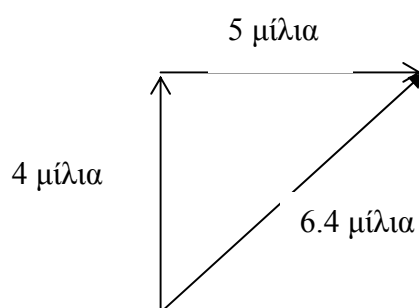


1 Διανυσματική Ανάλυση

1.1 Διανυσματική Άλγεβρα

1.1.1 Πράξεις με διανύσματα

Αν περπατήσετε 4 μίλια προς τον Βορρά και μετά 5 μίλια προς την Ανατολή η συνολική απόσταση που έχετε διανύσει είναι 9 μίλια αλλά δεν θα βρεθείτε 9 μίλια μακριά από το σημείο που ξεκινήσατε. Θα βρεθείτε 6.4 μίλια μακριά από το αρχικό σημείο (δες σχήμα).

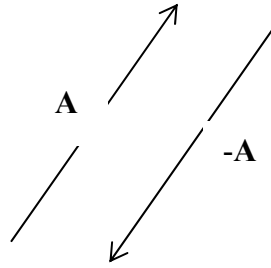


Σχήμα 1.1: Διανυσματική Άθροιση

Χρειαζόμαστε λοιπόν μια άλγεβρα που να περιγράφει τέτοια μεγέθη που δεν προστίθενται με τον γνωστό τρόπο. Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται **διανυσματικά μεγέθη** και δεν χαρακτηρίζονται μονάχα από το μέτρο τους αλλά και από την φορά και την κατεύθυνση τους. Τέτοια μεγέθη είναι η μετατόπιση (παραπάνω σχήμα), η ταχύτητα, η ορμή, η δύναμη, η επιτάχυνση

Οι ποσότητες που χαρακτηρίζονται μονάχα από το μέτρο τους όπως η μάζα, το φορτίο, η πυκνότητα, η θερμοκρασία, ονομάζονται **βαθμωτά μεγέθη**.

Το μέγεθος του διανύσματος **A** γράφεται ως $|A|$. Στα διαγράμματα τα διανύσματα συμβολίζονται με βέλη: το μήκος τους αντιστοιχεί στο μέτρο τους, η μύτη του βέλους αντιστοιχεί στην κατεύθυνση τους. Παράδειγμα το $-A$ αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα με το ίδιο μέτρο με το **A** αλλά με αντίθετη κατεύθυνση (δες σχήμα 1.2).



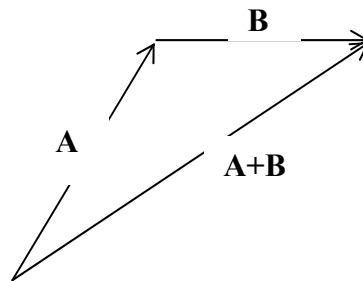
Σχήμα 1.2

Στην συνέχεια θα ορίσουμε τέσσερις πράξεις με διανύσματα: την πρόσθεση, και τα τρία είδη του πολλαπλασιασμού.

(i) *Πρόσθεση Διανυσμάτων*

Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην πρόσθεση διανυσμάτων είναι η ακόλουθη: Τοποθετούμε την ουρά του **B** στην μύτη του **A**. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική πράξη. Δηλαδή ισχύει

$$A + B = B + A \quad (1.1)$$



Σχήμα 1.3: Πρόσθεση Διανυσμάτων

Η πρόσθεση των διανυσμάτων είναι προσεταιριστική πράξη. Αυτό σημαίνει ότι

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (1.2)$$

Για να αφαιρέσετε ένα διάνυσμα απλώς προσθέστε το αντίθετο του. Αυτό σημαίνει

$$A - B = A + (-B) \quad (1.3)$$

(ii) Πολλαπλασιασμός με ένα βαθμωτό

Ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό μέγεθος a , πολλαπλασιάζει το μέτρο του με a άλλα αφήνει την κατεύθυνση του ανέπαφη. Στην περίπτωση που το a είναι αρνητικός αριθμός τότε αλλάζει η φορά του. Ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος είναι επιμεριστικός δηλαδή

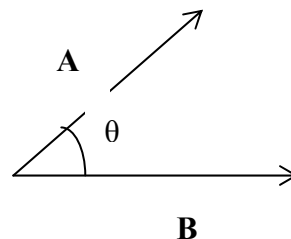
$$a(A+B) = aA + aB \quad (1.4)$$

(iii) Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1.5)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα δυο διανύσματα αν ενωθούν οι ουρές τους.



Σχήμα 1.4: Γωνία θ μεταξύ 2 διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων έχει σαν αποτέλεσμα ένα βαθμωτό μέγεθος. Για αυτό τον λόγο ονομάζεται και **βαθμωτό γινόμενο**. Το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A} \quad (1.6)$$

Είναι επίσης και επιμεριστικό, δηλαδή

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} \quad (1.7)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του εσωτερικού γινομένου είναι το γινόμενο του **A** επί το μήκος της προβολής του **B** στον άξονα του **A**. Αν τα 2 διανύσματα είναι παράλληλα τότε από (1.5) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} A \bullet B &= |A||B| \\ A \bullet A &= |A|^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Αν τα 2 διανύσματα **A** και **B** είναι κάθετα μεταξύ τους τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν (δες (1.5)).

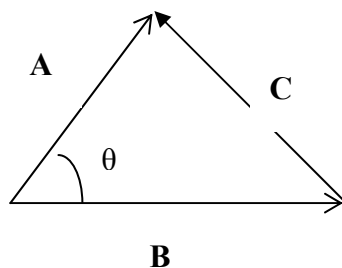
Παράδειγμα 1

Θέστε $C = A - B$ και υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο του C με τον εαυτό του

Λύση

$$C \bullet C = (A - B) \bullet (A - B) = A \bullet A - A \bullet B - B \bullet A + B \bullet B \Leftrightarrow C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει τον **νόμο των συνημίτονων**.



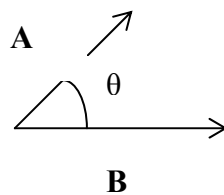
Σχήμα 1.5

(iv) *Εξωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων*

Το εξωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων ορίζεται ως εξής

$$A \times B = |A||B| \sin \hat{\theta} \hat{n} \quad (1.9)$$

όπου $\hat{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα **A** και **B**. Λόγω του ότι υπάρχουν 2 κατευθύνσεις που είναι κάθετες σε οποιαδήποτε επίπεδο η κατεύθυνση του $\hat{n}$ βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: Τοποθετήστε τα δάχτυλά σας κατά μήκος της κατεύθυνσης του πρώτου διανύσματος και κλείστε την παλάμη σας (μέσω της μικρότερης γωνίας) προς το μέρος του δευτέρου. Ο αντιχειράς σας δείχνει την κατεύθυνση του $\hat{n}$.



Σχήμα 1.6

Το $A \times B$ στο Σχήμα 1.6 είναι προς τα κάτω. Ενώ το $B \times A$ είναι προς τα πάνω.

Το $A \times B$ είναι και αυτό διάνυσμα όπως φαίνεται και από την (1.9). Το εξωτερικό γινόμενο ή αλλιώς διανυσματικό γινόμενο είναι επιμεριστικό δηλαδή

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \quad (1.10)$$

Το διανυσματικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό!!! Δηλαδή ισχύει

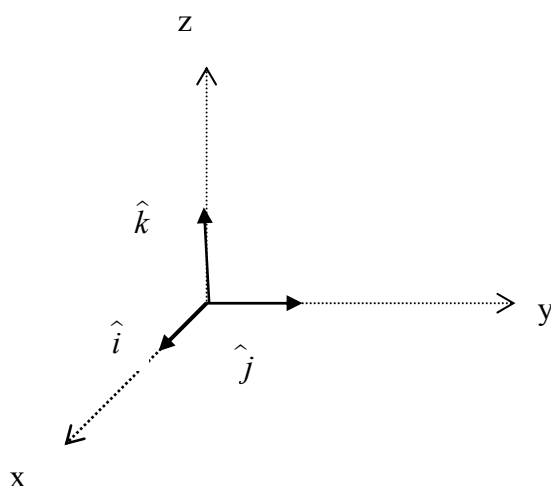
$$B \times A = -(A \times B) \quad (1.11)$$

Γεωμετρικά το $|A \times B|$ είναι το εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές τα **A** και **B**. Αν τα 2 διανύσματα είναι παράλληλα τότε είναι φανερό από την (1.9) ότι το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

1.1.2 Η διανυσματική άλγεβρα υπό μορφή Συνιστωσών

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίστηκαν οι τέσσερις βασικές διανυσματικές πράξεις. Δεν ορίστηκαν όμως ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

Στην πράξη είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x , y , z και να εργαζόμαστε με τις συνιστώσες των διανυσμάτων. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x , y , z συμβολίζονται με $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.



Σχήμα 1.7: Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει αυτών των μοναδιαίων καρτεσιανών διανυσμάτων σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.12)$$

Η διανυσματική ανάλυση της (1.12) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων εικονίζεται στο σχήμα 1.8. Οι αριθμοί A_x , A_y και A_z ονομάζονται συνιστώσες του $\mathbf{A}$. Γεωμετρικά οι συνιστώσες είναι οι προβολές του $\mathbf{A}$ στους άξονες x , y , z .

Οι τέσσερις διανυσματικές πράξεις με κανόνες πράξεων μεταξύ συνιστωσών μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Για να προσθέσετε διανύσματα, προσθέστε τις αντίστοιχες συνιστώσες.

(ii) Για να πολλαπλασιάσετε με ένα βαθμωτό, πολλαπλασιάστε με αυτό την κάθε συνιστώσα.

$$aA = a(A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) = (aA_x \hat{i} + aA_y \hat{j} + aA_z \hat{k}) \quad (1.14)$$

(iii) Για να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο, πολλαπλασιάσετε τις αντίστοιχες συνιστώσες και προσθέστε τα γινόμενα.

$$\begin{aligned} A \bullet B &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = \\ &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Βεβαίως η (1.15) προκύπτει λόγω του ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \hat{i} \bullet \hat{i} &= \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \bullet \hat{j} &= \hat{j} \bullet \hat{k} = \hat{k} \bullet \hat{i} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

(iv) Για να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο, πολλαπλασιάστε τις αντίστοιχες συνιστώσες και προσθέστε τα γινόμενα.

$$A \bullet A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.17)$$

Από (1.17) εξάγεται το ότι το μέτρο του **A** είναι ίσο με

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.18)$$

Παρατηρείστε ότι το εσωτερικό γινόμενο του **A** με οποιαδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα ισούται με την συνιστώσα του **A** κατά μήκος της κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος. Έτσι για παράδειγμα

$$\begin{aligned}
A \bullet \hat{i} &= A_x \\
A \bullet \hat{j} &= A_y \\
A \bullet \hat{k} &= A_z
\end{aligned} \tag{1.19}$$

(iv) **Ισχύουν τα παρακάτω**

$$\begin{aligned}
\hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\
\hat{i} \times \hat{j} &= -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\
\hat{j} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\
\hat{k} \times \hat{i} &= -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Εφαρμογή της (1.20) είναι το εξωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων **A** και **B** εκφρασμένο με τις συνιστώσες των διανυσμάτων

$$\begin{aligned}
A \times B &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = \\
&= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Η (1.21) είναι δύσκολο να την θυμάται κανείς για αυτό μπορεί να γραφεί πιο νοικοκυρεμένα με την μορφή ορίζουσας

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

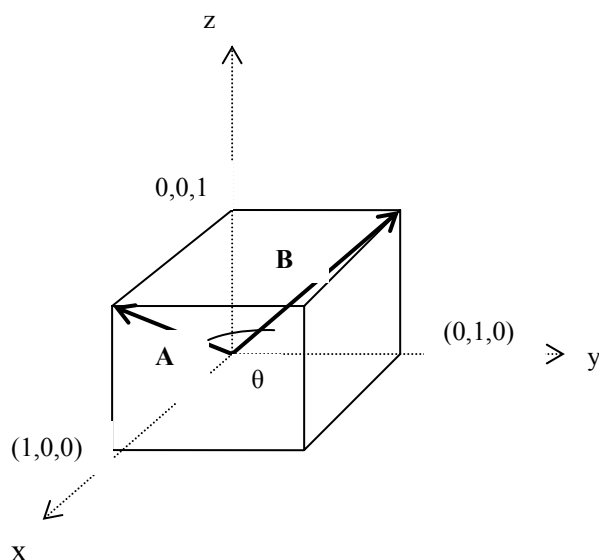
Για να βρείτε το εξωτερικό γινόμενο, υπολογίστε την ορίζουσα που η πρώτη της γραμμή είναι τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, η δεύτερη της γραμμή αποτελείται από τις συνιστώσες του **A, και η τρίτη της γραμμή από τις συνιστώσες του **B**.**

Παράδειγμα 2

Βρείτε την γωνία που σχηματίζουν 2 διαδοχικές διαγώνιοι των εδρών ενός κύβου.

Λύση

Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε ένα κύβο μοναδιαίας πλευράς. Μπορούμε να τοποθετήσουμε τον κύβο αυτό με την μια γωνία του στην αρχή των συντεταγμένων. Οι διαγώνιοι **A** και **B** εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.8

Αφού ζητείτε να υπολογιστεί γωνία μεταξύ 2 διανυσμάτων αυτό μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Είτε μέσω του εσωτερικού γινομένου είτε μέσω του εξωτερικού γινομένου. Είναι πιο βολικό να υπολογίσουμε την γωνία μέσω του εσωτερικού γινομένου.

Τα διανύσματα **A** & **B** μπορούν να γραφούν με βάση τις συνιστώσες τους ως εξής

$$\begin{aligned} A &= 1\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \\ B &= 0\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Έχοντας υπόψη μας τις σχέσεις (1.15), (1.23) το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως εξής με την μορφή των συνιστωσών

$$A \bullet B = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \quad (1.24)$$

Εξάλλου το εσωτερικό γινόμενο βάσει της σχέσεως (1.5) γράφεται ως εξής

$$A \bullet B = |A||B| \cos \theta = \sqrt{2}\sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta \quad (1.25)$$

Συνδυάζοντας τις (1.24), (1.25) παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

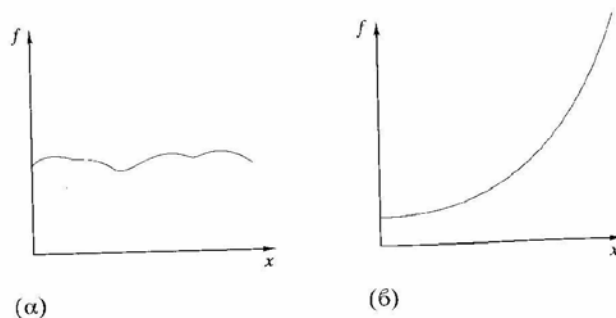
1.2 Διαφορικός Λογισμός

1.2.1 «Συνήθεις» Παράγωγοι

Τι μας δείχνει η παράγωγος $\frac{df}{dx}$ μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής $f(x)$; Η απάντηση είναι ότι μας λέει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ όταν αλλάζουμε την μεταβλητή x κατά dx :

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx \quad (1.26)$$

Η (1.26) μας πληροφορεί ότι εάν αλλάξουμε την μεταβλητή x κατά dx τότε η τιμή της $f(x)$ αλλάζει κατά df , με την παράγωγο να είναι ο παράγοντας αναλογίας. Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται συναρτήσεις που μεταβάλλονται η μεν πρώτη αργά η δε δεύτερη συνάρτηση γρήγορα. Η γεωμετρική ερμηνεία της παράγωγου $\frac{df}{dx}$ είναι ότι εκφράζει την κλίση της καμπύλης $f(x)$.



Σχήμα 1.9 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος Ι)

1.2.2 Η Κλίση

Έστω μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $T(x, y, z)$ π.χ. η θερμοκρασία σε ένα δωμάτιο. Τοποθετώντας την αρχή των αξόνων στην γωνία του δωματίου, η θερμοκρασία κάθε σημείου του δωματίου δίνεται από τις συντεταγμένες (x, y, z) .

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής μας ενημερώνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση αν μετακινηθούμε κατά μια μικρή απόσταση. Στη περίπτωση μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο μια και το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουμε.

Το πρόβλημα γίνεται πιο εύκολο αν χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα για τις μερικές παραγώγους

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \quad (1.27)$$

Η σχέση (1.27) μας ενημερώνει πώς μεταβάλλεται η $T(x, y, z)$ αν αλλάξουμε τις τρεις μεταβλητές κατά απειροστά ποσά dx , dy , και dz .

Κοιτάζοντας την (1.27), και την (1.15) βλέπουμε ότι η (1.27) θυμίζει εσωτερικό γινόμενο. Έτσι η (1.27) μπορεί να γραφεί ως

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = (\nabla T) \cdot (dl) \quad (1.28)$$

οπού $dl = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ το οποίο είναι γνωστό ως το **απειροστό διάνυσμα μετατόπισης**. Το ∇T ονομάζεται κλίση της T . Είναι μια διανυσματική ποσότητα με τρεις συνιστώσες και αποτελεί τη γενίκευση της παραγώγου που αναζητούμε. Η ∇T είναι η τρισδιάστατη εκδοχή της (1.26).

Εφόσον η ποσότητα $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \right)$ είναι διάνυσμα σημαίνει ότι

έχει κατεύθυνση και μέτρο. Γράφοντας το εσωτερικό γινόμενο (1.28) με την γενικότερη του μορφή παίρνουμε

$$dT = \nabla T \cdot dl = |\nabla T| |dl| \cos \theta \quad (1.29)$$

οπού θ είναι η γωνία μεταξύ των ∇T και dl . Κρατώντας σταθερό το μέτρο του $|dl|$ και ψάχνοντας γύρω – γύρω προς διάφορες κατευθύνσεις (μεταβάλλοντας δηλαδή την θ), θα δούμε ότι η μέγιστη μεταβολή της T παρατηρείται στην κατεύθυνση $\theta = 0$. Με σταθερό λοιπόν το μέτρο του $|dl|$, το dT παίρνει την μέγιστη τιμή του αν κινηθώ προς την κατεύθυνση του ∇T .

Η κλίση ∇T δείχνει προς την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της συνάρτησης T .

Επιπλέον

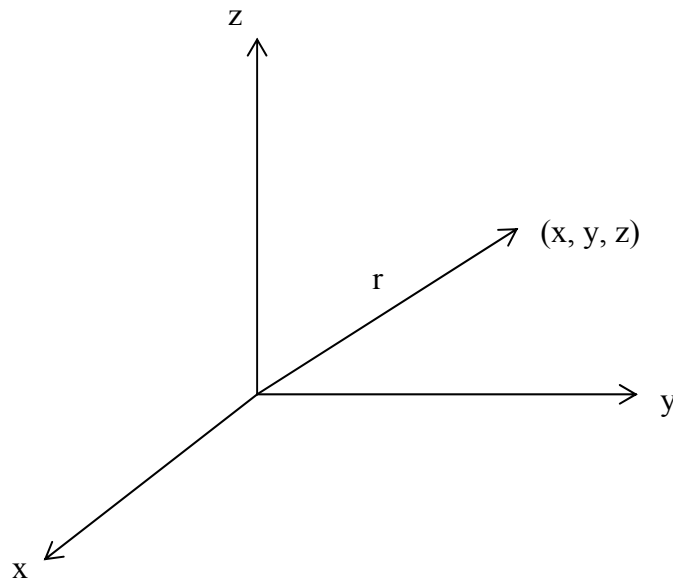
Το μέτρο $|\nabla T|$ μας δίνει την κλίση κατά μήκος της κατεύθυνσης όπου η αύξηση της T γίνεται μέγιστη.

Αν $\nabla T = 0$ στο (x, y, z) τότε $dT = 0$ για μικρές μετατοπίσεις γύρω από το σημείο (x, y, z) . Αυτό είναι ένα στάσιμο σημείο της συνάρτησης $T(x, y, z)$. Μπορεί να είναι ένα μέγιστο (κορυφή) ή ένα ελάχιστο (κοιλιάδα) ή κάποιο σαγματικό σημείο (πέραςμα) ή κάποιο σημείο καμπής (ράχη). Πρόκειται για κατάσταση ανάλογη με εκείνη των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, οπού ένας μηδενισμός της παραγωγού σηματοδοτεί την ύπαρξη μέγιστου, ελάχιστου ή σημείου καμπής της συνάρτησης. Αν θέλουμε λοιπόν να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών βρείτε πρώτα τα σημεία οπού μηδενίζεται η κλίση.

Παράδειγμα 3

Έστω $r(x, y, z)$ η απόσταση σημείου (x, y, z) από την αρχή των αξόνων δηλαδή $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ας προσπαθήσουμε πρώτα χωρίς υπολογισμούς να βρούμε το ∇r και μετά να ελέγξουμε την ορθότητα της πρόβλεψής μας.

Λύση



Σχήμα 1.10

Κατά αρχήν ποια είναι η κατεύθυνση του; Φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο ρυθμός αύξησης του r γίνεται μέγιστος όταν κινούμαστε ακτινικά προς τα έξω απομακρυνόμενοι από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον αν απομακρυνθούμε κατά μια απόσταση dl , τότε το dr αυξάνεται κατά ένα ποσό

$$dl = dr \quad (1.30)$$

Έτσι το μέτρο του ∇r προφανώς ισούται με 1. Άρα το ∇r είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική κατεύθυνση

$$\nabla r = \hat{r} \quad (1.31)$$

Το αποτέλεσμα (1.31) μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε χρησιμοποιώντας την $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} = \\ &= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r}{|r|} = \hat{r} \end{aligned}$$

1.2.3 Ο Τελεστής ∇

Ο παράγοντας ∇ στην (1.28) ονομάζεται ‘ανάδελτα’ και δίνεται από την σχέση

$$\nabla = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.32)$$

Το ‘ανάδελτα’ δεν είναι ένα συνηθισμένο διάνυσμα. Δεν έχει κάποιο νόημα αν δεν δράσει πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση T . Επιπλέον δεν πολλαπλασιάζετε με την βαθμωτή συνάρτηση T άλλα είναι μια εντολή παραγωγίσης της T . Για να είμαστε ακριβής θα ορίσουμε το ‘ανάδελτα’ ως **διανυσματικό τελεστή** που δρα πάνω στην συνάρτηση T και όχι σαν διάνυσμα που την πολλαπλασιάζει.

Παρόλα αυτά το ∇ μιμείται ένα διάνυσμα. Οποιαδήποτε πράξη γίνεται με διανύσματα γίνεται με το ∇ .

Ο τελεστής ∇ μπορεί να δράσει

1. Πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση T : ∇T
2. Πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}$, μέσω του εσωτερικού γινομένου: $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (η απόκλιση).
3. Πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}$, μέσω του εξωτερικού γινομένου: $\nabla \times \mathbf{v}$ (ο στροβιλισμός).

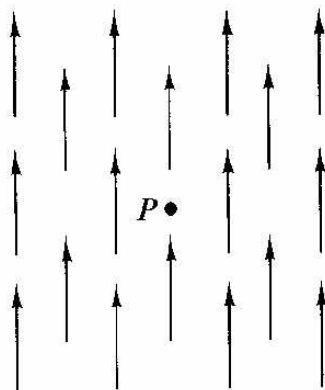
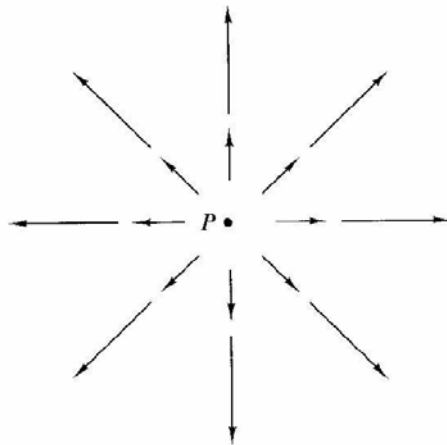
1.2.4 Η Απόκλιση

Η απόκλιση ενός διανύσματος δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.33)$$

Η απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόκλισης είναι ότι δείχνει κατά πόσο η συνάρτηση αποκλίνει από το συζήτηση σημείο. Στα παρακάτω σχήματα εικονίζονται 2 συναρτήσεις που δείχνουν η μια αποκλίνει από ένα σημείο P και η άλλη δεν αποκλίνει καθόλου.



Σχήμα 1.11: Απόκλιση και μη απόκλιση Πεδίου

(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Παράδειγμα 4

(α) Η πρώτη από τις συναρτήσεις που αναφέραμε (δες από τα παραπάνω σχήματα το πρώτο) μοιάζει με την $v_1=r$, αφού κάθε διάνυσμα δείχνει ακτινικά έξω από το σημείο P και το μήκος του ισούται με την απόσταση από αυτό

$$v_1 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1.34)$$

Η απόκλιση της (1.34) δίνεται από την σχέση (1.33) και δίνει τα εξής αποτελέσματα

$$\nabla \cdot v_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 \quad (1.35)$$

Η απόκλιση αυτής της συνάρτησης είναι θετικός αριθμός σε συμφωνία με την πρόβλεψη μας.

(β) Η δεύτερη συνάρτηση, δες δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα, μοιάζει με $v_2 = \hat{k}$ και αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα που έχουν την κατεύθυνση του άξονα z . Έτσι από σχέση (1.35) παίρνουμε την απόκλιση της v_2 που είναι ίσο με

$$\nabla \cdot v_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (1.36)$$

Από την σχέση (1.36) επιβεβαιώνεται ότι η v_2 δεν αποκλίνει.

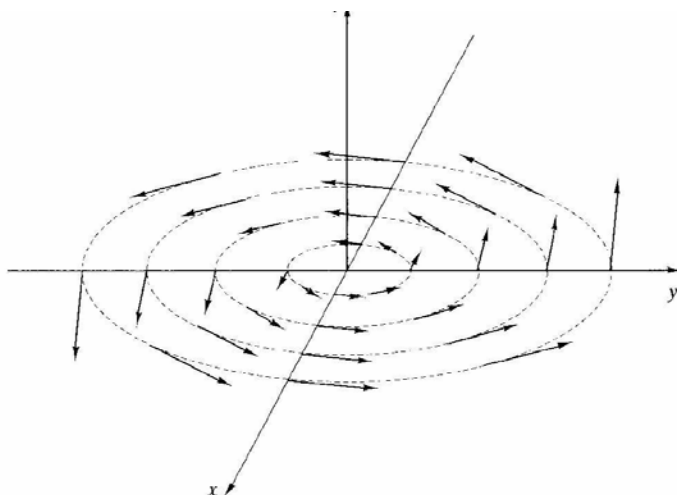
1.2.5 Ο Στροβιλισμός

Από τον ορισμό του 'ανάδελτα', δες σχέση (1.32), άλλα και του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων, δες σχέση (1.22), προκύπτει ότι

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.37)$$

Από την (1.37) προκύπτει ότι ο στροβιλισμός μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι επίσης διάνυσμα.

Ο στροβιλισμός γεωμετρικά μας περιγράφει πόσο στροβιλίζεται ένα διάνυσμα γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τον στροβιλισμό που παρουσιάζει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ γύρω από ένα σημείο.



Σχήμα 1.12: Στροβιλισμός Πεδίου

(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Ανακεφαλαιώνοντας το τι είναι απόκλιση και τι στροβιλισμός θα αναφέρω μερικά καθημερινά παραδείγματα που εκφράζουν αυτά τα 2 φαινόμενα.

Παράδειγμα θετικής απόκλισης, δηλαδή η το πεδίο απομακρύνεται προς τα έξω από ένα συγκεκριμένο σημείο, είναι μια πηγή νερού, ενώ παράδειγμα αρνητικής απόκλισης είναι μια καταβόθρα. Και στα 2 αυτά παραδείγματα η διανυσματική συνάρτηση είναι η ταχύτητα του νερού $\mathbf{v}$.

Παράδειγμα στροβιλισμού είναι οι δίνες που δημιουργούνται στο νερό.

Παράδειγμα 5

Η συνάρτηση που περιγράφει το παραπάνω σχήμα είναι η παρακάτω

$$\mathbf{v}_3 = -y\hat{i} + x\hat{j} \quad (1.38)$$

Βρείτε τον στροβιλισμό της (1.38).

Λύση

Ο στροβιλισμός μιας διανυσματικής συνάρτησης δίνεται από την σχέση (1.37). Έτσι συνδυάζοντας τις (1.38), (1.37) υπολογίζουμε τον στροβιλισμό της v_3 που είναι ίσος με

$$\nabla \times v_3 = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = 2\hat{k} \quad (1.39)$$

Όπως περιμέναμε από ορισμό του εξωτερικού γινομένου ο στροβιλισμός της v_3 έχει την κατεύθυνση του θετικού άξονα z .

1.2.6 Κανόνες γινομένων

Κανόνας της Πρόσθεσης

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad (1.40)$$

Κανόνας του Πολλαπλασιασμού

$$\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{df}{dx} \quad (1.41)$$

Κανόνας Γινομένου

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \quad (1.42)$$

Κανόνας Πηλίκου

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2} \quad (1.43)$$

Παρόμοιες με τις (1.41), (1.42), (1.43) ιδιότητες ισχύουν και για τις διανυσματικές παραγώγους. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla \cdot (A+B) &= (\nabla \cdot A) + (\nabla \cdot B) \\
\nabla \times (A+B) &= (\nabla \times A) + (\nabla \times B)
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Και

$$\begin{aligned}
\nabla(kf) &= k\nabla f \\
\nabla \cdot (kA) &= k(\nabla \cdot A) \\
\nabla \times (kA) &= k(\nabla \times A)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Οι κανόνες των γινομένων δεν είναι τόσο απλοί όσο οι κανόνες της πρόσθεσης. Γενικότερα υπάρχουν 2 τρόποι για να γραφεί ένα βαθμωτό μέγεθος ως γινόμενο 2 συναρτήσεων. Αυτοί είναι οι ακόλουθοι

$$\begin{aligned}
fg & \text{ (γινόμενο 2 βαθμωτών συναρτήσεων)} \\
A \cdot B & \text{ (γινόμενο 2 διανυσματικών συναρτήσεων)}
\end{aligned}$$

Ομοίως υπάρχουν 2 τρόποι που μπορεί να γραφεί ένα διάνυσμα και αυτοί είναι οι ακόλουθοι

$$\begin{aligned}
fA & \text{ (γινόμενο βαθμωτό επί διάνυσμα)} \\
A \times B & \text{ (εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)}
\end{aligned}$$

Οι κανόνες που διέπουν το γινόμενο είναι έξι στον αριθμό. Αυτοί είναι οι παρακάτω

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla(A \cdot B) &= A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A \\
\nabla \cdot (fA) &= f(\nabla \cdot A) + A \cdot (\nabla f) \\
\nabla \cdot (A \times B) &= B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) \\
\nabla \times (fA) &= f(\nabla \times A) - A \times (\nabla f) \\
\nabla \times (A \times B) &= (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

1.2.7 Δεύτερες Παράγωγοι

Είδαμε προηγουμένως ότι η κλίση μιας διανυσματικής συνάρτησης ∇T είναι διάνυσμα. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε **την απόκλιση και τον στροβιλισμό της κλίσης** οι οποίες είναι ίσες με

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) \\ \nabla \times (\nabla T) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι βαθμωτό μέγεθος οπότε το μόνο που μπορούμε να υπολογίσουμε είναι **η κλίση της απόκλισης**. Η οποία εκφράζεται από την σχέση

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.48)$$

Επίσης ο στροβιλισμός μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι ένα διάνυσμα οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση και τον στροβιλισμό του. Αυτά δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Αναλύοντας την πρώτη σχέση της (1.47) παίρνουμε ότι

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \quad (1.50)$$

Η (1.50) ονομάζεται **Λαπλασιανή** του T . Η Λαπλασιανή ενός βαθμωτού μεγέθους είναι επίσης βαθμωτό μέγεθος. Η Λαπλασιανή μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι μια ποσότητα που η x συνιστώσα της είναι η Λαπλασιανή της v_x , κ.λ.π..

$$\nabla^2 \mathbf{v} \equiv (\nabla^2 v_x) \hat{i} + (\nabla^2 v_y) \hat{j} + (\nabla^2 v_z) \hat{k} \quad (1.51)$$

Ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντα μηδέν

$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \quad (1.52)$$

Η σχέση (1.52) προκύπτει από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου άλλα και θυμωμένοι ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.53)$$

Η κλίση της απόκλισης, $\nabla(\nabla \cdot v)$ είναι μια έννοια η οποία δεν χρησιμοποιείται σε φυσικές εφαρμογές. Η κλίση της απόκλισης δεν είναι το ίδιο με την Λαπλασιανή ενός διανύσματος. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\nabla^2 v = (\nabla \cdot \nabla) v \neq \nabla(\nabla \cdot v) \quad (1.54)$$

Η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν, δηλαδή

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0 \quad (1.55)$$

Από τον ορισμό του ∇ μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2 v \quad (1.56)$$

1.3 Ολοκληρωτικός Λογισμός

1.3.1 Η Ολοκλήρωση

Έστω ότι η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το **Θεμελιώδες Θεώρημα της ανάλυσης** λέει ότι

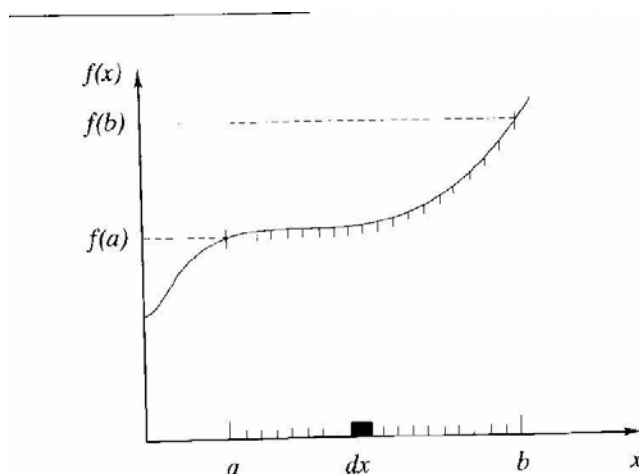
$$\int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a) \quad (1.57)$$

Η (1.57) μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \quad (1.58)$$

Οι σχέσεις, (1.57), (1.58) μας ενημερώνει ότι για να ολοκληρώσετε την $F(x)$ πρέπει να βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ που η πρώτη της παράγωγος να ισούται με F .

Η γεωμετρική ερμηνεία της ολοκλήρωσης είναι η ακόλουθη. Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης, δες σχέση (1.26), η τελευταία μας δείχνει πως μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης f , όταν πηγαίνετε από το (x) στο $(x+dx)$. Η σχέση (1.58) μας πληροφορεί ότι αν τεμαχίσετε το διάστημα από το a στο b σε πολλά μικρά κομματάκια dx και προσθέσετε τις μεταβολές df από κάθε μικρό κομμάτι, το αποτέλεσμα θα ισούται με την συνολική μεταβολή της f : $f(b) - f(a)$. Επομένως για να βρούμε την συνολική μεταβολή μίας συνάρτησης είτε αφαιρούμε τις τιμές στα άκρα είτε βήμα –βήμα προσθέτοντας όλες τις μικρές μεταβολές καθώς προχωράτε.



Σχήμα 1.13 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι υπάρχουν τρία είδη παραγωγών (κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός) άρα το κάθε είδος έχει το δικό του θεμελιώδες θεώρημα. Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα αναλύσουμε το νόημα των θεωρημάτων αυτών.

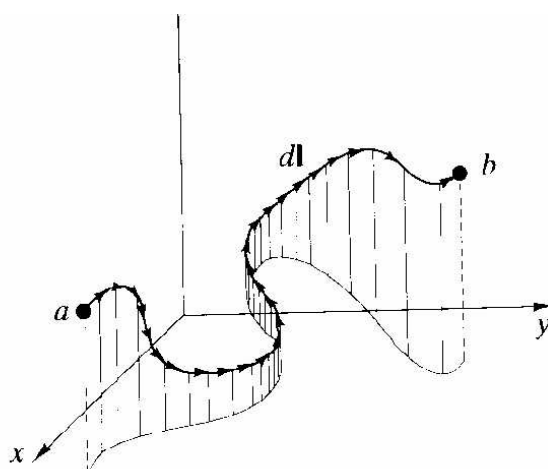
1.3.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα για τις Κλίσεις

Υποθέστε ότι έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση τριών μεταβλητών $T(x, y, z)$. Ξεκινώντας από το σημείο $a = (a_x, a_y, a_z)$ μετακινούμαστε κατά μια μικρή απόσταση

dl_1 . Σύμφωνα με την εξίσωση (1.29) η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης T άλλαξε κατά

$$dT = (\nabla T) \cdot dl_1 \quad (1.59)$$

Ομοίως αν συνεχίσουμε την κίνηση μας από το σημείο που σταματήσαμε κατά διάστημα dl_2 η απειροστή μεταβολή της T είναι $(\nabla T) \cdot dl_2$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να φθάσουμε μέχρι το σημείο $b = (b_x, b_y, b_z)$ (δες παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 1.14 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Είδαμε λοιπόν ότι σε κάθε βήμα της κίνησης μας υπολογίζουμε την κλίση της T και την πολλαπλασιάζουμε με την μετατόπιση dl – βρίσκοντας έτσι την συνολική μεταβολή της T . Η συνολική μεταβολή της T κατά την μετάβαση από το a στο b κατά μήκος της διαδρομής που έχει επιλεγεί είναι

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot dl = T(b) - T(a) \quad (1.60)$$

Η σχέση (1.60) εκφράζει το **θεμελιώδες θεώρημα για τις κλίσεις**. Από την εξίσωση (1.60) προκύπτουν τα εξής πορίσματα

Πόρισμα 1: Το $\int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(b) - T(a)$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ενώνει το a και το b .

Πόρισμα 2: $\oint (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = 0$. Ο κύκλος στο σύμβολο της ολοκλήρωσης μας πληροφορεί ότι η ολοκλήρωση πρέπει να γίνει κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου. Από (1.60) βλέπουμε όμως ότι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $T(a) - T(a) = 0$.

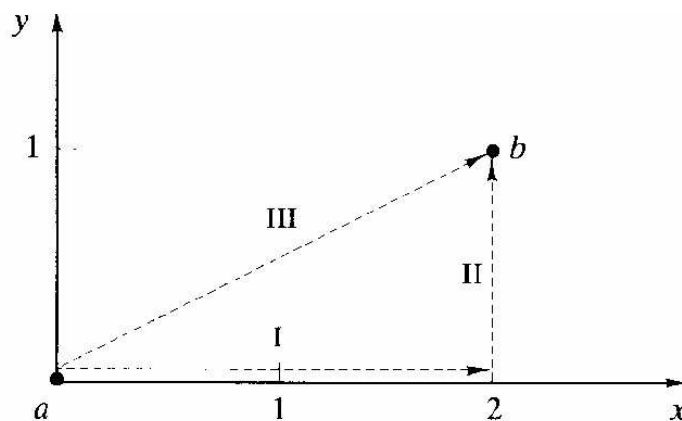
Παράδειγμα 6

Ελέγξτε το θεώρημα των κλίσεων για την συνάρτηση $T = xy^2$ παίρνοντας ως σημείο a την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ και ως σημείο b το $(2, 1, 0)$

Λύση

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (1.60) είναι ανεξάρτητος από την διαδρομή που θα ακολουθήσουμε για να μετακινηθούμε από το σημείο a στο σημείο b .

Έτσι ακολουθούμε την διαδρομή που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.15 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος Ι)

Η στοιχειώδης μετατόπιση γράφεται ως εξής $d\mathbf{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ και το ανάδελτα της T είναι ίσο με $\nabla T = y^2\hat{i} + 2xy\hat{j}$.

Ακολουθώντας το **βήμα 1** του παραπάνω σχήματος παρατηρούμε ότι

$$x: 0 \rightarrow 2, y = 0, dy = dz = 0$$

Επίσης βάση των προηγούμενων ισχύει για το τμήμα αυτό ότι

$$\nabla T \cdot dl = y^2 dx = 0 \quad (1.61)$$

Έτσι

$$\int_1 \nabla T \cdot dl = 0 \quad (1.62)$$

Ακολουθώντας τώρα το **βήμα 2** παρατηρούμε ότι

$$x: 2, y: 0 \rightarrow 1, dx = dz = 0$$

Συνέπεια των παραπάνω παρατηρήσεων είναι

$$\nabla T \cdot dl = 2xydy = 4ydy \quad (1.63)$$

Συμβουλευόμενοι την (1.63) έχουμε ότι για το μέρος αυτό παίρνουμε

$$\int_{II} \nabla T \cdot dl = \int_0^1 4ydy = 2y^2 \Big|_0^1 = 2 \quad (1.64)$$

Επομένως η συνολική μετατόπιση της T είναι αθροίζοντας τις (1.62), (1.64)

$$\int_a^b \nabla T \cdot dl = 2 = T(b) - T(a) = 2 - 0 = 2 \quad (1.65)$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το ολοκλήρωμα (1.65) είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που ακολουθούμε, ακολουθώντας την **διαδρομή III** στο παραπάνω σχήμα.

Παρατηρούμε ότι κατά την διάρκεια της διαδρομής αυτής ισχύει

$$x: 0 \rightarrow 2, y = \frac{1}{2}x, dy = \frac{1}{2}dx$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε

$$\int_{III} \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 dx = 2 \quad (1.66)$$

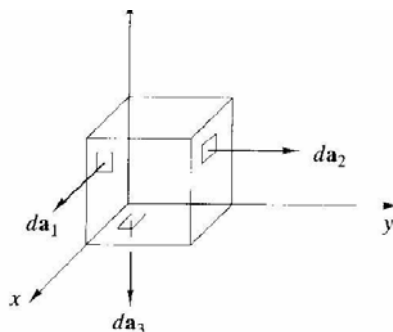
1.3.3 Το Θεμελιώδες Θεώρημα για τις Αποκλίσεις

Το θεμελιώδες θεώρημα για τις αποκλίσεις εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$\int_{\text{όγκος}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.67)$$

Η σχέση (1.67) είναι γνωστή ως **Θεώρημα Gauss**, **Θεώρημα Green** ή πιο απλά **Θεώρημα της απόκλισης**. Η σχέση (1.67) μας πληροφορεί ότι το ολοκλήρωμα μιας παραγωγού πάνω σε μια περιοχή (στην συγκεκριμένη περίπτωση ένας όγκος) ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σύνορο (στην περίπτωση αυτή είναι η επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο). Το $d\tau$ είναι ο στοιχειώδης όγκος ($= dx dy dz$) και το ολοκλήρωμα είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα. Στο δεύτερο μέρος της (1.67) υπάρχει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το οποίο είναι ένας κλειστός βρόγχος. Το $d\mathbf{a}$ αντιστοιχεί στο απειροστό στοιχείο επιφάνειας. Πρόκειται για ένα διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας, η διεύθυνση του είναι η κάθετη στην επιφάνεια και η φορά του είναι προς τα έξω.

Έστω ο όγκος είναι ο κύβος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.16 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Το στοιχείο επιφάνειας στην πρώτη του έδρα είναι

$$da_1 = (dydz)\hat{i} \quad (1.68)$$

στην δεξιά έδρα του είναι

$$da_2 = (dxdz)\hat{j} \quad (1.69)$$

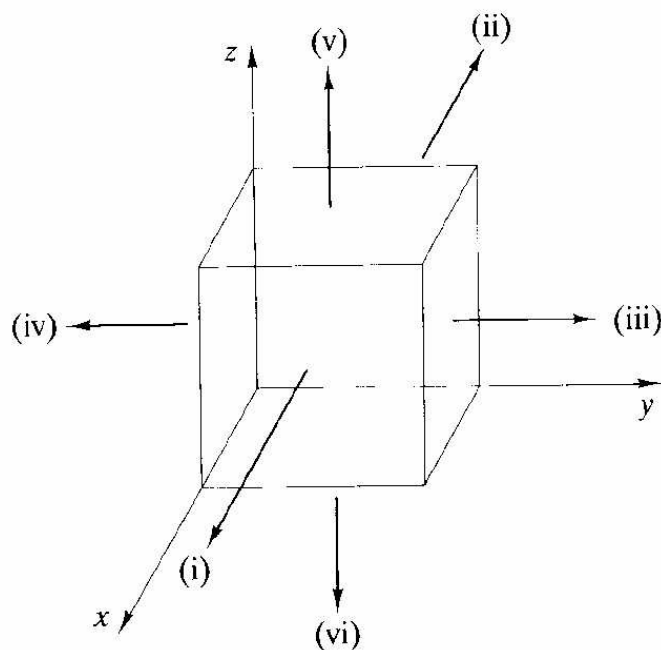
Ομοίως το κάθετο διάνυσμα στην κάτω έδρα είναι

$$da_3 = (dxdy)(-\hat{k}) \quad (1.70)$$

Το δεύτερό μέρος του ολοκληρώματος (1.67) έχει να κάνει με την ολοκλήρωση της κάθετης συνιστώσας του $\mathbf{v}$ πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια, ονομάζεται **ροή του $\mathbf{v}$** δια μέσου της επιφάνειας.

Παράδειγμα 7

Ελέγξτε το θεώρημα της απόκλισης για την συνάρτηση $\mathbf{v} = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + (2yz)\hat{k}$ και τον μοναδιαίο κύβο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (δες παρακάτω σχήμα)



Λύση

Από την σχέση (1.67) βλέπουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε την ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (απόκλιση της $\mathbf{v}$). Η ποσότητα αυτή υπολογίζεται ίση με

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x + y) \quad (1.71)$$

Από την (1.71) μπορούμε να υπολογίσουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος του Gauss. Έτσι έχουμε

$$\int_{\text{όγκος}} 2(x + y) d\tau = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy dz \quad (1.72)$$

Υπολογίζουμε ένα-ένα τα ολοκληρώματα της (1.72) και έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

$$\int_0^1 (x + y) dx = \frac{1}{2} + y, \int_0^1 \frac{1}{2} + y dy = 1, \int_0^1 1 dz = 1 \quad (1.73)$$

Επομένως το αποτέλεσμα του πρώτου μέλους της (1.73) μας δίνει αποτέλεσμα

$$\int_{\text{όγκος}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = 2 \quad (1.74)$$

Θα δούμε τώρα τι αποτέλεσμα μας δίνει το δεύτερο μέλος του θεωρήματος Gauss (ροή του $\mathbf{v}$ μέσω της επιφάνειας που περικλείει τον όγκο του μοναδιαίου κύβου),

$$\oint_{\text{επιφάνεια}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.75)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα (1.75) υπολογίζοντας την ροή του $\mathbf{v}$ μέσω κάθε μιας από τις έδρες του κύβου. Έτσι παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα έχουμε

Έδρα (i)

Το κάθετο διάνυσμα $d\mathbf{a}$ σε αυτήν την έδρα είναι το εξής

$$d\mathbf{a} = dydz\hat{i}, x=1 \quad (1.76)$$

Όπου $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = y^2 dydz$ έτσι το επιφανειακό ολοκλήρωμα για αυτήν την έδρα έχουμε

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 y^2 dydz = \frac{1}{3} \quad (1.77)$$

Έδρα (ii)

$$d\mathbf{a} = -dydz\hat{i}, x=0 \quad (1.78)$$

Επίσης ισχύει $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -y^2 dydz$ οπότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα μέσω της έδρας (ii) είναι ίσο με

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\int_0^1 \int_0^1 y^2 dydz = -\frac{1}{3} \quad (1.79)$$

Ομοίως εργαζόμενοι και για τις άλλες έδρες υπολογίζουμε τα εξής αποτελέσματα

Έδρα (iii): $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 (2x + y^2) dx dz = \frac{4}{3} \quad (1.80)$

Έδρα (iv): $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\int_0^1 \int_0^1 z^2 dx dz = -\frac{1}{3} \quad (1.81)$

Έδρα (v): $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 2y dx dy = 1 \quad (1.82)$

$$\text{Έδρα (vi): } \int v \cdot da = 0 \quad (1.83)$$

Αθροίζοντας τώρα τα αποτελέσματα των (1.77), (1.79), (1.80), (1.81), (1.82), (1.83) υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δευτέρου μέρους του θεωρήματος του Gauss. Επομένως η συνολική ροή είναι ίση με

$$\oint_{\text{επιφάνεια}} v \cdot da = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2$$

Επομένως όπως σωστά περιμέναμε και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος του Gauss δίνει αποτέλεσμα όπως το πρώτο ίσο με 2.

1.3.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα για τους Στροβιλισμούς

Το Θεμελιώδες θεώρημα για τους στροβιλισμούς είναι γνωστό ως θεώρημα Stokes και εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times v) \cdot da = \oint_{\text{συνοριακή γραμμή}} v \cdot dl \quad (1.84)$$

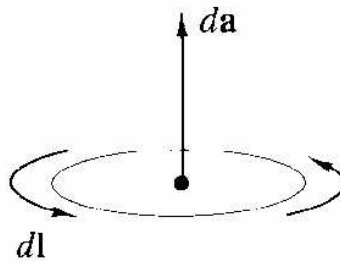
Την σχέση (1.84) την διέπουν τα εξής πορίσματα

Πόρισμα 1: Το $\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times v) \cdot da$ εξαρτάται μόνο από την συνοριακή γραμμή και όχι

από την επιφάνεια που χρησιμοποιείται.

Πόρισμα 2: Για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια ισχύει $\oint_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times v) \cdot da = 0$

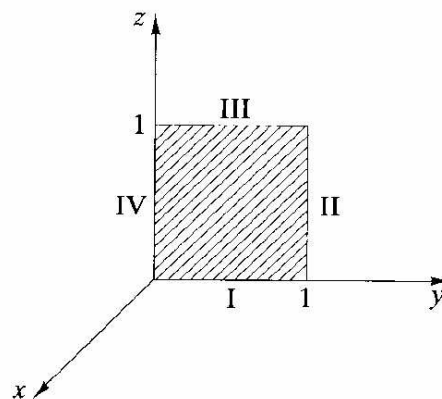
Η κατεύθυνση του da για μια κλειστή επιφάνεια είναι προς τα έξω. Για μια ανοικτή όμως επιφάνεια βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: αν τα δάκτυλά σας κλείνουν με φορά την ίδια με εκείνη του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, τότε ο αντίχειράς σας δείχνει προς την κατεύθυνση του da .



Σχήμα 1.17 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Παράδειγμα 8

Υποθέστε ότι $\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{j} + (4yz^2)\hat{k}$. Ας ελέγξουμε το θεώρημα του Stokes για το τετράγωνο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.18 (Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Λύση

Από σχέση (1.84) βλέπουμε ότι για να επιβεβαιώσουμε το θεώρημα του Stokes θα πρέπει να υπολογίσουμε 2 ολοκληρώματα.

Ο στροβιλισμός του $\mathbf{v}$ υπολογίζεται ίσος με

$$\nabla \times \mathbf{v} = (4z^2 - 2x)\hat{i} + 2z\hat{k} \quad (1.85)$$

Επίσης το da μπορεί να υπολογιστεί κοιτώντας το σχήμα της ασκήσεως και είναι ίσο με

$$da = dydz\hat{i} \quad (1.86)$$

Να τονιστεί ότι διαλέξαμε το da να δείχνει προς τα έξω άρα ολοκληρώνουμε πάνω στο σχήμα διαλέγοντας την δεξιόστροφη τροχιά. Για την επιφάνεια αυτή, ισχύει $x=0$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα της (1.84) βάση των (1.85), (1.86) υπολογίζεται ίσο με

$$\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times v) \cdot da = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dydz = \frac{4}{3} \quad (1.87)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (1.84) για να το υπολογίσουμε το σπάμε σε 4 κομμάτια σύμφωνα με το σχήμα της άσκησης και υπολογίζουμε το επικαμπύλιο για κάθε μια από τις επιφάνειες αυτές. Έτσι έχουμε:

$$(i) \ x=0, y:0 \rightarrow 1, z=0, \ v \cdot dl = 3y^2 dy, \ \int v \cdot dl = \int_0^1 3y^2 dy = 1$$

$$(ii) \ x=0, y=1, z:0 \rightarrow 1, \ v \cdot dl = 4z^2 dz, \ \int v \cdot dl = \int_0^1 4z^2 dz = \frac{4}{3}$$

$$(iii) \ x=0, y: 1 \rightarrow 0, z=1, \ v \cdot dl = 3y^2 dy, \ \int v \cdot dl = \int_1^0 3y^2 dy = -1$$

$$(iv) \ x=0, y=0, z: 1 \rightarrow 0, \ v \cdot dl = 0, \ \int v \cdot dl = 0$$

Αθροίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (1.84) που είναι ίσο με

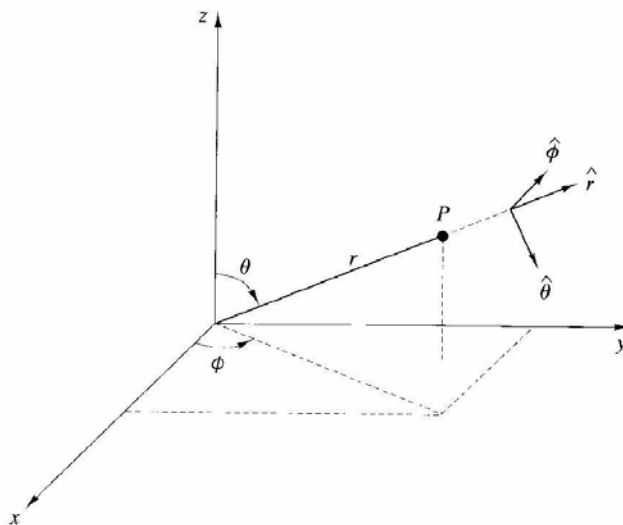
$$\oint v \cdot dl = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3} \quad (1.88)$$

Από αποτελέσματα (1.87), (1.88) επιβεβαιώνεται το θεώρημα του Stokes.

1.4 Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες

1.4.1 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) ενός σημείου P ορίζονται στο παρακάτω σχήμα .



Σχήμα 1.19: Σφαιρικές Συντεταγμένες

(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Στο παραπάνω σχήμα οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) ορίζονται αναλυτικά ως εξής

Ως r ορίζεται η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων. Μπορεί να πάρει τιμές από 0 έως ∞ .

Ως θ , η οποία ονομάζεται **πολική γωνία**, ορίζεται η γωνία που σχηματίζει το r με τον άξονα z . Μπορεί να παίρνει τιμές από 0 έως π .

Ως ϕ , η οποία ονομάζεται **αζιμουθιακή γωνία**, ορίζεται η γωνία που σχηματίζει η προβολή του r στο επίπεδο xy με τον άξονα x . Παίρνει τιμές από 0 έως 2π .

Οι σχέσεις που διέπουν τις σφαιρικές συντεταγμένες με τις Καρτεσιανές είναι οι ακόλουθες

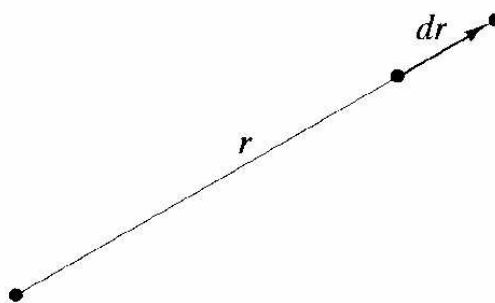
$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (1.89)$$

Επομένως ένα διάνυσμα όπως μπορεί να γραφεί συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων μπορεί να γραφεί συνάρτηση των σφαιρικών συντεταγμένων σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$A = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} \quad (1.90)$$

Η πιο σημαντική διαφορά που παρουσιάζουν τα μοναδιαία διανύσματα των σφαιρικών συντεταγμένων συγκριτικά με τα μοναδιαία των Καρτεσιανών είναι ότι σε αντίθεση με τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ που έχουν σταθερή διεύθυνση τα μοναδιαία των σφαιρικών $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ η διεύθυνση τους εξαρτάται από το σημείο P. Για αυτό το λόγο τα μοναδιαία διανύσματα βάσης των σφαιρικών συντεταγμένων έχουν μη μηδενικές παραγώγους.

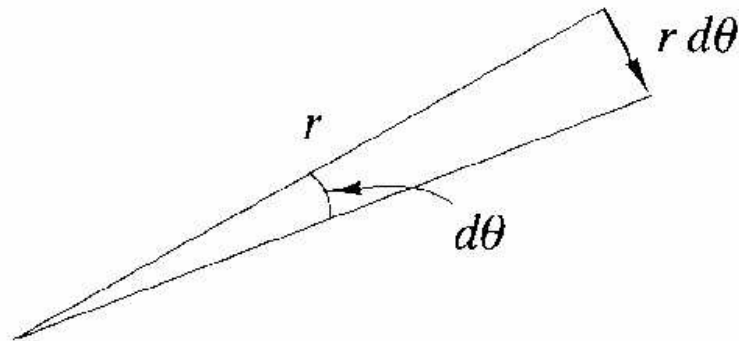
Το απειροστό στοιχείο μήκους στην κατεύθυνση του $\hat{r}$ φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα είναι ίσο με



Σχήμα 1.20: Στοιχειώδης Μετατόπιση κατά την διεύθυνση $\hat{r}$
(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

$$dl_r = dr \quad (1.91)$$

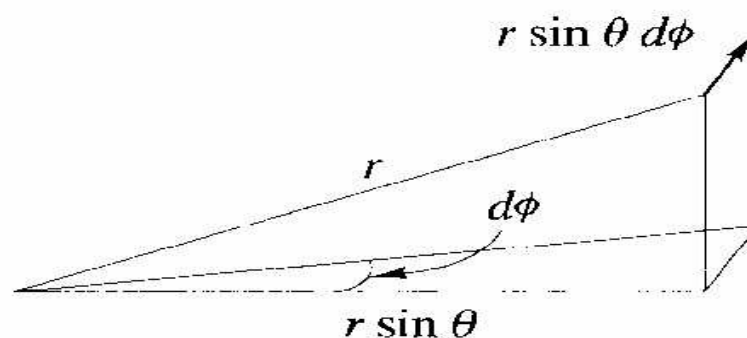
Ομοίως παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα η στοιχειώδης μετατόπιση κατά την διεύθυνση του $\hat{\theta}$ είναι ίση με



Σχήμα 1.21: Στοιχειώδης Μετατόπιση κατά την διεύθυνση $\hat{\theta}$
(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

$$dl_{\theta} = r d\theta \quad (1.92)$$

Τέλος παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα η στοιχειώδης μετατόπιση κατά την διεύθυνση του $\hat{\phi}$ δίνεται από την σχέση



Σχήμα 1.22: Στοιχειώδης Μετατόπιση κατά την διεύθυνση $\hat{\phi}$
(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

$$dl_{\phi} = r \sin \theta d\phi \quad (1.93)$$

Από τις σχέσεις (1.91), (1.92), (1.93) προκύπτει ότι ο στοιχειώδης όγκος $d\tau$ ($= dl_r dl_{\theta} dl_{\phi}$) σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.94)$$

Επίσης από τις σχέσεις (1.91), (1.92), (1.93) το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης γράφεται ως εξής

$$dl = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (1.95)$$

Δεν υπάρχει όμως συγκεκριμένη έκφραση για τα στοιχεία επιφάνειας da αφού αυτά εξαρτώνται εξ ολοκλήρου από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.

Π.χ. εάν ολοκληρώσετε πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας τότε το r παραμένει σταθερό ενώ οι θ, ϕ αλλάζουν. Έτσι

$$da = dl_{\theta} dl_{\phi} \hat{r} = r^2 \sin \theta \hat{r} \quad (1.96)$$

εάν τώρα ολοκληρώσετε πάνω σε μια επιφάνεια που βρίσκετε πάνω στο επίπεδο xy τότε η πολική γωνία θ παραμένει σταθερή και ίση με $\pi/2$ και η στοιχειώδης επιφάνεια δίνεται από την σχέση

$$da = dl_r dl_{\phi} \hat{\theta} = r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} = r dr d\phi \hat{\theta} \quad (1.97)$$

Η κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός και η λαπλασιανή μιας συνάρτησης v σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται στον παρακάτω πίνακα

	Σφαιρικές Συντεταγμένες
Κλίση, (∇T)	$\nabla v = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Απόκλιση, ($\nabla \cdot v$)	$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
Στροβιλισμ ός, ($\nabla \times v$)	$\nabla \times v = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
Λαπλασιαν ή, $\nabla^2 T$	$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$

Παράδειγμα 9

Βρείτε τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας R

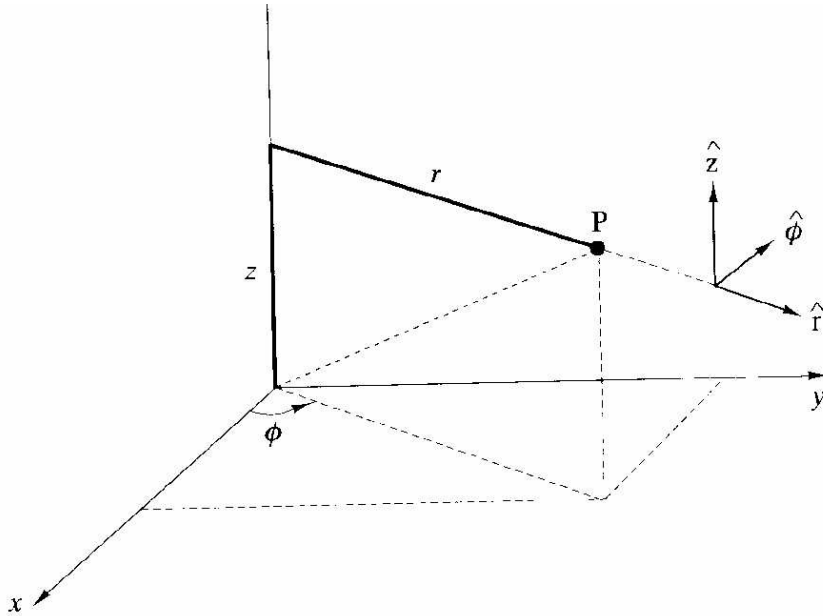
Λύση

Όγκος

$$\int_{\text{όγκος}} d\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} r^2 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi = \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = \frac{R^3}{3} (2)(2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

1.4.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r , ϕ , z) του σημείου P ορίζονται στο παρακάτω σχήμα .



Σχήμα 1.23: Κυλινδρικές Συντεταγμένες
(Από «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική» D.J. Griffiths, Τόμος I)

Οι συντεταγμένες αυτές ορίζονται ως εξής

Το r ορίζεται ως η απόσταση του σημείου P από τον άξονα z . Παίρνει τιμές από 0 έως άπειρο.

Το ϕ έχει τον ίδιο ορισμό με τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Οι σχέσεις που διέπουν τις κυλινδρικές συντεταγμένες με τις Καρτεσιανές εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.98)$$

Ομοίως οι απειροστές μετατοπίσεις κατά μήκος των μοναδιαίων διανυσμάτων των κυλινδρικών συντεταγμένων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\phi &= r d\phi \\ dl_z &= dz \end{aligned} \quad (1.99)$$

Οπότε η στοιχειώδης μετατόπιση dl και ο στοιχειώδης όγκος δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} dl &= dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \\ d\tau &= r dr d\phi dz \end{aligned} \quad (1.100)$$

Οι τιμές που μπορούν να πάρουν οι κάθε μια από τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής

Το r μεταβάλλεται από το $0 \rightarrow \infty$, το ϕ από το $0 \rightarrow 2\pi$ και το z από το $-\infty$ έως το $+\infty$.

Η κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός και η λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφονται ως εξής

	Κυλινδρικές Συντεταγμένες
Κλίση, (∇T)	$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$
Απόκλιση, $(\nabla \cdot \mathbf{v})$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Στροβιλισμός, $(\nabla \times \mathbf{v})$	$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z}$
Λαπλασιανή, $\nabla^2 T$	$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

1.5 Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Βρείτε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(β) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

2. Το ύψος κάποιου λόφου δίνεται από την

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

όπου x και y είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις ανατολικά και βόρεια κάποιας συγκεκριμένης πόλης (που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων).

(α) Σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή του λόφου

(β) Πόσο είναι το ύψος του

(γ) Πόσο απότομη είναι η κλίση του λόφου σε ένα σημείο που βρίσκεται 1 μίλι ανατολικά και 1 μίλι βόρεια της πόλης ; Προς ποια κατεύθυνση, στο σημείο αυτό, η κλίση του λόφου γίνεται πιο απότομη;

3. Υπολογίστε την απόκλιση των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων ;

(α) $\mathbf{v}_1 = x^2 \hat{i} + 3xy \hat{j} - 2xz \hat{k}$

(β) $\mathbf{v}_2 = xy \hat{i} + 2yz \hat{j} + 2yz \hat{k}$

4. Δείξτε ότι $\nabla \cdot (t\mathbf{v}) = (\nabla t) \cdot \mathbf{v} + t(\nabla \cdot \mathbf{v})$ όπου t είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και v είναι μια διανυσματική συνάρτηση.

5. Επαληθεύστε τον κανόνα γινομένου $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$ για τις

$$\begin{aligned} A &= x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k} \\ B &= 3y\hat{i} - 2x\hat{j} \end{aligned}$$

- (β) Κάντε το ίδιο για τον κανόνα του γινομένου

$$\nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A$$

- (γ) Το ίδιο για τον κανόνα $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

6. Υπολογίστε την λαπλασιανή των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $T = x^2 + 2xy + 3z + 4$

(β) $T = \sin x \sin y \sin z$

(γ) $v = x^2\hat{i} + 3xz\hat{j} - 2xz\hat{k}$