



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

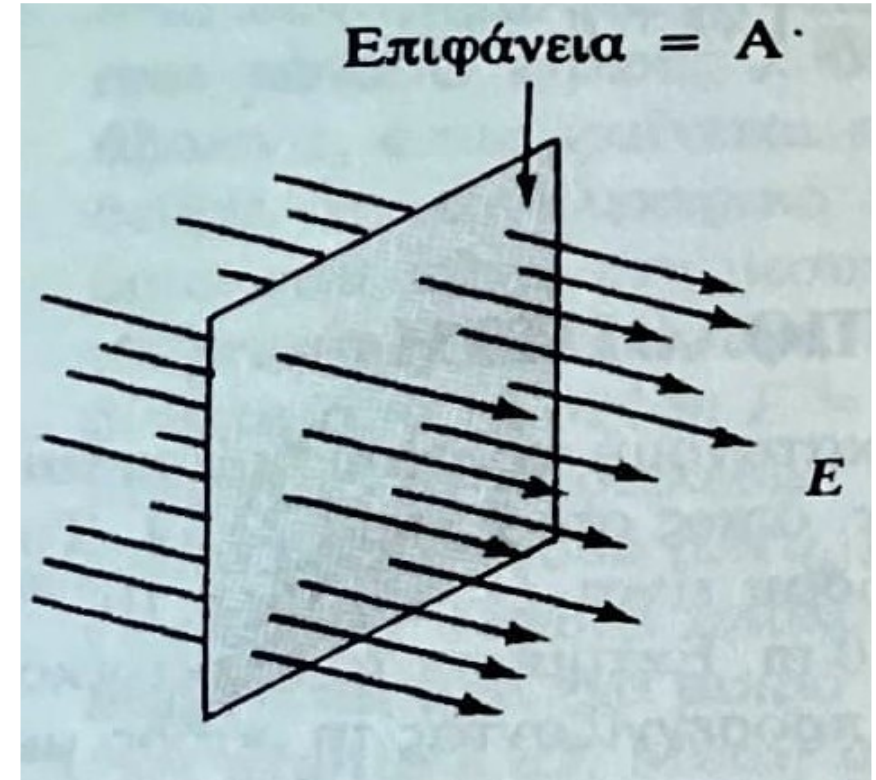
Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

2. Ο νόμος του Gauss

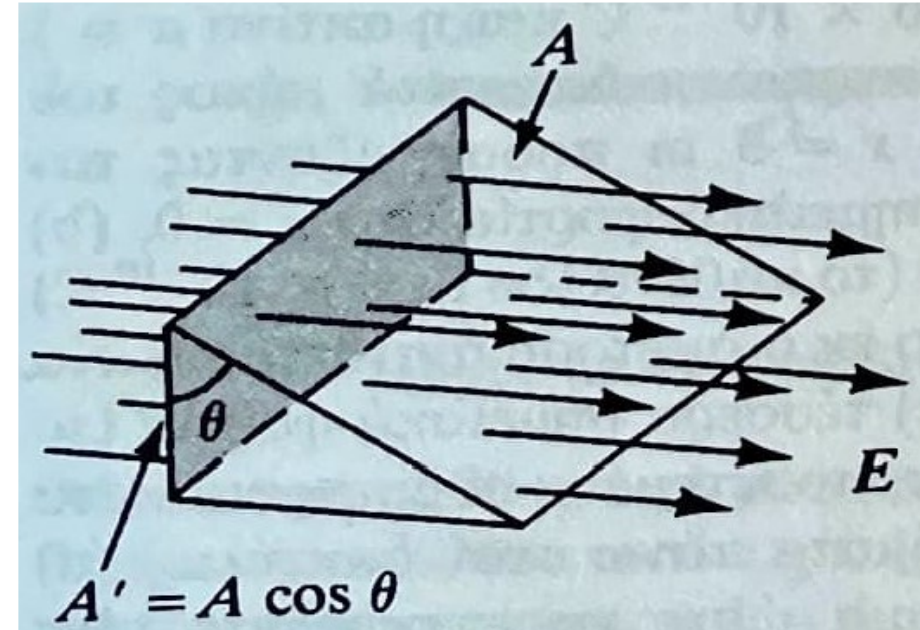
2.1 Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

- Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε ποιοτικά την έννοια των δυναμικών γραμμών
- Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την ποσοτική περιγραφή των δυναμικών γραμμών
- Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι το μέτρο που περιγράφει τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που περνούν από μια επιφάνεια
- Όταν η επιφάνεια περικλείει ηλεκτρικό φορτίο, ο αριθμός που τη διαπερνούν είναι ανάλογος με το εγκλωβισμένο φορτίο
- Ο αριθμός των γραμμών είναι ανεξάρτητος από την επιφάνεια που περιέχει το φορτίο
- Έστω ένα ομογενές (σε μέτρο και κατεύθυνση) ηλ. πεδίο (δείτε σχήμα στα δεξιά)
- Οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την ορθογώνια επιφάνεια A , που είναι κάθετη στο πεδίο
- Ο αριθμός των γραμμών που διαπερνούν μια κάθετη προς αυτές επιφάνεια είναι ανάλογος με το μέτρο του ηλ. πεδίου
- Άρα ο συνολικός αριθμός των γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια A είναι ανάλογος με το γινόμενο EA
- Αυτό το γινόμενο της έντασης του ηλ. πεδίου επί το εμβαδόν A μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στο πεδίο ονομάζεται ηλεκτρική ροή Φ
- $\Phi = EA$ με μονάδες Nm^2/C



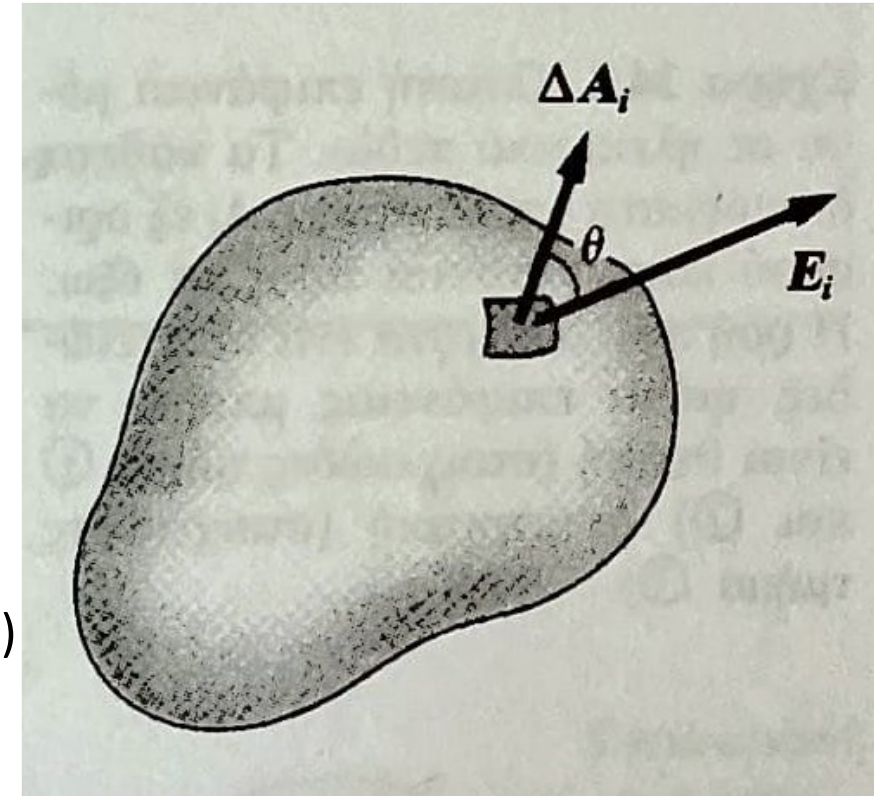
2.1 Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

- Αν η επιφάνεια που εξετάζουμε δεν είναι κάθετη στις γραμμές του ηλ. πεδίου (σχήμα), τότε η ηλεκτρική ροή είναι μικρότερη από αυτή που μας δίνει η εξίσωση $\Phi = EA$
- Σε τέτοια περίπτωση, όπου η επιφάνεια έχει γωνία θ με την κάθετη επιφάνεια προς τις γραμμές του ηλ. πεδίου, για να υπολογίσουμε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου θα πρέπει πρώτα να βρούμε την προβολή της στο επίπεδο που είναι κάθετο με το ηλ. πεδίο:
- $A' = A \cos \theta$
- Εφόσον ο αριθμός των γραμμών που διαπερνούν τις δύο επιφάνειες είναι ίσος, συμπεραίνουμε ότι: $\Phi = EA \cos \theta$
- Άρα έχουμε μέγιστη ροή που διαπερνά μια σταθερή επιφάνεια όταν η επιφάνεια αυτή είναι κάθετη στη διεύθυνση της έντασης του ηλ. πεδίου
- Στην αντίθετη περίπτωση όπου η επιφάνεια είναι παράλληλη με την ένταση του ηλ. πεδίου, τότε η ροή είναι μηδενική



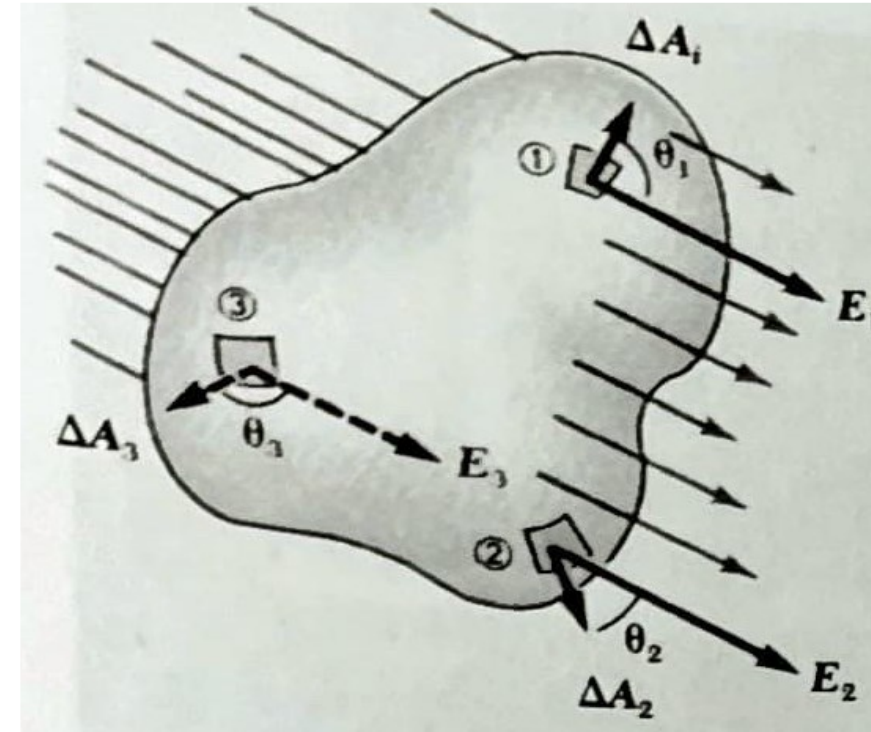
2.1 Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

- Όταν έχουμε μια επιφάνεια με μη συμμετρικό σχήμα, τότε το ηλ. πεδίο δεν τέμνει την επιφάνεια κατά την ίδια γωνία παντού
- Όμως αν χωρίσουμε την επιφάνεια σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών στοιχείων με επιφάνεια ΔA , τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλ. πεδίου που το διαπερνά είναι σταθερό
- Ορίζουμε τώρα ένα διάνυσμα $\Delta \mathbf{A}_i$, του οποίου το μέτρο συμβολίζει την επιφάνεια του μικρού στοιχείου και του οποίου η διεύθυνση είναι εξ ορισμού κάθετη προς το μικρό στοιχείο
- Έτσι εξ ορισμού, η ροή $\Delta \Phi_i$ του ηλ. πεδίου $\mathbf{E}_i$ που διαπερνά το μικρό στοιχείο επιφάνειας ΔA_i , είναι: $\Delta \Phi_i = E_i \Delta A_i \cos \theta = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i$
- ❖ Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$)
- Οπότε αν αθροίσουμε τη ροή που διέρχεται μέσα από όλα τα μικρά στοιχεία, τότε θα βρούμε τη συνολική ροή που διέρχεται μέσα από όλη την επιφάνεια
- Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια κάθε μικρού στοιχείου είναι απειροστά μικρή και τείνει στο 0, τότε ο αριθμός των μικρών στοιχείων τείνει στο άπειρο, άρα έχουμε: $\Phi \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_{\text{επιφάνεια}} \mathbf{E} d\mathbf{A}$
- Άρα βλέπουμε ότι η τιμή της ροής δεν εξαρτάται μόνο από το ηλ. πεδίο αλλά και από την επιφάνεια



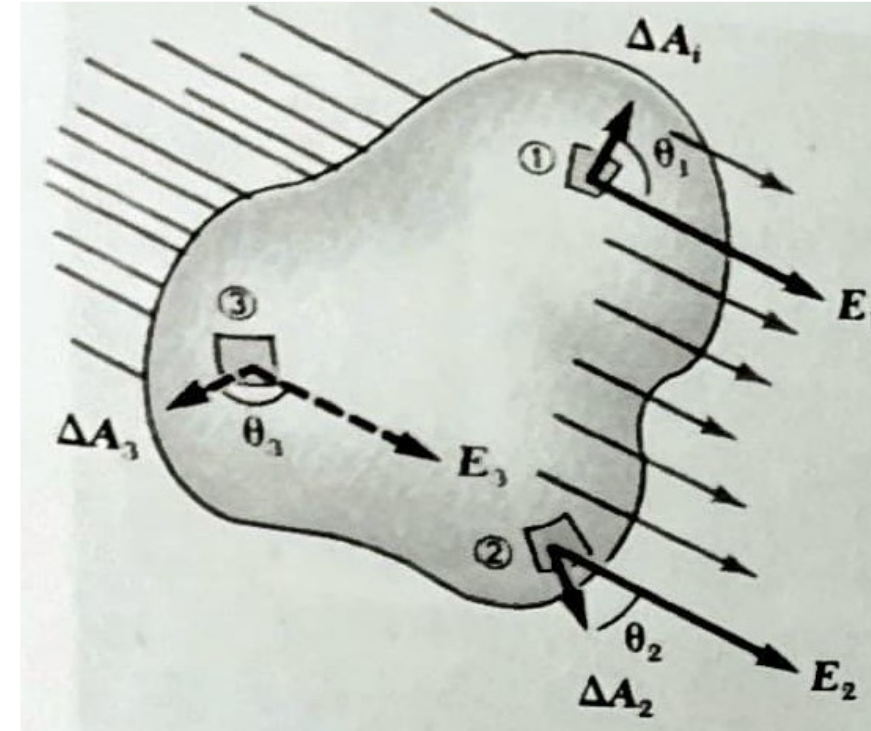
2.1 Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

- Συνήθως μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια
- Κλειστή επιφάνεια ορίζεται αυτή που χωρίζει το χώρο σε δύο περιοχές, μια εσωτερική και μια εξωτερική, πχ η επιφάνεια μια σφαίρας.
- Παρατηρούμε ότι τα διάφορα διανύσματα $\Delta \mathbf{A}_i$ έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.
- Πάντα είναι κάθετα προς το μικρό στοιχείο επιφάνειας και πάντα κατευθύνονται προς τα έξω, άρα απομακρύνονται από την επιφάνεια
- Στα μικρά στοιχεία επιφάνειας (1) και (2), το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνίες $\theta < 90^\circ$ με τις αντίστοιχες καθέτους των μικρών στοιχείων επιφάνειας, άρα η ροή εκεί είναι θετική και το ηλ. πεδίο κατευθύνεται προς τα έξω
- Στο μικρό στοιχείο επιφάνειας (3), το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία $\theta > 90^\circ$ με την αντίστοιχη κάθετο του μικρού στοιχείου επιφάνειας, άρα η ροή εκεί είναι αρνητική και το ηλ. πεδίο κατευθύνεται προς την επιφάνεια (δεν την διαπερνά)
- Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια, είναι ανάλογη με τον ολικό αριθμό των γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια



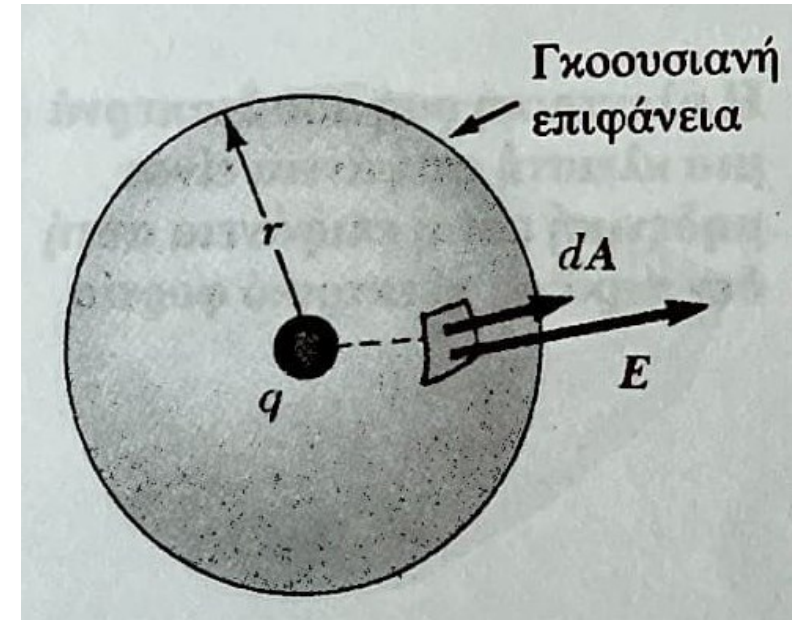
2.1 Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

- Άρα ο ορισμός του ολικού αριθμού, είναι η διαφορά του αριθμού των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον τον αριθμό των γραμμών που εισέρχονται στην επιφάνεια
- Εάν από την επιφάνεια εξέρχονται περισσότερες γραμμές από όσες εισέρχονται τότε η ροή είναι θετική
- Εάν εισέρχονται περισσότερες από όσες εξέρχονται, τότε η ροή είναι αρνητική
- Το ολοκλήρωμα πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια (ή κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα) το συμβολίζουμε με $\oint$
- Άρα η ολική ροή Φ_c δια μέσω μιας κλειστής επιφάνειας είναι:
$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint E_n dA$$
, όπου E_n η συνιστώσα του ηλ. πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια
- Ο υπολογισμός είναι γενικά πολύ περίπλοκος, όμως σε αυτό το μάθημα ο υπολογισμός είναι εύκολος αφού θεωρούμε ηλ. πεδίο σταθερό σε μέτρο και κάθετο σε κάθε σημείο της επιφάνειας



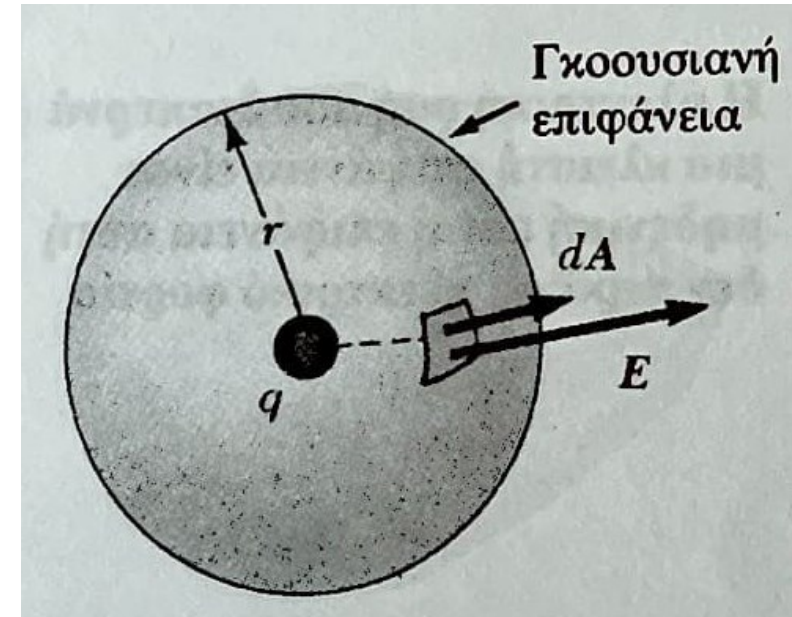
2.2 Ο νόμος του Gauss

- Ο νόμος αυτός συνδέει την ηλεκτρική ροή που διαπερνά κλειστή επιφάνεια, με το ηλεκτρικό φορτίο που περιέχεται σε αυτή την επιφάνεια
- Έστω ότι σημειακό φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
- Από νόμο Coulomb, γνωρίζουμε ότι πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας το φορτίο δημιουργεί ηλ. πεδίο μέτρου $E=kq/r^2$
- Γνωρίζουμε επίσης ότι οι ηλεκτρικές γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω, άρα είναι κάθετες σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας που διαπερνούν
- Άρα σε κάθε σημείο το $\mathbf{E}$ είναι παράλληλο προς το αντίστοιχο διάνυσμα $\Delta\mathbf{A}_i$ που αντιπροσωπεύει το μικρό στοιχείο της επιφάνειας της σφαίρας ΔA_i
- Άρα ισχύει: $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}_i = E_n \Delta A_i = E \Delta A_i$
- Συνεπώς βρίσκουμε ότι η καθαρή ροή μέσω της γκαουσιανής επιφάνειας είναι: $\Phi_c = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA$
- Το μέτρο του ηλ. πεδίου είναι σταθερό στην γκαουσιανή επιφάνεια, έτσι βγαίνει από το ολοκλήρωμα



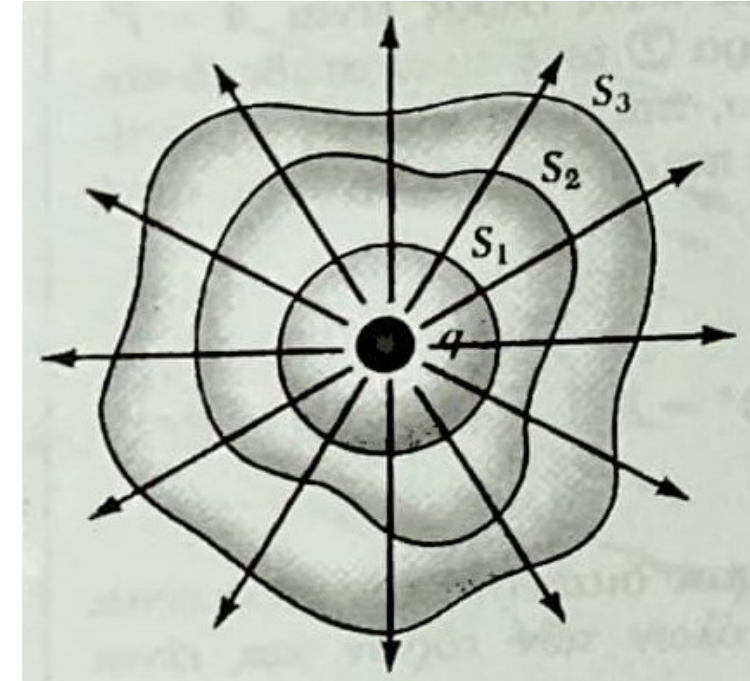
2.2 Ο νόμος του Gauss

- Γνωρίζουμε ότι εφόσον η γκαουσιανή επιφάνεια είναι σφαίρα, τότε το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα ισούται με την επιφάνεια της:
 $\oint dA = A = 4\pi r^2$
- Άρα $\Phi_c = E \oint dA = k \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi kq$
- Όμως το $k=1/4\pi\epsilon_0$, άρα $\Phi_c = \frac{q}{\epsilon_0}$
- **Σημείωση:** η ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια σφαίρα είναι ανεξάρτητη της απόστασης r και είναι ανάλογη του φορτίου που αυτή περιέχει.



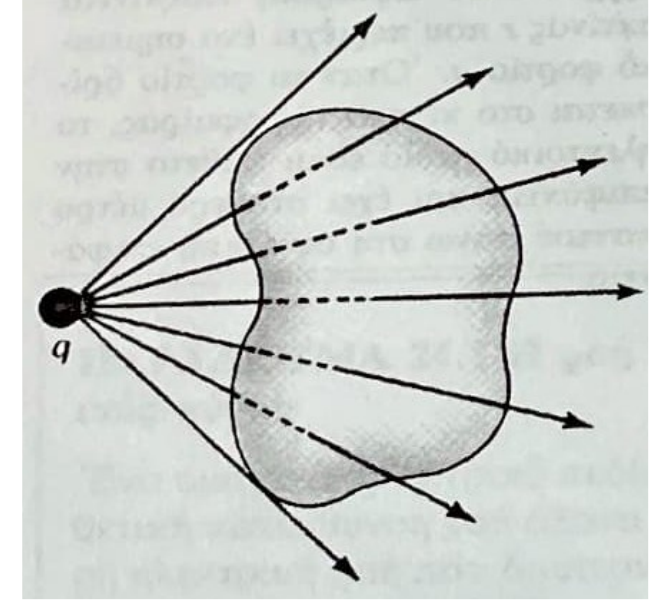
2.2 Ο νόμος του Gauss

- Έστω διάφορες κλειστές επιφάνειες που περιέχουν φορτίο q (δείτε σχήμα)
- Η επιφάνεια S_1 είναι σφαιρική ενώ οι S_2 και S_3 δεν είναι
- Η ροή της S_1 είναι q/ϵ_0
- Έχουμε εξηγήσει ήδη ότι η ροή είναι ανάλογη με τον αριθμό των γραμμών ηλ. πεδίου που την διαπερνούν
- Όπως φαίνεται στο σχήμα ο αριθμός των γραμμών που διαπερνά την S_1 είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών που διαπερνά την S_2 και S_3 (οι οποίες δεν είναι σφαιρικές)
- Έτσι συμπεραίνουμε ότι η καθαρή ροή μέσω μιας κλειστής επιφάνειας είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της επιφάνειας
- Άρα όταν μια επιφάνεια έχει φορτίο q , η ολική ροή δια μέσω αυτής της επιφάνειας είναι q/ϵ_0



2.2 Ο νόμος του Gauss

- Τώρα στην περίπτωση που σημειακό φορτίο βρίσκεται εκτός από μια κλειστή επιφάνεια τυχαίου σχήματος, κάθε γραμμή που εισέρχεται στην επιφάνεια αυτή στη συνέχεια εξέρχεται
- Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια που δεν έχει φορτίο είναι μηδενική



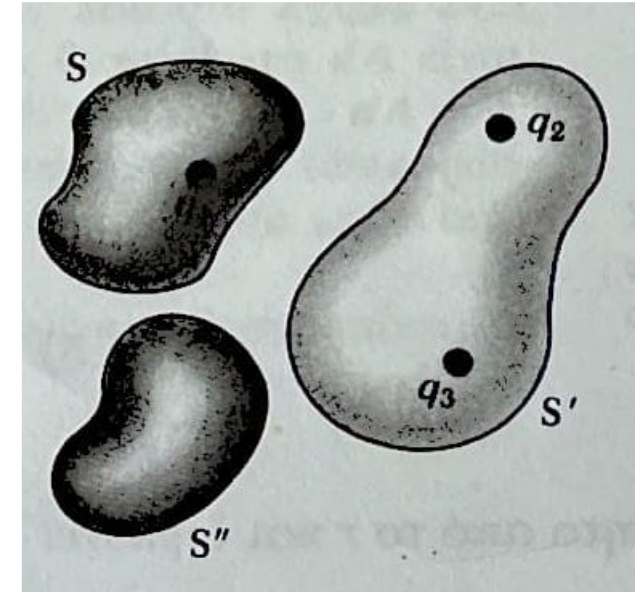
2.2 Ο νόμος του Gauss

- Στην περίπτωση που έχουμε πολλά σημειακά φορτία ή συνεχή κατανομή φορτίου, θα χρησιμοποιούμε την αρχή της επαλληλίας (διανυσματικό άθροισμα) για να υπολογίσουμε την ολική ροή
- Η ολική ροή που περνά από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια:

$\Phi_c = \oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) d\mathbf{A}$, όπου $\mathbf{E}$ το συνισταμένο ηλ. πεδίο και $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ και $\mathbf{E}_3$ είναι τα πεδία που δημιουργούνται από ξεχωριστά φορτία q_1 , q_2 και q_3

- Ας εξετάσουμε τώρα τις τρεις επιφάνειες:

- 1) Η επιφάνεια S έχει ένα φορτίο το q_1 , άρα η ροή που την διαπερνά είναι q_1/ϵ_0
- 2) Η επιφάνεια S' έχει δύο φορτία το q_1 και q_2 , άρα η ροή που την διαπερνά είναι $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$
- 3) Η επιφάνεια S'' έχει μηδενική ροή αφού δεν περιέχει κανένα φορτίο.
Δηλαδή όλες οι δυναμικές γραμμές που εισέρχονται σε αυτή, στη συνέχεια εξέρχονται από αυτή



2.2 Ο νόμος του Gauss

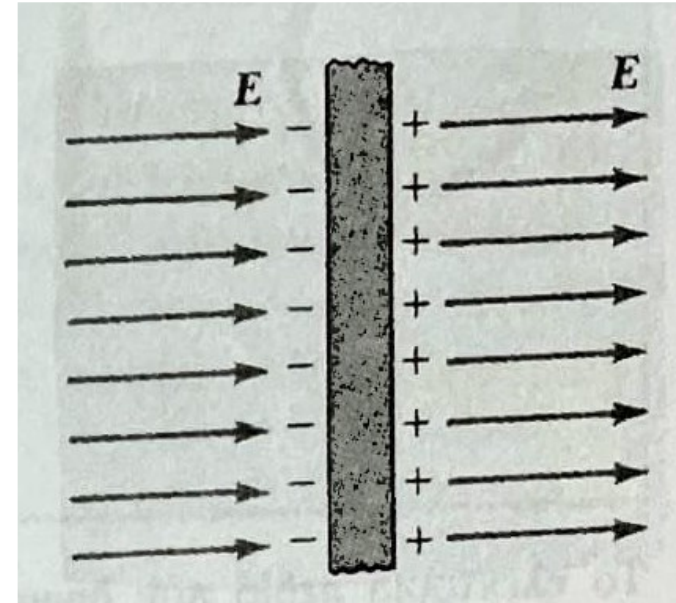
- Γενικεύοντας όλα τα προηγούμενα, ο νόμος του Gauss ορίζει ότι η ολική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια είναι: $\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$, όπου q_{in} είναι το ολικό ηλ. φορτίο (αλγεβρικό άθροισμα) που περιέχεται σε αυτή την επιφάνεια και $\mathbf{E}$ το ηλ. πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας
- Άρα ο νόμος του Gauss ορίζει ότι η ολική ηλ. ροή που διαπερνά μια κλειστή γκαουσιανή επιφάνεια ισούται με το πηλίκο του ολικού φορτίου που περιέχει η επιφάνεια αυτή, διαιρεμένου με την διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 .
- **Προσοχή:** το q_{in} είναι το ολικό φορτίο μέσα στην γκαουσιανή επιφάνεια, ενώ το $\mathbf{E}$ είναι το ολικό ηλ. πεδίο που παράγεται από φορτία που βρίσκονται μέσα και έξω από την γκαουσιανή επιφάνεια.
- Η γκαουσιανή επιφάνεια είναι ένα μαθηματικό κατασκεύασμα

2.3 Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

- Οι καλοί αγωγοί του ηλεκτρισμού (πχ χαλκός) έχουν ηλεκτρόνια που κινούνται ελεύθερα μέσα τους.
- Όταν δεν υπάρχει κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων προς μια ορισμένη κατεύθυνση μέσα στον αγωγό, τότε ο αγωγός λέμε ότι βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία
- Ένας αγωγός που ισορροπεί ηλεκτροστατικά έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
 - 1) Παντού στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν
 - 2) Όλο το πλεόνασμα ηλεκτρικού φορτίου βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού
 - 3) Το ηλ. πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο ίσο με σ/ϵ_0 , όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην περιοχή αυτή
 - 4) Εάν ο αγωγός έχει ακανόνιστο σχήμα, το πεδίο τείνει να συσσωρεύεται στα σημεία που η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μικρότερη (ακίδες ή αιχμηρά σημεία)

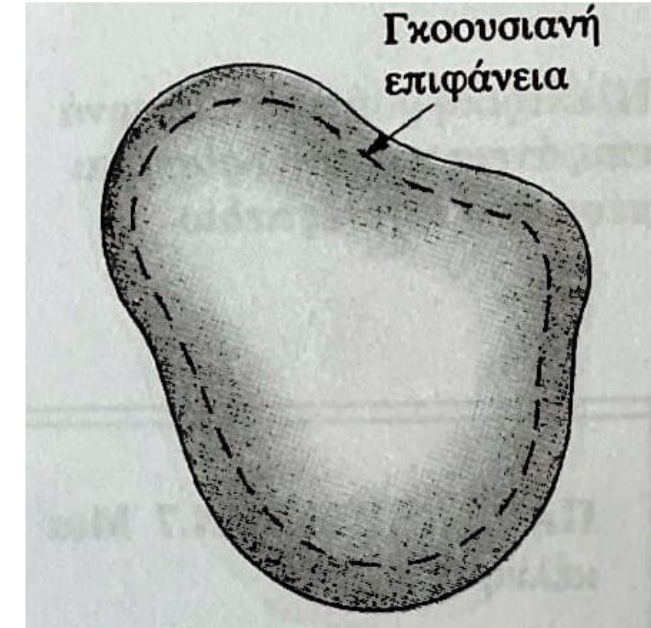
2.3 Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

- Για να κατανοήσουμε την πρώτη ιδιότητα, ας θεωρήσουμε ότι αγώγιμη πλάκα βρίσκεται μέσα σε ηλ. πεδίο E
- Όταν υπάρχει ηλ. ισορροπία, το E μέσα στον αγωγό είναι μηδέν, διαφορετικά τα ηλεκτρόνια θα επιταχύνονταν από το ηλ. πεδίο
- Πριν εφαρμοστεί το εξωτερικό ηλ. πεδίο, τα ηλεκτρόνια είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ολόκληρο τον αγωγό.
- Όταν εφαρμοστεί το πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επιταχύνονται, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επιταχύνονται προς τα αριστερά, δημιουργώντας εκεί ένα καθαρό αρνητικό φορτίο.
- Αντίθετα στη δεξιά μεριά, δημιουργείται πλεόνασμα θετικών φορτίων λόγω της μετακίνησης των αρνητικών φορτίων προς τα αριστερά
- Έτσι τα φορτία αυτά δημιουργούν ένα εσωτερικό ηλ. πεδίο, που αντιτίθεται στο εξωτερικό
- Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου αυξάνεται μέχρις ότου το μέτρο του ηλ. πεδίου που παράγουν τα φορτία μέσα στον αγωγό γίνει ίσο με το εξωτερικό πεδίο, και έτσι το ολικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι μηδέν
- Σε ένα καλό αγωγό η διαδικασία αυτή γίνεται μέσα σε $10^{-16}s$, και μετά επέρχεται στατική ισορροπία



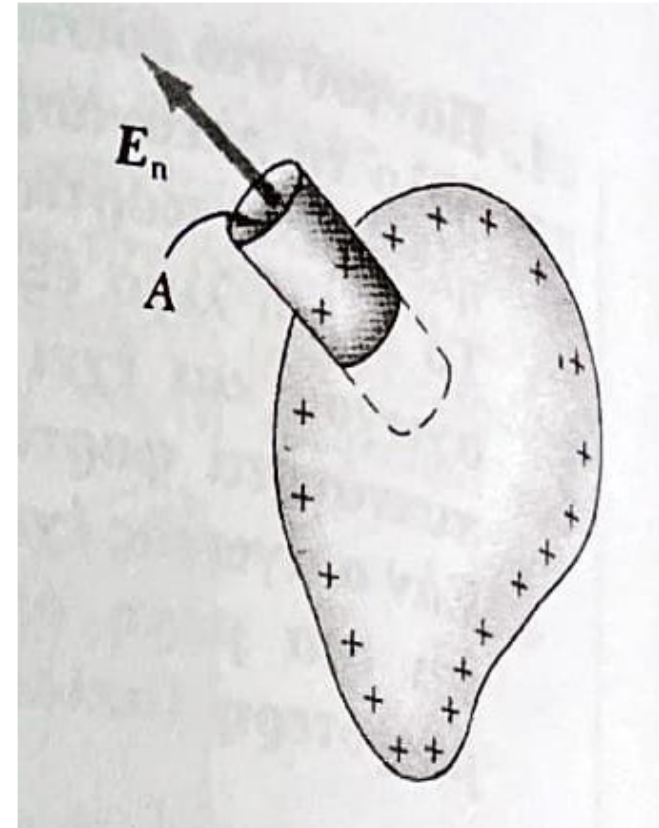
2.3 Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

- Την 2^η και 3^η ιδιότητα θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss
- Στο σχήμα φαίνεται αγωγός ακανόνιστου σχήματος
- Χαράσουμε γκαουσιανή επιφάνεια κοντά στην επιφάνεια του αγωγού
- Όταν υπάρχει ηλεκτροστατική ισορροπία, το πεδίο είναι μηδενικό στο εσωτερικό του αγωγού και άρα το πεδίο είναι μηδενικό πάνω στην γκαουσιανή επιφάνεια. Συνεπώς η ηλεκτρική ροή που την διαπερνά είναι μηδέν
- Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss, καταλήγουμε ότι το καθαρό φορτίο που εγκλωβίζεται από την επιφάνεια είναι μηδέν
- Άρα το καθαρό φορτίο των ηλεκτροστατικά ισορροπούμενων αγωγών μπορεί να βρίσκεται μόνο στην επιφάνεια τους



2.3 Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να συνδέσουμε το ηλ. πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό με την κατανομή φορτίου πάνω στον αγωγό
- Έστω ένα κύλινδρος του οποίου οι βάσεις είναι παράλληλες με την επιφάνεια ενός αγωγού τον οποίο τέμνει
- Η ροή που διαπερνά τη μέσα βάση του κυλίνδρου είναι μηδενική αφού $\mathbf{E}=\mathbf{0}$
- Στην έξω μεριά της επιφάνειας το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, αφού αν έχει συνιστώσα παράλληλη προς την επιφάνεια, τότε τα ηλεκτρόνια θα επιταχύνονταν και δεν θα υπήρχε ηλεκτροστατική ισορροπία.
- Επομένως όλο το πεδίο ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι κάθετο στην εξωτερική του επιφάνεια
- Η καθαρή ροή που διαπερνά την γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια είναι $E_n A$, όπου E_n είναι το πεδίο που υπάρχει κοντά στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού και A το εμβαδόν βάσης του κυλίνδρου.
- Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss: $\Phi_c = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$, το φορτίο μέσα στη γκαουσιανή επιφάνεια είναι $q_{in} = \sigma A$. Άρα $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 2

- ✓ Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου
- ✓ Ο νόμος του Gauss
- ✓ Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Ερωτήσεις;