



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

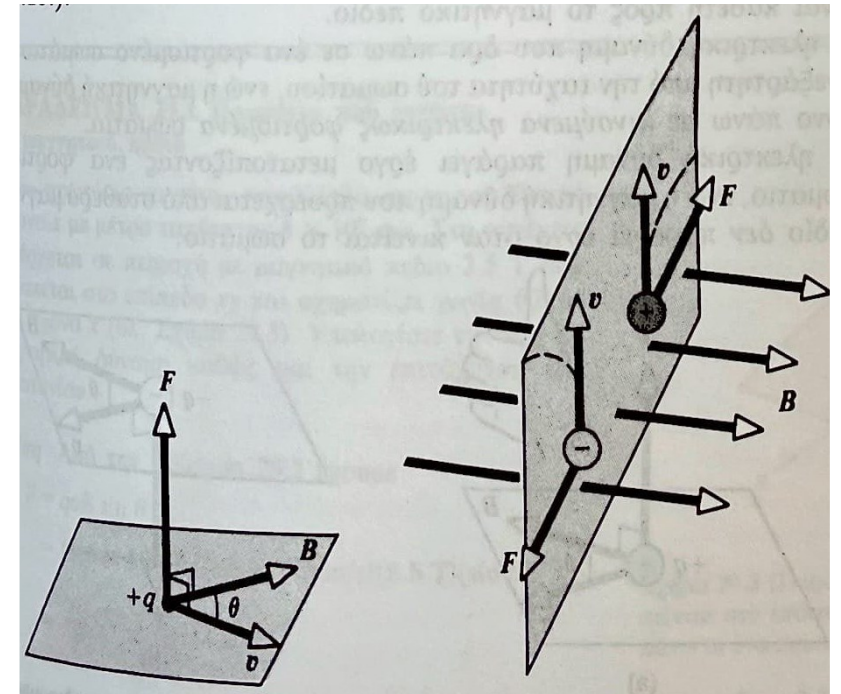
7. Μαγνητικά Πεδία

7.1 Εισαγωγή

- Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις δυνάμεις που ασκούν τα μαγνητικά πεδία σε κινούμενα φορτία ή σε σύρματα που διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα

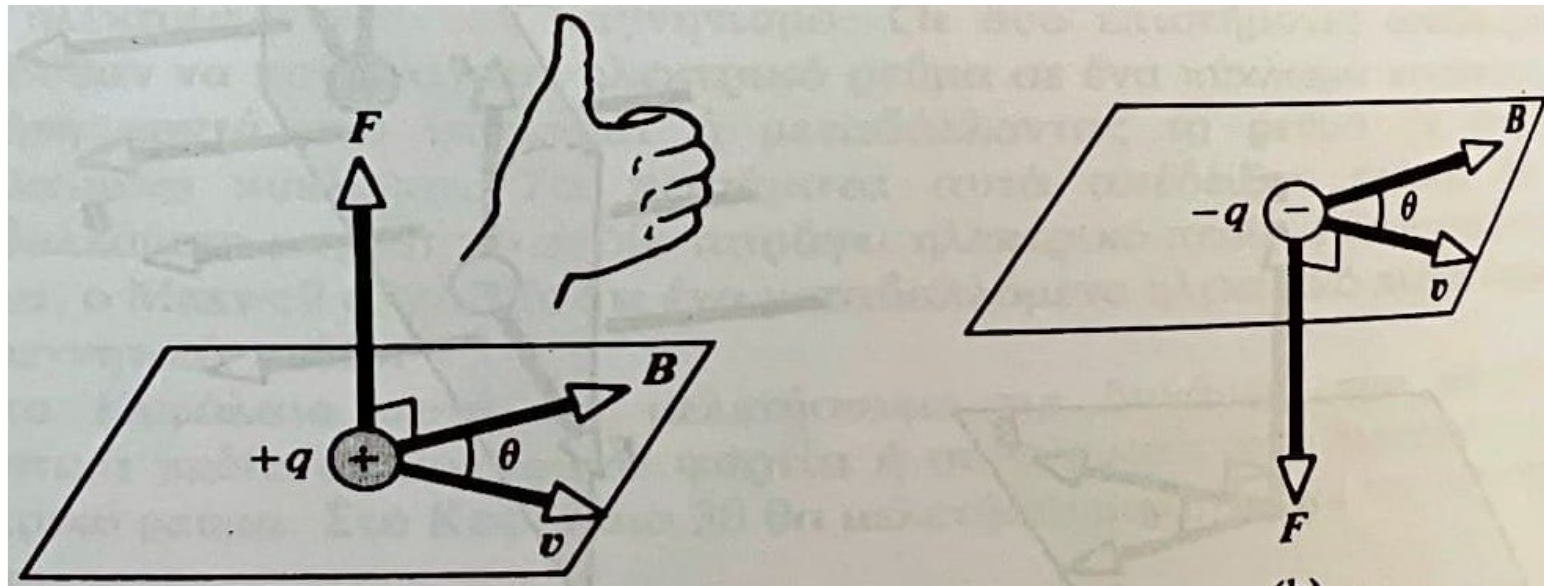
7.2 Ορισμός και ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου

- Ορίζουμε το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ σε κάποιο σημείο του χώρου χρησιμοποιώντας τη μαγνητική δύναμη την οποία υφίσταται κάποιο κατάλληλο δοκιμαστικό αντικείμενο
- Το δοκιμαστικό αυτό αντικείμενο είναι ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$
- Πειράματα ακριβείας κατά τα οποία μελετήθηκε η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο έδωσαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:
 - 1) Η μαγνητική δύναμη είναι ανάλογη με το φορτίο q και την ταχύτητα του σωματιδίου
 - 2) Το μέτρο και η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης εξαρτάται από το διάνυσμα της ταχύτητα του σωματιδίου, καθώς και από το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου
 - 3) Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται σε διεύθυνση παράλληλη με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου, η μαγνητική δύναμη $\mathbf{F}$ που δρα πάνω στο σωματίδιο είναι μηδενική
 - 4) Όταν το διάνυσμα της ταχύτητα σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο, τότε η μαγνητική δύναμη $\mathbf{F}$ είναι κάθετη στο $\mathbf{v}$ και στο $\mathbf{B}$
 - 5) Η μαγνητική δύναμη που δρα πάνω σε ένα θετικό φορτίο έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που δρα πάνω σε ένα αρνητικό φορτίο το οποίο κινείται στην ίδια κατεύθυνση
 - 6) Αν το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο, το μέτρο της μαγνητικής δύναμης είναι ανάλογο με το $\sin\theta$



7.2 Ορισμός και ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου

- Όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις συνοψίζονται στον εξής τύπο: $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
- Όπου η μαγνητική δύναμη έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, που από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου γνωρίζουμε ότι είναι κάθετη στο επίπεδο $\mathbf{v}$ και $\mathbf{B}$
- Στο σχήμα παρακάτω βλέπουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον ορισμό της κατεύθυνσης του εξωτερικού γινομένου του $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
- Με τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού δείχνουμε την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$
- Κατόπιν τα περιστρέφουμε ώστε να δείχνουν προς την κατεύθυνση του $\mathbf{B}$
- Τότε ο αντίχειρας έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
- Επειδή όμως $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, η $\mathbf{F}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ αν το q είναι θετικό, και αντίθετη με το $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ αν το q είναι αρνητικό

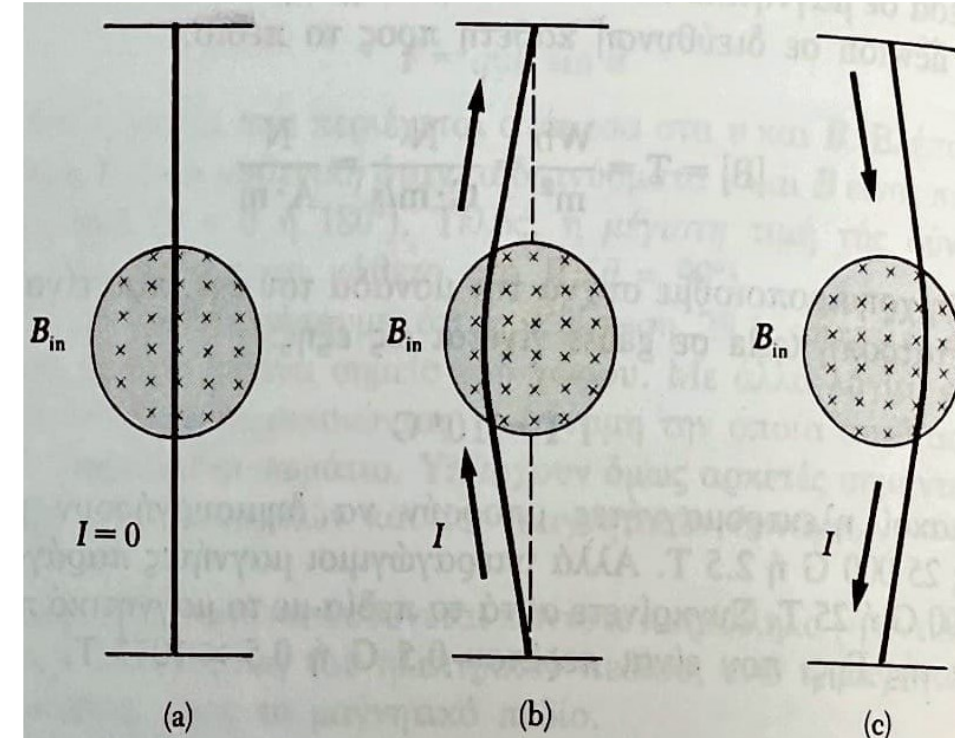


7.2 Ορισμός και ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου

- Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης είναι $F = qvB\sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{B}$
- Επίσης βλέπουμε ότι η δύναμη F είναι μηδενική όταν τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{B}$ είναι παράλληλα ή αντιπαράλληλα ($\theta=0^\circ$ και $\theta=180^\circ$)
- Η μέγιστη τιμή της μαγνητικής δύναμης είναι $F = qvB$, όταν το $\mathbf{v}$ είναι κάθετο με το $\mathbf{B}$ ($\theta=90^\circ$)
- Η εξίσωση $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ αποτελεί τον ορισμό του μαγνητικού πεδίου. Έτσι ορίζουμε το μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιώντας τη δύναμη την οποία αυτό ασκεί σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο
- Παρατήρηση: 1) Η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη με το μαγνητικό πεδίο, 2) Η μαγνητική δύναμη δρα μόνο σε κινούμενα φορτισμένα σωματίδια, 3) Η μαγνητική δύναμη που προέρχεται από σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο όταν κινείται το σωματίδιο
- Άρα όταν ένα φορτίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να μεταβάλει την κατεύθυνση αλλά όχι το μέτρο της ταχύτητας του.
- Μονάδες μέτρησης του μαγνητικού πεδίου είναι το Tesla (T) $= \frac{Wb}{m^2} = \frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = 10^4 Gauss (G)$

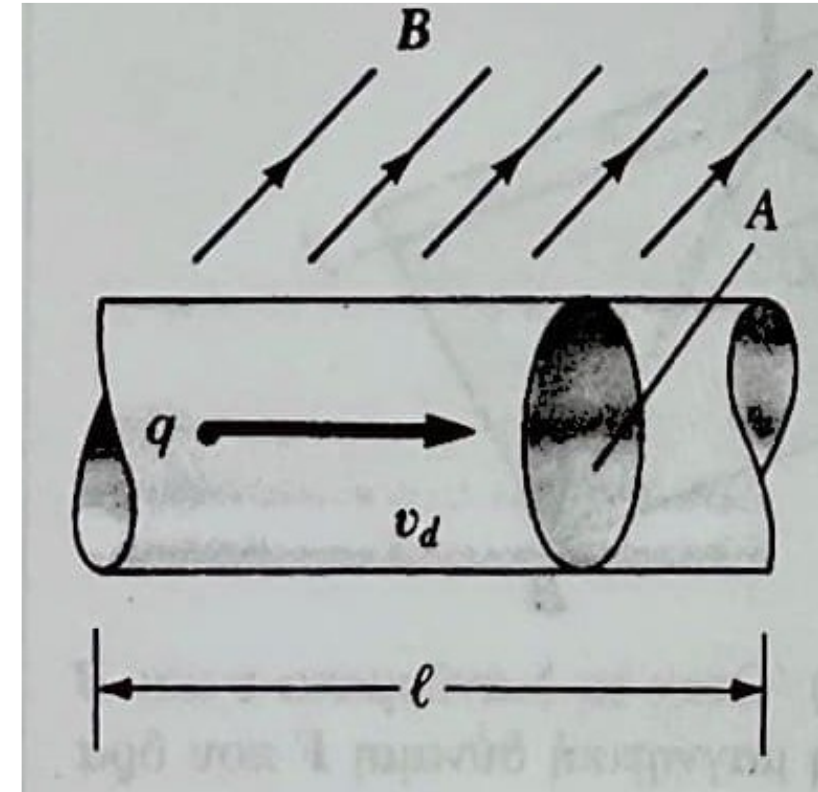
7.3 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

- Όταν ένα σύρμα διαρρέεται από ρεύμα, τότε υπόκεινται σε μαγνητική δύναμη όταν τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο
- Αυτό συμβαίνει διότι το ρεύμα είναι αποτέλεσμα της κίνησης πολλών φορτισμένων σωματιδίων και η συνολική δύναμη που δρα πάνω στο σύρμα είναι συνισταμένη των επιμέρους δυνάμεων που δρουν πάνω σε κάθε σωματίδιο ξεχωριστά
- Μπορούμε να αποδείξουμε τη δύναμη αυτή αν τοποθετήσουμε ένα σύρμα ανάμεσα στους πόλους ενός μαγνήτη
- Το μαγνητικό πεδίο σε αυτή την περίπτωση είναι κάθετο με το επίπεδο, πηγαίνει προς τα μέσα και περιορίζεται στον σκιασμένο κύκλο
- Όταν το ρεύμα είναι μηδενικό, το σύρμα παραμένει κατακόρυφο
- Όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα κατευθυνόμενο προς τα επάνω, το σύρμα αποκλίνει προς τα αριστερά
- Όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα κατευθυνόμενο προς τα κάτω, τότε το σύρμα αποκλίνει προς τα δεξιά
- Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να το αποδείξετε



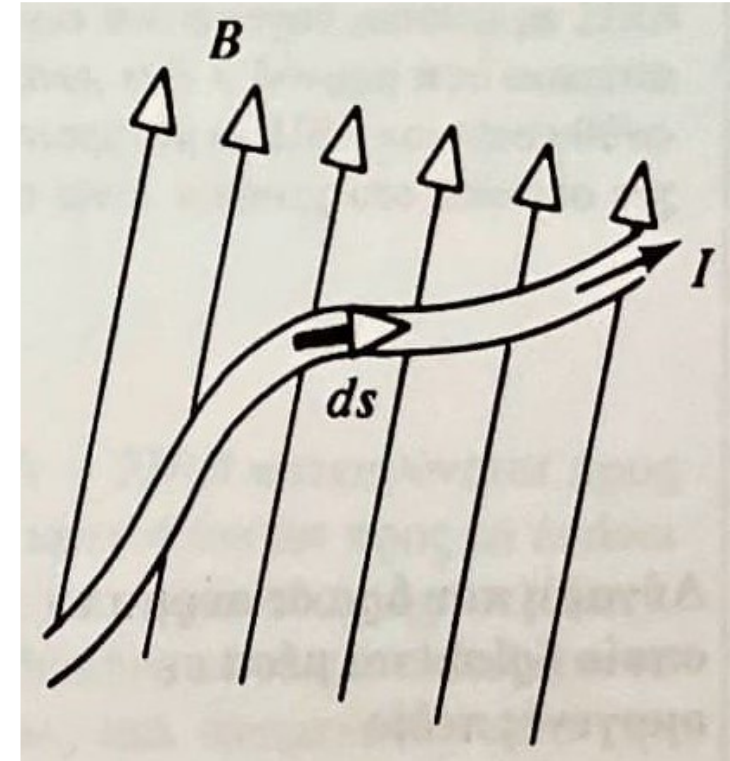
7.3 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

- Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο σύρμα μήκους l και διατομής A που διαρρέεται από ρεύμα I και είναι τοποθετημένο μέσα σε ένα εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$
- Η μαγνητική δύναμη πάνω στο φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα ολίσθησης $\mathbf{v}_d$ ισούται με $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$
- Για να βρούμε τη συνολική δύναμη, πολλαπλασιάζουμε τον ολικό αριθμό των φορτίων σε αυτό το τμήμα του σύρματος μήκους l με τη δύναμη $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο
- Αφού ο όγκος του σύρματος ισούται με τη διατομή επί το μήκος (Al), ο ολικός αριθμός των φορτίων του τμήματος μήκους l του σύρματος είναι nAl
- Άρα η ολική μαγνητική δύναμη στο τμήμα l του σύρματος είναι: $\mathbf{F} = (q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nAl$
- Ξέρουμε από προηγούμενο κεφάλαιο ότι το ρεύμα στο σύρμα είναι: $I = nqv_dA$
- Άρα ξαναγράφουμε τη μαγνητική δύναμη ως: $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, όπου το $\mathbf{l}$ είναι ένα διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση του ρεύματος I
- Το μέτρο του διανύσματος I ισούται με το μήκος l του σύρματος
- Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για ευθύγραμμο τμήμα σύρματος σε ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο



7.3 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

- Έστω τώρα ότι έχουμε ένα σύρμα τυχαίου σχήματος, αλλά σταθερής διατομής και τοποθετείται μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο
- Για ένα πολύ μικρό τμήμα ds του σύρματος, αυτό μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο και έτσι η δύναμη στο απειροστό μικρό τμήμα του σύρματος είναι: $d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$, όπου η $d\mathbf{F}$ είναι κάθετη στο επίπεδο και κατευθύνεται από κάτω προς τα πάνω για θετικά φορτία
- Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί εναλλακτικό ορισμό του $\mathbf{B}$. Ορίζουμε το πεδίο $\mathbf{B}$, μετρώντας τη δύναμη $d\mathbf{F}$ την οποία ασκεί το οριζόμενο πεδίο $\mathbf{B}$ πάνω σε ένα τμήμα ds αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I .
- Από τον ορισμό φαίνεται ότι η μαγνητική δύναμη είναι μέγιστη όταν το πεδίο $\mathbf{B}$ είναι κάθετο στο τμήμα ds του αγωγού και μηδενική όταν είναι παράλληλο
- Για να υπολογίσουμε την ολική δύναμη $\mathbf{F}$ που ασκείται πάνω στο σύρμα, ολοκληρώνουμε την παραπάνω εξίσωση πάνω στο μήκος ολόκληρου του σύρματος: $\mathbf{F} = I \int_a^b d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$
- Τα a και b συμβολίζουν τα δύο άκρα του σύρματος
- Για τον υπολογισμό αυτό πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί, αφού η κατεύθυνση του ds ως προς το πεδίο μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε σημείο



7.3 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

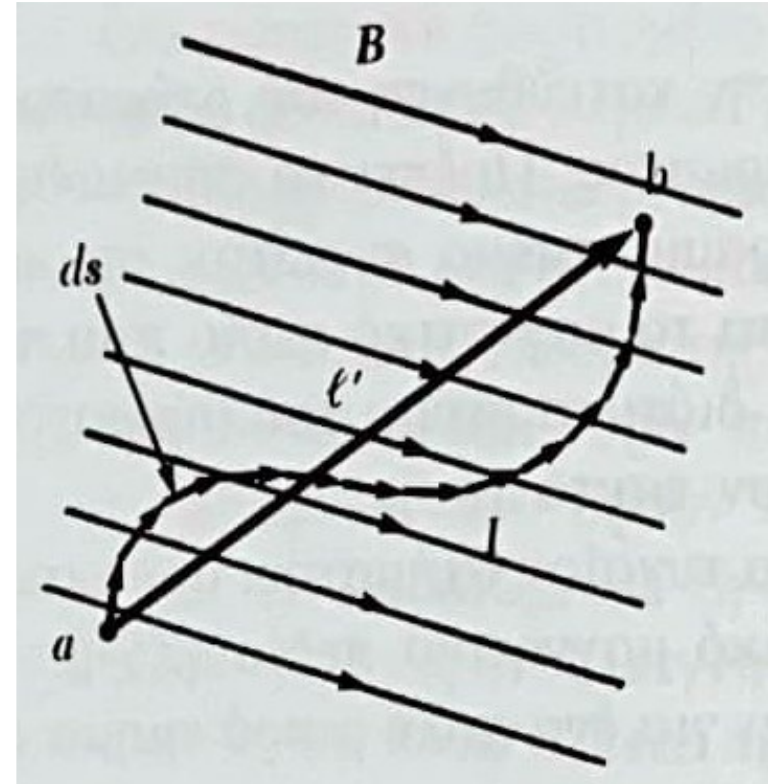
- Ας δούμε δύο ειδικές περιπτώσεις εφαρμογής της προηγούμενης εξίσωσης (με σταθερό εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}$ σε μέτρο και κατεύθυνση)

Περίπτωση Ι

- Ένα καμπύλο σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I και είναι τοποθετημένο μέσα σε ομογενές εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}$
- Υπενθύμιση: Ομογενές πεδίο σημαίνει ότι έχει το ίδιο μέτρο και κατεύθυνση παντού στον αγωγό
- Επομένως μπορεί να βγει από το ολοκλήρωμα και έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{F} = I \left(\int_a^b d\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B}$$

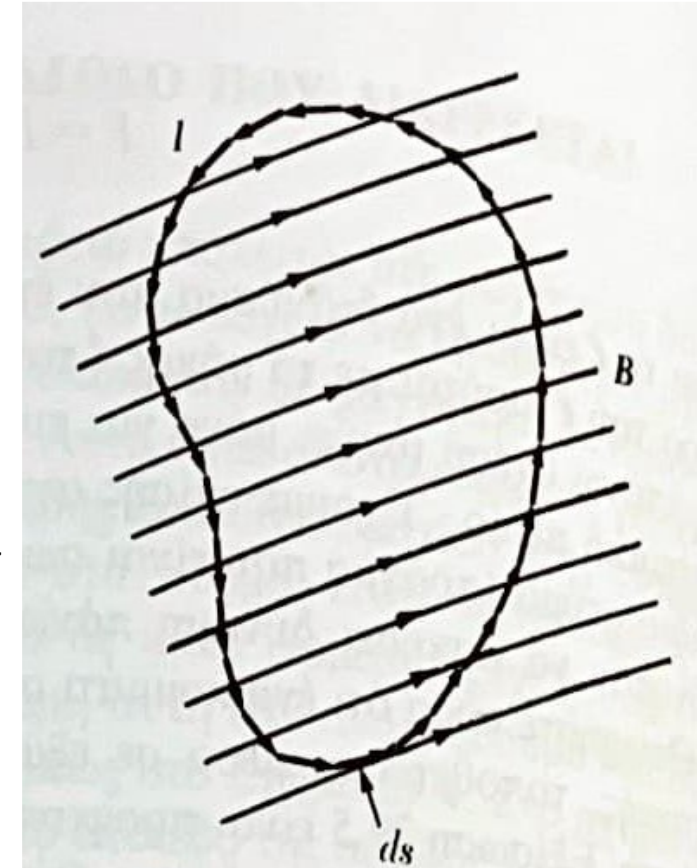
- Η ποσότητα $\int_a^b d\mathbf{s}$ ισούται με το διανυσματικό άθροισμα όλων των στοιχειωδών μετατοπίσεων από το a στο b
- Το άθροισμα αυτό ισούται με το διάνυσμα $\mathbf{l}'$ που κατευθύνεται από το a στο b
- Άρα η εξίσωση γίνεται: $\mathbf{F} = I \mathbf{l}' \times \mathbf{B}$



7.3 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

Περίπτωση II

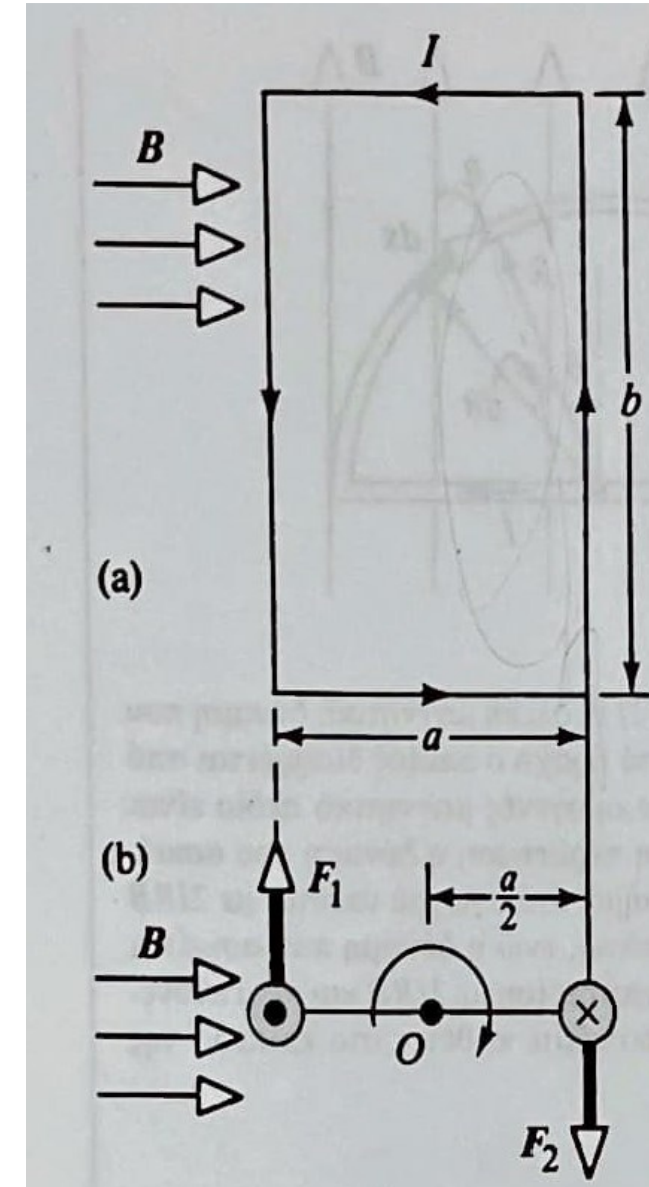
- Τοποθετούμε ένα κλειστό συρμάτινο βρόγχο (τυχαίου σχήματος) που διαρρέεται από ρεύμα I μέσα σε εξωτερικό ομογενές πεδίο $\mathbf{B}$
- Μπορούμε πάλι να περιγράψουμε τη δύναμη, αλλά σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό άθροισμα πρέπει να καλύψει ένα κλειστό βρόγχο.
- Άρα $\mathbf{F} = I(\oint d\mathbf{s}) \times \mathbf{B}$
- Όμως το διανυσματικό αυτό άθροισμα είναι μηδέν, γιατί ο βρόγχος είναι κλειστός, άρα τα επιμέρους διανύσματα δημιουργούν κλειστό πολύγωνο.
- Άρα το $\oint d\mathbf{s} = 0$, έτσι και η μαγνητική δύναμη $\mathbf{F} = 0$
- Δηλαδή η συνισταμένη μαγνητική δύναμη σε οποιοδήποτε κλειστό βρόγχο ρεύματος που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική.



7.4 Ροπή πάνω σε βρόγχο που διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

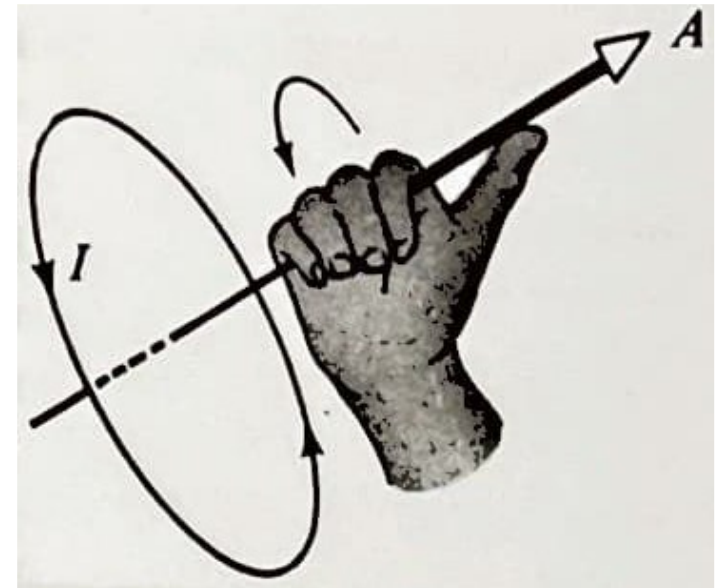
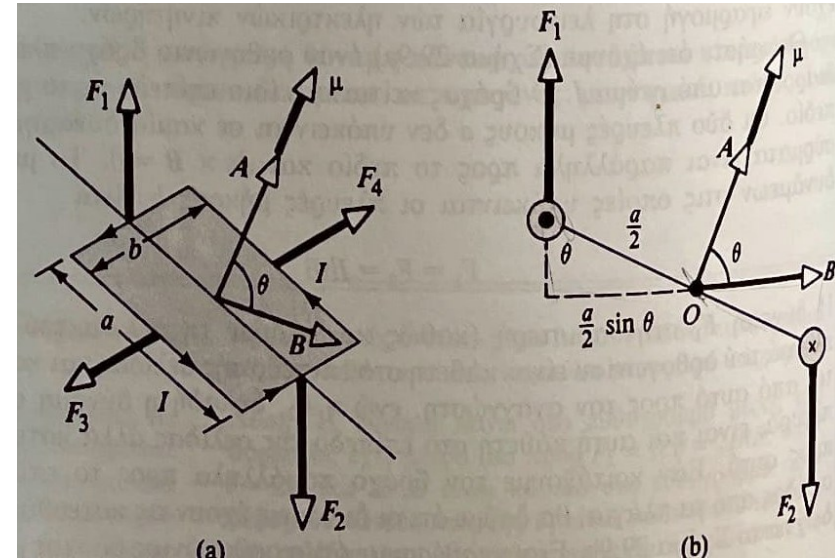
Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα υπολογίσουμε τη ροπή που ασκεί πάνω σε ένα βρόγχο που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο είναι τοποθετημένος ο βρόγχος

- Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο βρόγχο που διαρρέεται από ρεύμα I και ο βρόγχος είναι στο ίδιο επίπεδο με το μαγνητικό πεδίο
- Οι δύο πλευρές μήκους a δεν υπόκεινται σε καμία δύναμη, αφού τα σύρματα είναι παράλληλα προς το πεδίο και έτσι $d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = 0$
- Το μέτρο των δυνάμεων στις οποίες υπόκεινται οι πλευρές μήκους b είναι: $F_1 = F_2 = I b B$
- Η $\mathbf{F}_1$ (στην αριστερή πλευρά του ορθογωνίου) είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας και κατευθύνεται προς τον αναγνώστη
- Η $\mathbf{F}_2$ (στη δεξιά πλευρά του ορθογωνίου) είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας και κατευθύνεται προς τα μέσα
- Αν κοιτάξουμε τον βρόγχο παράλληλα προς το επίπεδο από τα πλάγια, θα δούμε ότι οι δυνάμεις έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα (β)
- Αν υποθέσουμε ότι ο βρόγχος μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο O , αυτό θα περιστραφεί κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, λόγω της ροπής στρέψης που παράγεται από τις δυνάμεις F_1 και F_2
- Το μέτρο της ροπής στρέψης ισούται με: $\tau_{max} = F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} = (I b B) \frac{a}{2} + (I b B) \frac{a}{2} = I a b B$
- Όμως η επιφάνεια του ορθογωνίου ισούται με $A = ab$, άρα η $\tau_{max} = I A B$



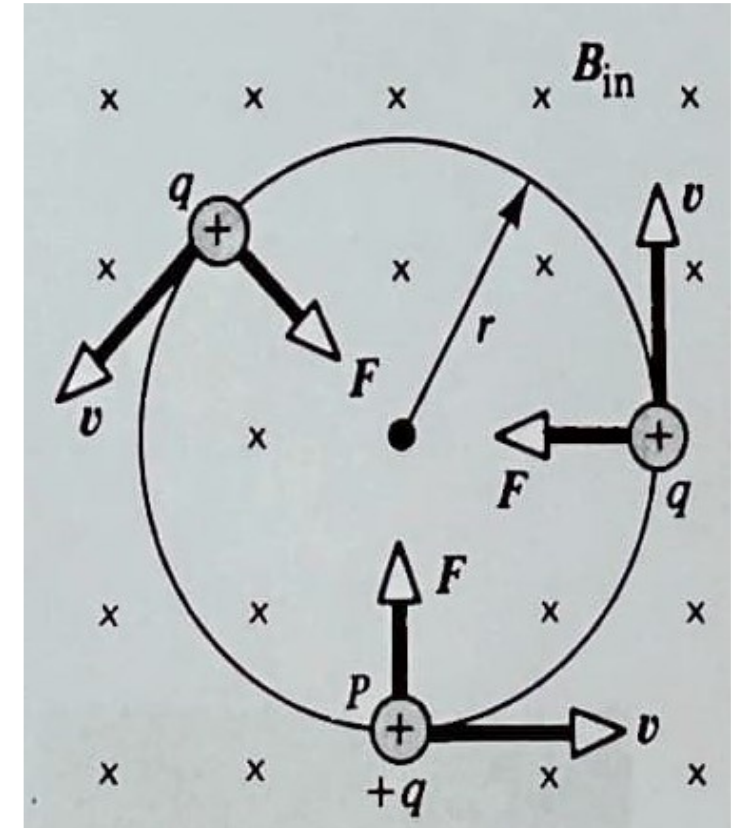
7.4 Ροπή πάνω σε βρόγχο που διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

- Στην περίπτωση που το ομογενές πεδίο σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη προς το επίπεδο του βρόγχου κατεύθυνση, τότε η ροπή στρέψης έχει μέτρο: $\tau = IAB \sin \theta$
- Έτσι βλέπουμε ότι η ροπή στρέψης έχει μέγιστη τιμή όταν το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο με τον άξονα του επιπέδου ($\theta = 90^\circ$) και μηδενική όταν το πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόγχου ($\theta = 0^\circ$)
- Διανυσματικά η ροπή μπορεί να γραφτεί: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I} \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, όπου $\mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A και κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου με κατεύθυνση την οποία βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού στη φορά του ρεύματος: περιστρέφουμε τα τέσσερα δάκτυλα του δεξιού χεριού μας κατά τη φορά του ρεύματος, και ο αντίχειρας κατευθύνεται προς την κατεύθυνση του $\mathbf{A}$
- Έτσι ονομάζουμε μαγνητική ροπή μ του βρόγχου το γινόμενο $\mathbf{I} \mathbf{A}$: $\mu = \mathbf{I} \mathbf{A}$
- Μονάδα μέτρησης της ροπής είναι το Am^2
- Έτσι η ροπή πάνω σε βρόγχο που διαρρέεται από ρεύμα γράφεται ως εξής: $\tau = \mu \times \mathbf{B}$
- Είναι λοιπόν προφανές ότι αν έχουμε ένα πηνίο με N ίσους βρόγχους, η μαγνητική ροπή του και η ροπή στρέψης που ασκείται επάνω του από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι N φορές μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες ενός και μόνο βρόγχου



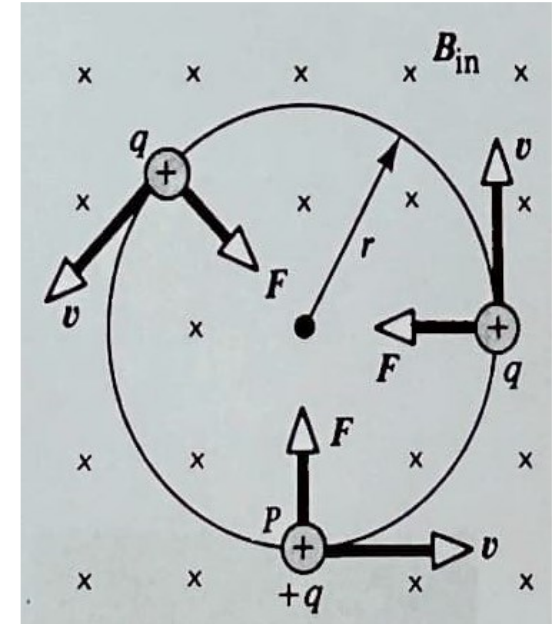
7.5 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο

- Προηγουμένως είδαμε ότι η μαγνητική δύναμη που δρα πάνω σε ένα φορτισμένο σωματίδιο το οποίο κινείται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο είναι πάντα κάθετη στην κατεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου
- Έτσι συμπεραίνουμε ότι το έργο που ασκεί η μαγνητική δύναμη είναι μηδενικό, γιατί η μετατόπιση του σωματιδίου είναι πάντα κάθετη με τη μαγνητική δύναμη. Επομένως, ένα στατικό μαγνητικό πεδίο μεταβάλλει μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας του φορτισμένου σωματιδίου γιατί δε μπορεί να επηρεάσει το μέτρο της ταχύτητας ή την κινητική του ενέργεια
- Θεωρήστε τώρα ότι έχουμε ένα θετικό φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε ένα εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο, με το διάνυσμα της αρχικής του ταχύτητα κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο.
- Το μαγνητικό πεδίο κατευθύνεται προς το επίπεδο
- Το φορτισμένο σωματίδιο κινείται σε κύκλο του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο με το μαγνητικό πεδίο
- Αυτό συμβαίνει διότι η μαγνητική δύναμη $\mathbf{F}$ είναι κάθετη με την $\mathbf{v}$ και ταυτόχρονα έχει σταθερό μέτρο ίσο με qvB
- Καθώς η δύναμη $\mathbf{F}$ εκτρέπει το σωματίδιο από την αρχική του κατεύθυνση, οι κατευθύνσεις των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{F}$ μεταβάλλονται συνεχώς
- Επομένως η $\mathbf{F}$ είναι κεντρομόλος δύναμη που μεταβάλλεται συνεχώς με την κατεύθυνση της $\mathbf{v}$ χωρίς να επηρεάζει το μέτρο της
- Όπως βλέπουμε από το σχήμα, η φορά της κυκλικής περιστροφής είναι αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού
- Αν το φορτίο ήταν αρνητικό το σωματίδιο θα κινούταν με τη φορά των δεικτών του ρολογιού



7.5 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο

- Η δύναμη $\mathbf{F}$ είναι ακτινική και έχει μέτρο ίσο με qvB , που μπορούμε να εξισώσουμε με την κεντρομόλο δύναμη: $F = quB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$
- Άρα η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι ανάλογη με την ορμή mv του σωματιδίου και αντιστρόφως ανάλογη με το μαγνητικό πεδίο
- Η κυκλική συχνότητα του περιστρεφόμενου σωματιδίου ισούται με: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$
- Η περίοδος της κίνησης ισούται με: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 7

- ✓ Ορισμός και ιδιότητες του μαγνητικού πεδίου
- ✓ Μαγνητική δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα
- ✓ Ροπή πάνω σε βρόγχο που διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο
- ✓ Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Ερωτήσεις;