

Κεφάλαιο 4^ο: Εξισώσεις Maxwell & Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

4.1 Εισαγωγή

Τα μηχανικά κύματα όπως για παράδειγμα τα κύματα του νερού ή των ελατηρίων, απαιτούν για την διάδοση τους την ύπαρξη ενός μέσου. Εν αντιθέσει με τα μηχανικά κύματα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να διαδοθούν και μέσα στο κενό.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις του Maxwell οι οποίες περιγράφουν όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Οι εξισώσεις αυτές είναι η περίληψη όλων των βασικών αρχών της Ηλεκτροστατικής και Μαγνητοστατικής που αναπτυχθήκαν στα κεφάλαια 2 και 3.

Η θεωρία του Maxwell προέβλεψε την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Ο Maxwell δεν ένωσε με την θεωρία του μόνο τον Ηλεκτρισμό με τον Μαγνητισμό αλλά και απέδειξε ότι το φως είναι μια μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Πηγή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τα επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία. Τα εκπεμπόμενα κύματα δεν είναι τίποτε άλλο από ταλαντούμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους και ταυτοχρόνως κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης της κυματικής διαταραχής. Για αυτό το λόγο τα Η/Μ κύματα χαρακτηρίζονται ως εγκάρσια κύματα.

Θα δείξουμε ότι τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου οποιαδήποτε χρονική στιγμή συνδέονται μέσω της σχέσης

$$E = cB \quad (4.1)$$

Σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή το πλάτος του Η/Μ κύματος ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς την απόσταση r από την πηγή.

Τα Η/Μ κύματα καλύπτουν μια μεγάλη φασματική περιοχή. Επίσης τα Η/Μ κύματα μεταφέρουν ενέργεια, στροφορμή και ορμή.

4.2 Ρεύμα Μετατόπισης

Η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss στην ηλεκτροστατική όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 δίνεται από την σχέση

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

Η σχέση (4.2) ισχύει για τα ακίνητα ηλεκτρικά φορτία άλλα και για τα κινούμενα. Δηλαδή το ρ μπορεί να είναι συναρτήσει του χρόνου και της θέσης.

Ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα. Από την αρχή διατήρησης του φορτίου, η οποία μας πληροφορεί ότι το φορτίο δεν δημιουργείται άλλα ούτε καταστρέφεται, η πυκνότητα ρεύματος J και η πυκνότητα φορτίου ρ συνδέονται με την σχέση:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.3)$$

Αν το J είναι σταθερό με τον χρόνο, στάσιμη κατανομή ρεύματος, τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί B συνδέετε με την πυκνότητα ρεύματος μέσω του νόμου του Ampere,

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (4.4)$$

Ενδιαφερόμαστε τώρα για κατανομές φορτίων που μεταβάλλονται με τον χρόνο με αποτέλεσμα $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, π.χ. ένας πυκνωτής που εκφορτίζεται μέσω μιας αντίστασης, που σε συνδυασμό με την (4.3) δίνει

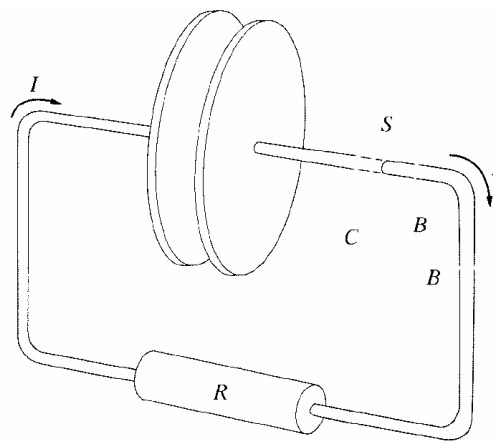
$$\nabla \cdot J \neq 0 \quad (4.5)$$

Από κεφάλαιο 1 αυτών των σημειώσεων γνωρίζουμε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου είναι πάντα μηδέν, επομένως από εξίσωση (4.4) έχουμε:

$$\nabla \cdot J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times B) = 0 \quad (4.6)$$

Παρατηρείτε όμως ότι η εξίσωση (4.6) έρχεται σε αντίθεση με την (4.5) χωρίς καμιά από τις 2 να είναι λάθος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εξίσωση (4.4) δεν είναι όλη η αλήθεια γιατί δεν μπορεί να περιγράψει την περίπτωση που η πυκνότητα ρεύματος μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να εξεταστεί αν μελετήσουμε το παράδειγμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 4.1: Ρεύμα Διαρροής («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

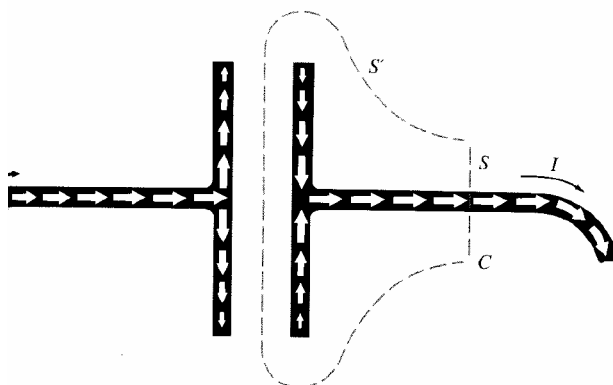
Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από την κλειστή διαδρομή C που περικλείει την επιφάνεια S και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes έχουμε:

$$\int_C B \cdot dl = \int_S \nabla \times B \cdot da \quad (4.7)$$

Η επιφάνεια S διασχίζει τελείως τον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I. Μέσα στον αγωγό ο στροβιλισμός του B είναι ίσος με $\mu_0 J$ και το ολοκλήρωμα στα δεξιά γίνεται

ίσο με $\mu_0 I$. Επομένως αν η κλειστή διαδρομή C είναι αρκετά μακριά από τον πυκνωτή και κοντά στον ρευματοφόρο αγωγό τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται δεν διαφέρει σε τίποτα από το μαγνητικό πεδίο γύρω από οποιαδήποτε ρευματοφόρο αγωγό.

Ας επιλέξουμε τώρα μια επιφάνεια S' η οποία καταλήγει στην κλειστή διαδρομή C άλλα περικλείει και τον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.



Σχήμα 4.2 : Ρεύμα μετατόπισης («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η επιφάνεια αυτή δεν διαρέεται από ρεύμα, μια και οι οπλισμοί μεταξύ του πυκνωτή δεν διαρρέονται από ρεύμα. Παρόλα αυτά δεν μπορεί ο στροβιλισμός του B να είναι μηδέν σε ολόκληρη την επιφάνεια S'. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το curl (στροβιλισμός) του B πάνω στην επιφάνεια S' θα πρέπει να εξαρτάται και από μια άλλη ποσότητα εκτός από την πυκνότητα ρεύματος J. Επομένως η εξίσωση (4.4) πρέπει να συμπληρωθεί με κάποιο extra όρο που να μπορεί να περιγράψει και την περίπτωση μεταβαλλόμενων κατανομών φορτίου.

Στο κεφάλαιο 3 των σημειώσεων αυτών είδαμε ότι μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.8)$$

Αν πρέπει να ισχύει η συμμετρία μεταξύ E και B τότε θα πρέπει και μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Η σχέση αυτή είναι η παρακάτω:

$$\nabla \times B = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.9)$$

Η σχέση (4.9) συμπληρώνει και την σχέση (4.4) για να περιγράψει και την περίπτωση μεταβαλλόμενων ηλεκτρικών κατανομών. Επομένως η σχέση (4.4) από την (4.9) γράφεται ως εξής:

$$\nabla \times B = \mu_o J + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.10)$$

Υπολογίζοντας την απόκλιση της (4.10) έχουμε:

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_o \nabla \cdot J + \mu_o \nabla \cdot \left(\varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (4.11)$$

Το αριστερό μέρος της (4.11) είναι πάντα μηδέν, στο δεξί μέρος μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά της παραγωγίσης ως προς τις συντεταγμένες του χώρου και τον χρόνο και να καταλήξουμε στην

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \varepsilon_o E) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.12)$$

Η (4.12) επιβεβαιώνει ότι ο extra όρος στην (4.10) περιγράφει τις μεταβαλλόμενες κατανομές φορτίου. Από εξισώσεις (4.11), (4.12) προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.13)$$

Ο νέος όρος επιλύει λοιπόν το πρόβλημα που προέκυψε προηγουμένως.

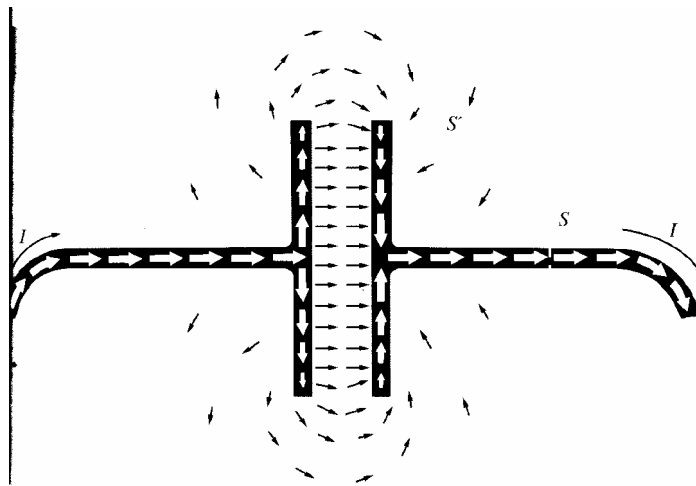
Η διανυσματική συνάρτηση $\varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}$ δημιουργεί μια συνέχεια στην κατανομή του ρεύματος αγωγιμότητας. Ο Maxwell ονόμασε την συνέχεια αυτή πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης J_d . Έτσι η εξίσωση (4.10) γράφεται ως εξής

$$\nabla \times B = \mu_o (J + J_d) \quad (4.14)$$

όπου J είναι το ρεύμα αγωγιμότητας και το J_d δίνεται από την σχέση:

$$J_d = \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.15)$$

Η εξίσωση (4.14) είναι γνωστή ως νόμος των Ampere – Maxwell. Η (4.15) μας πληροφορεί ότι το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι πηγή ενός ισοδύναμου ρεύματος, του ρεύματος μετατόπισης. Η πλήρης εικόνα με τι είδους ρεύμα διαρρέει ένα πυκνωτή δίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 4.3: Το ρεύμα αγωγιμότητας (με λευκά βέλη) και το ρεύμα μετατόπισης (μαύρα βέλη) («Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός», E.M. Purcell, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ)

Η εξίσωση (4.14) σε ολοκληρωτική μορφή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\oint B \cdot dS = \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (4.16)$$

Ο extra όρος χρειάστηκε για να είμαστε συνεπής με τον εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου (δες εξίσωση (4.13)).

Ανακεφαλαιώνοντας ο νόμος των Ampere και Maxwell μας ενημερώνει ότι:

Τα μαγνητικά πεδία παράγονται από τα ρεύματα αγωγιμότητας και από τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

4.3 Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις του Maxwell αποτελούν το θεμέλιο όλων των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Οι εξισώσεις αυτές είναι η παρακάτω για το κενό παρουσία ηλεκτρικού φορτίου πυκνότητας ρ και ρεύματος πυκνότητας J :

$$\begin{aligned}\oint E \cdot dA &= \frac{Q}{\epsilon_o} \\ \oint B \cdot dA &= 0 \\ \oint E \cdot dS &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ \oint B \cdot dS &= \mu_o I + \epsilon_o \mu_o \frac{d\Phi_e}{dt}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Σε διαφορική μορφή οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να γραφούν:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= -\frac{\rho}{\epsilon_o} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \epsilon_o \mu_o \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_o J\end{aligned}\tag{4.18}$$

Η 1^η εξίσωση από τις (4.17), (4.18) είναι ο νόμος του Gauss για την ηλεκτροστατική και είναι ισοδύναμη με τον νόμο του Coulomb. Η 2^η εξίσωση από το ίδιο ζευγάρι εξισώσεων εκφράζει το γεγονός ότι οι μοναδική πηγή μαγνητικού πεδίου είναι το ηλεκτρικό ρεύμα. Εκφράζει τον νόμο του Gauss στην μαγνητοστατική και προκύπτει από το γεγονός ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στην φύση. Η 3^η εξίσωση των (4.17), (4.18) εκφράζει τον νόμο της επαγωγής του Faraday. Η 4^η εξίσωση των παραπάνω εξισώσεων εκφράζει την εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου από την πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης ή το ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου και από το ρεύμα αγωγιμότητας ή τον ρυθμό κίνησης του φορτίου. Παρατηρούμε μια έλλειψη συμμετρίας ανάμεσα στα E και B στις παραπάνω εξισώσεις. Αυτή η έλλειψη συμμετρίας οφείλεται στην ύπαρξη φορτίου και ρεύματος αγωγιμότητας.

Στο κενό οι εξισώσεις Maxwell απουσία ηλεκτρικού φορτίου και ρεύματος γράφονται ως:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \times B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}\tag{4.19}$$

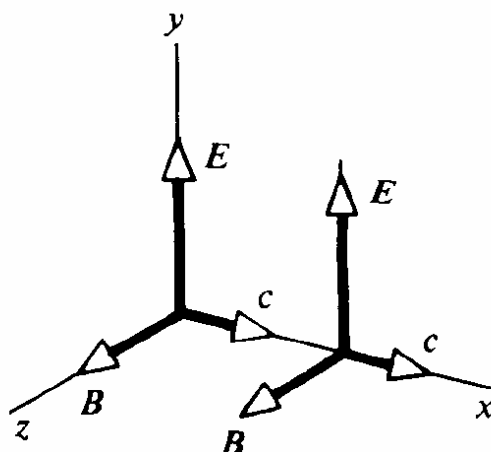
Στις εξισώσεις (4.19) ο πιο σημαντικός όρος είναι το ρεύμα μετατόπισης $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ μια και αυτός ο όρος μαζί με την 3^η εξίσωση της (4.19) μας επιτρέπουν την δημιουργία H/M κυμάτων.

4.4 Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Οι ιδιότητες των H/M κυμάτων μπορούν να εξαχθούν μέσω της μελέτης των εξισώσεων του Maxwell.

Η ανάλυση που ακολουθεί είναι απλή ώστε να μπορεί να γίνει όσο πιο το δυνατόν κατανοητή, χωρίς να εξάγονται λανθασμένα συμπεράσματα.

Θα υποθέσουμε πρώτα από όλα ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ένα επίπεδο κύμα, ότι δηλαδή οδεύει προς την μια κατεύθυνση μονάχα. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που θα περιγράψουμε έχει τα χαρακτηριστικά που εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.4: Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (*“Physics for Scientists & Engineers”, Serway, Τόμος II*)

Το Η/Μ κύμα κατευθύνεται παράλληλα προς τον άξονα x ενώ το ηλεκτρικό ταλαντώνεται πάνω στον άξονα y ενώ το μαγνητικό πεδίο ταλαντώνεται πάνω στον άξονα z . Τα κύματα στα οποία τα διανύσματα των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι παράλληλα προς ορισμένες διευθύνσεις, π.χ. στο επίπεδο yz , τότε το κύμα ονομάζεται γραμμικώς πολωμένο κύμα. Υποθέτουμε επίσης ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E και το μέτρο B του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από την συντεταγμένη x του σημείου P και από τον χρόνο t και όχι από τις συντεταγμένες y και z του σημείου P .

Συνδυάζοντας την 3^η και 4^η εξίσωση των εξισώσεων του Maxwell για το κενό, (4.19), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t}$$

Σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε από την μηχανική ότι η γενική εξίσωση κύματος στην μία διάσταση είναι η παρακάτω

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

όπου u είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και f είναι το πλάτος της κυματικής διαταραχής.

Επιστρέφουμε στις εξισώσεις (4.20). Παίρνουμε την παράγωγο ως προς x της 1^{ης} εξίσωσης της (4.20) και προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (4.22)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.22) την 2^η εξίσωση της (4.20) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\mu_o \varepsilon_o \partial E}{\partial t} \right) = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (4.23)$$

Σε παρόμοιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εφόσον μελετήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell βάση του μαγνητικού πεδίου, έτσι

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

Παρατηρώντας τις (4.21) με την (4.23) βλέπουμε ότι η ταχύτητα του Η/Μ κύματος είναι ίση με

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} \quad (4.25)$$

όπου αντικαθιστώντας τις τιμές της μαγνητικής διαπερατότητας του κενού μ_o και της ηλεκτρικής διαπερατότητας του κενού ϵ_o προκύπτει ότι το c είναι ίσο με την γνωστή τιμή $3 \times 10^8 \text{ m/sec}$. Η τιμή αυτή είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Έτσι είναι φυσιολογικό να πούμε ότι το φως είναι Η/Μ κύμα.

Η απλούστερη λύση της (4.23) και της (4.24) είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned} E &= E_m \cos(kx - \omega t) \\ B &= B_m \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

τα E_m και B_m είναι τα πλάτη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Η ποσότητα k είναι ο κυματάριθμος του κύματος και είναι ίσος με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.27)$$

Το ω είναι η κυκλική συχνότητα, αριθμός κύκλων ανά μονάδα χρόνου, του κύματος και συνδέεται με την γραμμική συχνότητα f του κύματος με την σχέση:

$$\omega = 2\pi f \quad (4.28)$$

Ο λόγος της (4.28) και (4.27) είναι ίσο με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δηλαδή:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c \quad (4.29)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα αρμονικά μεταβαλλόμενου γραμμικά πολωμένου επίπεδου κύματος το οποίο κινείται προς την θετική κατεύθυνση x .

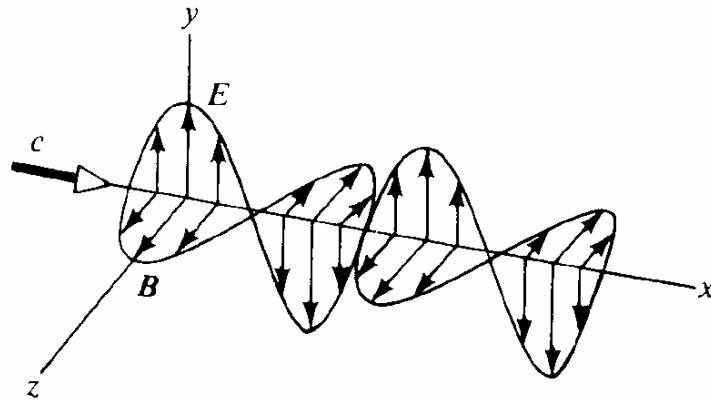
Παίρνουμε τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων (4.26) ως προς x και ως προς t αντίστοιχα. Έτσι

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_m \sin(kx - \omega t) \quad (4.30)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \sin(kx - \omega t)$$

Από εξίσωση (4.20) και από (4.30) έχουμε ότι:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad (4.31)$$



Σχήμα 4.5: Αρμονικά Ηλεκτρομαγνητικό κύμα που οδεύει προς την κατεύθυνση x
(“Physics for Scientists & Engineers”, Serway, Τόμος II)

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.26) και (4.31) έχουμε την γενικότερη σχέση:

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = c \quad (4.32)$$

Από (4.32) καταλαβαίνουμε ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ενός Η/Μ κύματος μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ο λόγος των μέτρο τους είναι ίσος με c.

Ανακεφαλαιώνοντας τις ιδιότητες των Η/Μ κυμάτων έχουμε τα παρακάτω:

1. Το πεδίο ταξιδεύει με ταχύτητα c την ταχύτητα του φωτός στο κενό.
2. Σε οποιοδήποτε σημείο του κύματος, οποιαδήποτε στιγμή ο λόγος των μέτρων του ηλεκτρικού προς το μαγνητικό πεδίο είναι ίσος με c .
3. Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης. Το κύμα διαδίδεται πάντα κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $E \times B$.
4. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.

4.5 Μεταφορά Ενέργειας από H/M κύματα

Από το κεφάλαιο 2 αυτών των σημειώσεων είδαμε ότι η ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου που αποδίδεται στον στοιχειώδη όγκο είναι ίση με

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \quad (4.33)$$

Αθροίζοντας όλα τα στοιχεία της (4.33) μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ενός ηλεκτροστατικού πεδίου.

Ομοίως στην μαγνητοστατική η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που εναποτίθεται στο στοιχειώδη όγκο dV δίνεται από μια ανάλογη σχέση με την (4.33),

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV \quad (4.34)$$

Ομοίως αθροίζοντας σε όλο τον όγκο τα στοιχεία της (4.34) υπολογίζουμε την ολική ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στην μαγνητοστατική.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καταλαβαίνουμε ότι μεταφέρουν ενέργεια καθημερινώς. Λόγω της μεταφερόμενης αυτής ενέργειας η οποία εδρεύει μέσα στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, θερμαινόμαστε όταν κάτσουμε κάποιο χρονικό διάστημα στον Ήλιο.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταφοράς της ενέργειας από ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε ένα H/M κύμα το οποίο κινείται προς την κατεύθυνση του άξονα y . Το ηλεκτρικό πεδίο του H/M κύματος ταλαντώνεται πάνω στον άξονα z και περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση

$$E = \hat{z}E_o \sin \frac{2\pi}{\lambda}(y - vt) \quad (4.35)$$

Το μαγνητικό πεδίο του οδεύοντος H/M κύματος, ταλαντώνεται στον άξονα x και δίνεται από την σχέση

$$B = \hat{x}B_o \sin \frac{2\pi}{\lambda}(y - vt) \quad (4.36)$$

Οποιαδήποτε χρονική στιγμή η ενέργεια του H/M κύματος σε ένα απειροστό όγκο dV του κενού δίνεται από την σχέση η οποία προκύπτει από τις (4.33), (4.34)

$$\left[\left(\epsilon_o E^2 / 2 \right) + \left(B^2 / 2\mu_o \right) \right] dV \quad (4.37)$$

όπου E και B είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στον όγκο αυτό την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Θα υποθέσουμε ότι η ενέργεια του H/M κύματος διαδίδεται στην κατεύθυνση κίνησης του H/M κύματος.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το τετράγωνο του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου δίνονται από τις σχέσεις

$$E^2 = E_o^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} y \quad (4.38)$$

$$B^2 = \left(\frac{E_o^2}{c^2} \right) \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} y$$

Από σχέσεις (4.33), (4.34) και (4.38) προκύπτει ότι η ενεργειακή πυκνότητα αυτού του H/M κύματος δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\varepsilon_o}{2} \left(E_o^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} y + E_o^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \quad (4.39)$$

Από εξίσωση (4.39) μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η μέση ενεργειακή πυκνότητα είναι ίση με

$$\varepsilon_o \frac{E_o^2}{2} \quad (4.40)$$

Η εξίσωση (4.40) μας πληροφορεί ότι σε ένα H/M κύμα η στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο ισούται με την στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως η ενέργεια του H/M οφείλεται σε ισόποσες συνεισφορές από το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Επομένως η (4.39) και βάση του προηγούμενου συμπεράσματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή γράφεται ως

$$u = \varepsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o} \quad (4.41)$$

Από την (4.40) μπορούμε να υπολογίσουμε και τον μέσο ρυθμό της ενέργειας του H/M κύματος που ρέει μέσα από ένα ‘παράθυρο’ μοναδιαίας επιφάνειας. Ο ρυθμός αυτός είναι ίσος με

$$S_{av} = I = \varepsilon_o \frac{E_o^2 c}{2} \quad (4.42)$$

Μπορούμε να πούμε ότι η μέση ροή ενέργειας πάνω στην μονάδα της επιφάνειας δίνεται από την πυκνότητα ισχύος ή διάνυσμα Poynting S και είναι ίση με

$$S_{av} = \frac{\overline{E^2}}{\sqrt{\mu_o / \varepsilon_o}} \quad (4.43)$$

όπου $\overline{E^2}$ είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που είναι $\frac{E_o^2}{2}$ για το ημιτονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Το διάνυσμα Poynting μπορούμε να το συναντήσουμε και στην παρακάτω μορφή

$$S = \frac{1}{\mu_o} E \times B \quad (4.44)$$

Με άλλα λόγια

Το μέτρο του διανύσματος Poynting περιγράφει τον ως προς τον χρόνο ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διαρρέει μια μοναδιαία επιφάνεια που είναι κάθετη προς την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Η κατεύθυνση του S είναι προς την κατεύθυνση διάδοσης του H/M κύματος. Στο S.I. το διάνυσμα Poynting έχει μονάδα μέτρησης το W/m².

4.6 Ορμή και Πίεση ακτινοβολίας

Τα H/M κύματα δεν μεταφέρουν μονάχα ενέργεια άλλα και ορμή. Για αυτό τον λόγο όταν ένα H/M κύμα προσπέσει πάνω σε μια επιφάνεια ασκεί πάνω της πίεση, η οποία ονομάζεται πίεση ακτινοβολίας.

Ο Maxwell απέδειξε ότι η ολική ορμή p με την οποία το H/M κύμα προσκρούει στην επιφάνεια ισούται με

$$p = \frac{U}{c} \quad (4.45)$$

όπου U είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από το H/M κύμα μέσα σε χρόνο t. Η σχέση (4.45) ισχύει για την περίπτωση που το H/M κύμα θα απορροφηθεί ολικός.

Η πίεση ακτινοβολίας P που ασκεί πάνω στην επιφάνεια το H/M κύμα συνδέεται με το διάνυσμα Poynting S και δίνεται από την σχέση

$$P = \frac{S}{c} \quad (4.46)$$

και η (4.46) ισχύει για την περίπτωση της πλήρους απορρόφησης.

Στην περίπτωση της τέλει ανάκλασης οι σχέσεις (4.45), (4.46) γράφονται ως εξής

$$p = \frac{2U}{c} \quad (4.47)$$

και

$$P = \frac{2S}{c} \quad (4.48)$$

Μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό ότι η ορμή που μεταφέρεται από ένα Η/Μ κύμα προς μια επιφάνεια παίρνει τιμές μεταξύ U/c και $2U/c$ ανάλογα με τις ιδιότητες της επιφάνειας.

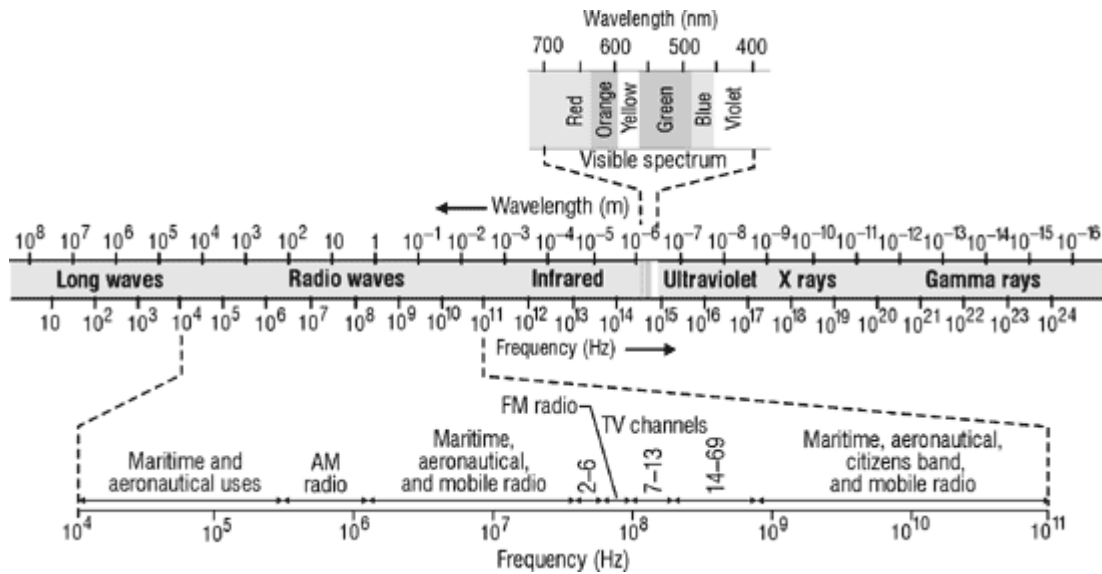
4.7 Το Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στο κενό ικανοποιούν την σχέση

$$c = f\lambda \quad (4.49)$$

όπου f είναι η γραμμική συχνότητα της ακτινοβολίας και λ είναι το μήκος κύματος του Η/Μ κύματος.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας πίνακας που απεικονίζονται τα αδιάφορα είδη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.



Σχήμα 4-6: Το Η/Μ φάσμα (από διαδίκτυο)

Θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή της κάθε φασματικής περιοχής.

Ραδιοκύματα:

Δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα. Χρησιμοποιούνται στο ραδιόφωνο και την τηλεόραση.

Μικροκύματα:

Το μήκος κύματος του εκτείνεται από τα 30 cm μέχρι το 1 mm. Παράγονται από ηλεκτρονικά κυκλώματα και χρησιμοποιούνται στα συστήματα radar και στην μελέτη των ατομικών και μοριακών ιδιοτήτων χάρη στο μικρό μήκος κύματος τους. Εφαρμογή των μικροκυμάτων είναι οι φούρνοι μικροκυμάτων.

Υπέρυθρα κύματα

Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής εκτείνεται από 1 mm έως 7×10^{-7} m. Τα κύματα αυτά εκπέμπονται από διάφορα θερμά σώματα. Η ακτινοβολία αυτή απορροφάτε από τα περισσότερα σώματα.

Το ορατό φως

Το ορατό φάσμα της ακτινοβολίας εκτείνεται από τα 4×10^{-7} m έως τα 7×10^{-7} m. Είναι το κομμάτι της Η/Μ ακτινοβολίας που αντιλαμβάνεται ο ανθρώπινος οφθαλμός.

Υπεριώδης ακτινοβολία

Η ακτινοβολία αυτή καλύπτει την περιοχή από 3.8×10^{-7} m περίπου έως 6×10^{-8} m. Ο Ήλιος είναι η κύρια πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας. Το μεγαλύτερο μέρος της βλαβερής για τον ανθρώπινο οργανισμό υπεριώδης ακτινοβολίας του Ήλιου απορροφάτε από τα άτομα και τα μόρια στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Η υπεριώδης ακτινοβολία αντιδρά με το οξυγόνο της στρατόσφαιράς και έτσι παράγεται το μόριο του όζοντος (O_3). Το στρώμα του όζοντος μετατρέπει την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία σε θερμότητα αυξάνοντας έτσι την θερμοκρασία της στρατόσφαιρας.

Ακτίνες X

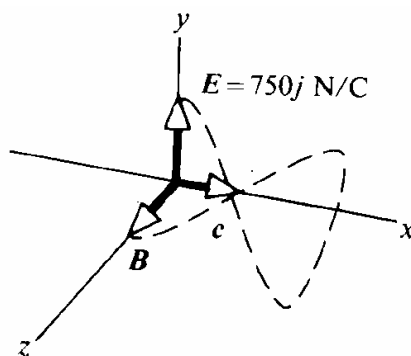
Το φάσμα των ακτίνων X είναι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκτείνεται από 10^{-8} έως 10^{-13} m. Η πιο κοινή πηγή ακτίνων x είναι από επιβράδυνση ταχέων κινούμενων ηλεκτρονίων καθώς προσκρούουν πάνω σε έναν μεταλλικό στόχο. Έχουν σημαντικές εφαρμογές στην Ιατρική.

Ακτίνες γ

Εκπέμπεται από ραδιενεργούς πυρήνες και σε αντιδράσεις πυρήνων και στοιχειωδών πυρήνων ή ακόμα και διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Τα μήκη κύματος τους είναι από 10^{-10} m έως 10^{-14} m. Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν τους οργανισμούς που τις απορροφούν. Οι εργαζόμενοι σε χώρους παραγωγής της ακτινοβολίας γ πρέπει να φοράνε ειδικές προστατευτικές στολές..

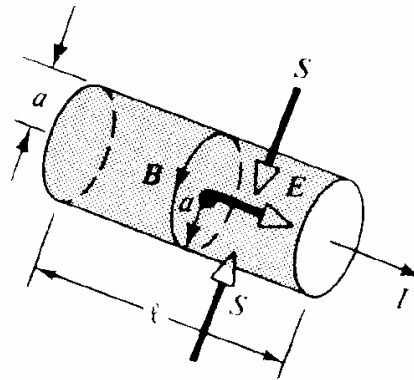
4.8 Επαναληπτικές Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Ένα αρμονικό επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, συχνότητας 40 MHz, διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση x όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε κάποιο σημείο, μια δεδομένη στιγμή το ηλεκτρικό πεδίο E έχει την μέγιστη τομή των 750 N/C και είναι παράλληλο προς τον άξονα y . (α) Υπολογίστε το μήκος και την περίοδο του κύματος, (β) Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου B , εάν $E = 750j \text{ N/C}$.



Ασκ.1

2. Μια σημειακή πηγή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας παρέχει ισχύ εξόδου $P = 800 \text{ W}$. Υπολογίστε την μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο που απέχει 3.5 m από την πηγή.
3. Ο Ήλιος παρέχει στη επιφάνεια της Γης 1000 περίπου W/m^2 στο ορατό μέρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. (α) Υπολογίστε την ολική ισχύ που προσπίπτει σε οροφή διαστάσεων σε οροφή διαστάσεων $8 \text{ m} \times 20 \text{ m}$. (b) Εάν υποτεθεί ότι η οροφή είναι τέλειος απορροφητής, υπολογίστε την πίεση της ακτινοβολίας καθώς και την δύναμη που ασκεί η ακτινοβολία επάνω στην οροφή.
4. Ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα αντίστασης R ακτίνας a και μήκους l διαρέεται από σταθερό ρεύμα I όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting.



Ασκ. 4

5. Ένα laser He-Ne που χρησιμοποιείται για εκπαιδευτικούς σκοπούς λειτουργεί σε μια τυπική ισχύ των $P = 5\text{ mW}$. (α) Προσδιορίστε την μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο, όπου η κάθετος διατομή της δέσμης είναι 4 mm^2 . (β) Υπολογίστε την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που περιέχεται σε μήκος 1 m της δέσμης.
6. Θεωρήστε ότι έχουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεδομένης ενέργειας. Γιατί η πίεση ακτινοβολίας είναι 2 φορές μεγαλύτερη όταν ανακλάται εντελώς από μια επιφάνεια παρά όταν απορροφάτε εντελώς ;
7. Θα παραχθεί ένα H/M κύμα εάν συνδεθεί με μια μπαταρία;
8. Υπολογίστε την μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου ενός H/M κύματος όταν η μετρηθείς τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο και την ίδια στιγμή είναι ίση με 5.3 mV/m .
9. Επαληθεύσετε ότι οι εξισώσεις για το E και το B είναι λύσεις των εξισώσεων (4.20)

$$E = \frac{A}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} e^{a(x-ct)}$$

$$B = A e^{a(x-ct)}$$

10. Ένα ραδιοφωνικό κύμα μεταφέρει 25 W/m^2 ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας.

Μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A είναι κάθετος προς την διεύθυνση

διάδοσης του κύματος. Υπολογίστε την πίεση ακτινοβολίας στην επιφάνεια, αν αυτή είναι τέλειος απορροφητής.

11. Ποιο είναι το μήκος κύματος ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό, αν έχει συχνότητα (α) 5×10^{19} , (β) 4×10^9 Hz.

12. Ξεκινώντας από την διαφορική μορφή των εξισώσεων του Maxwell να φθάσετε στην ολοκληρωτική τους μορφή.

13. Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x,t) = \frac{Ae^{(x-ct)}}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \hat{y}$ και το μαγνητικό πεδίο

$\vec{B}(x,t) = Ae^{(x-ct)} \hat{z}$. Εξηγήστε αν οι συναρτήσεις αυτές περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα.