



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

11. Κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

11.1 Εισαγωγή

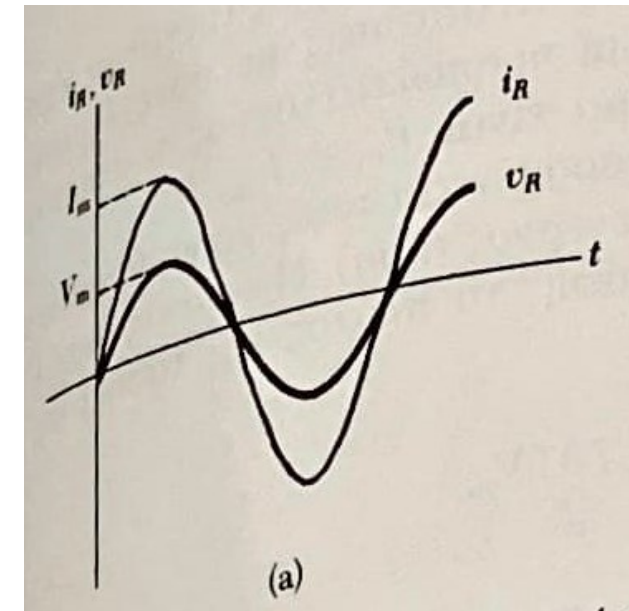
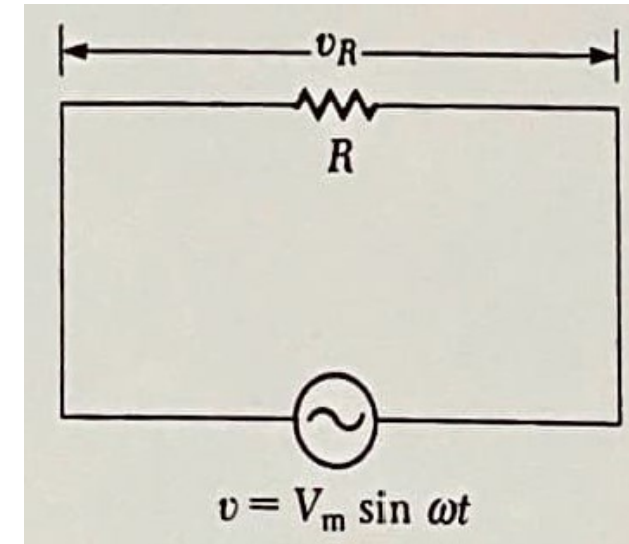
- Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τις βασικές αρχές των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος (κυκλώματα AC)

11.2 Πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος

- Μια τάση λέγεται εναλλασσόμενη (AC) όταν η τιμή και η πολικότητα της είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου (το ίδιο ισχύει και για το εναλλασσόμενο ρεύμα)
- Όταν περιστρέφουμε ένα πηνίο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε μαγνητικό πεδίο, επάγεται στο πηνίο αρμονική τάση ΗΕΔ
- Η στιγμιαία τιμή της τάσης είναι: $v = V_m \sin \omega t$, όπου V_m είναι η μέγιστη τιμή της τάσης που παράγει η γεννήτρια, δηλαδή το πλάτος της αρμονικά μεταβαλλόμενης τάσης και $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης

11.3 Αντιστάσεις σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

- Έχουμε το απλό κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με μια αντίσταση και μια γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης
- Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff, γνωρίζουμε ότι πρέπει να ισχύει ότι: $v - v_R = 0 \Rightarrow v = v_R \Rightarrow v = v_R = V_m \sin \omega t$, όπου v_R είναι η στιγμιαία πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης
- Το στιγμιαίο ρεύμα είναι: $I_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$, όπου I_m είναι το μέγιστο πλάτος της έντασης του ρεύματος το οποίο ισούται με: $I_m = \frac{V_m}{R}$
- Η στιγμιαία πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης είναι: $v_R = I_m R \sin \omega t$
- Εφόσον τα I_R και v_R είναι ανάλογα του $\sin \omega t$ και παίρνουν ταυτόχρονα τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή τους, λέμε ότι βρίσκονται σε φάση (διαφορά φάσης μηδέν)
- Και από τα διαγράμματα της εξάρτησης I_R και v_R με το χρόνο βλέπουμε ότι ταυτόχρονα αποκτούν τις μέγιστες, μηδενικές ή ελάχιστες τιμές τους
- Βλέπουμε ότι η μέση της έντασης του ρεύματος σε μια περίοδο είναι μηδέν. Το ρεύμα έχει τον ίδιο χρόνο και την ίδια ένταση προς τη θετική και προς την αρνητική κατεύθυνση
- Η κατεύθυνση του ρεύματος δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά της αντίστασης στο κύκλωμα, αφού οι κρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα της αντίστασης είναι ανεξάρτητες από την κατεύθυνση του ρεύματος
- Εξαρτώνται μόνο από το μέτρο της έντασης του ρεύματος, και έχουν αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασίας της αντίστασης



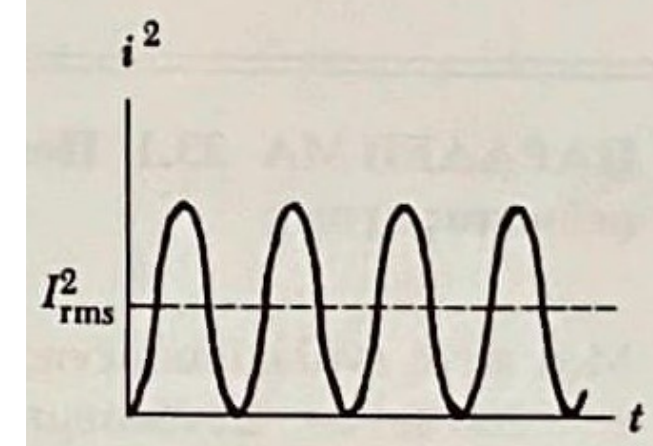
11.3 Αντιστάσεις σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

- Ο ρυθμός με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση είναι η ισχύς joule που είναι: $P = i^2 R$, όπου i είναι η στιγμιαία τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα
- Άρα οι θερμικές απώλειες είναι ανάλογες με το τετράγωνο του ρεύματος, έτσι η κατεύθυνση του δεν έχει καμία σημασία
- Σημείωση: Το θερμικό αποτέλεσμα που προκαλεί το εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστης έντασης I_m είναι διαφορετικό από το θερμικό αποτέλεσμα που προκαλεί το συνεχές ρεύμα ίδιας έντασης
- Αυτό συμβαίνει διότι το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει τη μέγιστη τιμή του για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια μιας περιόδου
- Αυτό που έχει σημασία σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η μέση τιμή του ρεύματος, η οποία ονομάζεται τιμή rms (root mean square) της έντασης του ρεύματος ή ενεργός ένταση του ρεύματος
- Ο όρος rms σημαίνει ότι παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της ποσότητας που μελετάμε (πχ το ρεύμα)
- Η ενεργός ένταση I_{rms} του ρεύματος συνδέεται με το πλάτος του ρεύματος I_m ως: $I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m$
- Η εξίσωση αυτή ορίζει ότι εναλλασσόμενο ρεύμα έντασης 2A, έχει τις ίδιες θερμικές απώλειες στις αντιστάσεις με συνεχές ρεύμα 1.414A
- Άρα η μέση απώλεια ισχύος σε αντίσταση που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα είναι:

$$P_{av} = I_{rms}^2 R$$

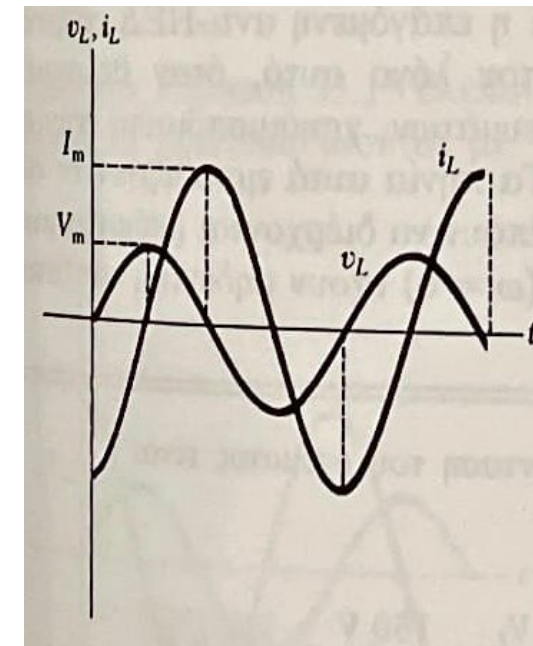
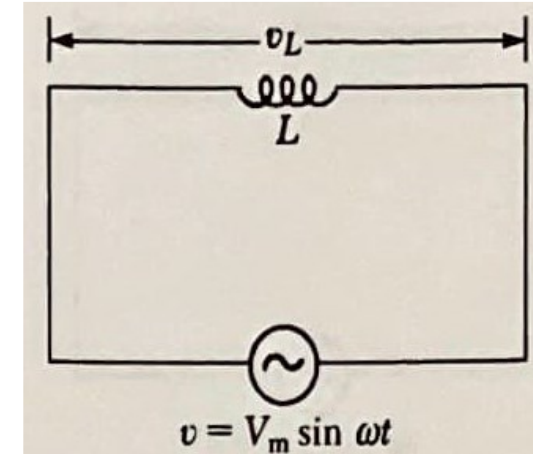
- Παρομοίως περιγράφουμε και τις εναλλασσόμενες τάσεις χρησιμοποιώντας την έννοια της rms τάσης:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$



11.4 Πηνία σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

- Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , το οποίο είναι συνδεδεμένο με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης
- Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff και έχουμε: $v + v_L = 0 \Rightarrow v - L \frac{di}{dt} = 0$
- Θέτουμε για $v = V_m \sin \omega t$ και έχουμε: $L \frac{di}{dt} = V_m \sin \omega t$
- Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση και έχουμε: $i_L = \frac{V_m}{L} \int \sin \omega t dt = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t$
- Από τριγωνομετρία αυτό μπορεί να γραφτεί και ως: $i_L = \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, αφού $\cos \omega t = -\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$
- Άρα βλέπουμε ότι το ρεύμα και η τάση έχει διαφορά φάσης $\pi/2$
- Η τάση αποκτά τη μέγιστη τιμή της ένα τέταρτο της περιόδου προτού το ρεύμα λάβει τη μέγιστη τιμή του
- Συνεπώς όταν η εξωτερική τάση είναι αρμονική, τότε στο πηνίο το ρεύμα έπεται της τάσης με διαφορά φάσης 90°
- Για να κατανοήσουμε τι συμβαίνει, αρχικά γνωρίζουμε ότι η τάση στα άκρα του πηνίου είναι ανάλογη με το di/dt , άρα η μέγιστη τάση εμφανίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος είναι μέγιστος
- Το di/dt γίνεται μέγιστο όταν το ρεύμα τέμνει τον άξονα του χρόνου, είναι δηλαδή μηδέν
- Άρα το μέγιστο ρεύμα είναι: $I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{V_m}{X_L}$, όπου η ποσότητα X_L ονομάζεται επαγωγική αντίσταση και ισούται με: $X_L = \omega L$
- Η ενεργό ένταση του ρεύματος βρίσκεται από την εξίσωση: $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{\omega L} = \frac{V_{rms}}{X_L}$
- Προσοχή δεν πρέπει να συγχέουμε την επαγωγική αντίσταση με την αντίσταση. Διαφέρουν γιατί στην επαγωγική αντίσταση τα v και i έχουν διαφορά φάσης (το ρεύμα έπεται), ενώ στην αντίσταση είναι σε φάση

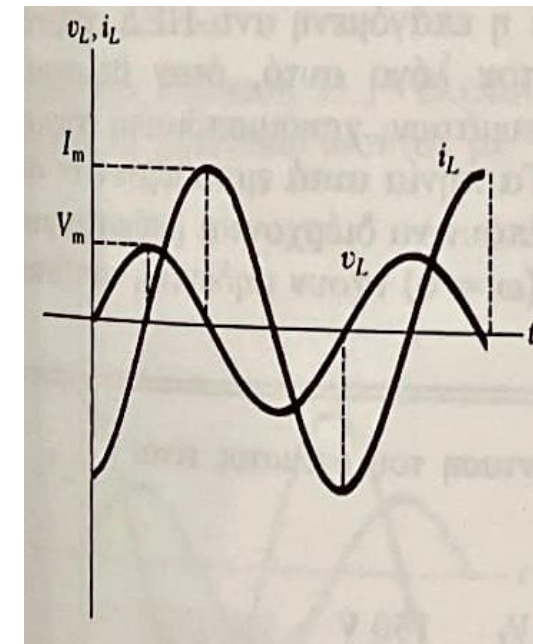
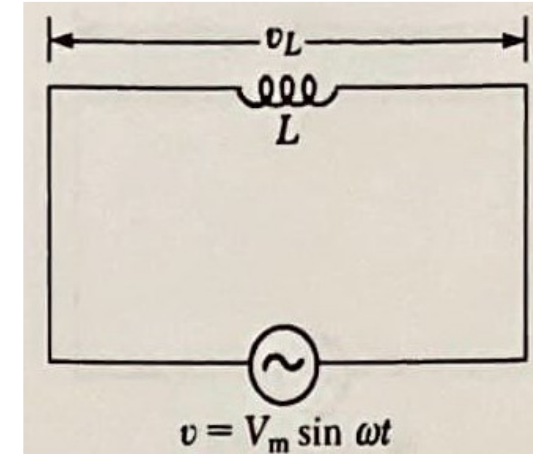


11.4 Πηνία σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

- Μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία πτώση τάσης ανάμεσα στα άκρα του πηνίου ως εξής:

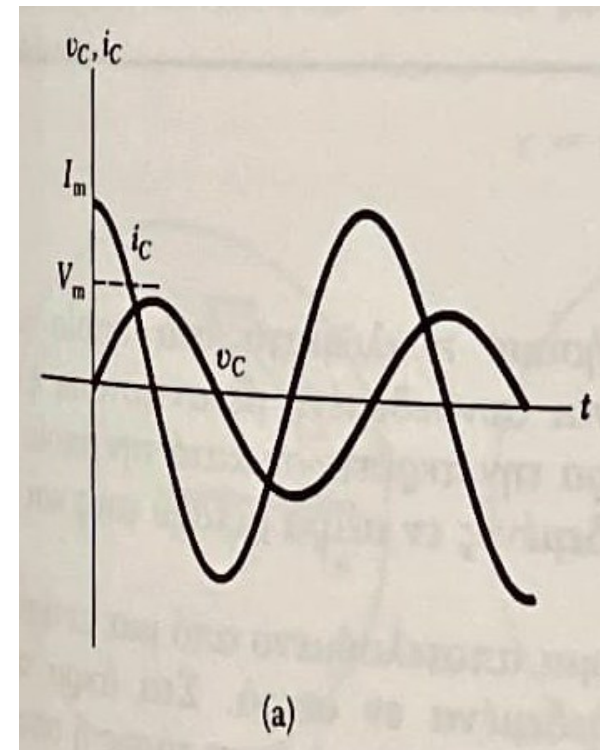
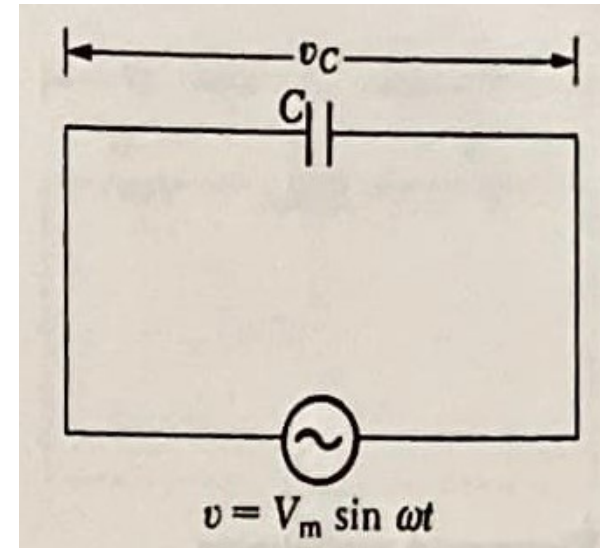
$$v_L = V_m \sin \omega t = I_m X_L \sin \omega t$$

- Σημείωση: η επαγωγική αντίσταση δεν είναι σταθερή όπως η αντίσταση, αλλά αυξάνεται όσο αυξάνεται η κυκλική συχνότητα ω
- Αυτό γίνεται γιατί στις υψηλές συχνότητες το ρεύμα μεταβάλλεται γρηγορότερα και έτσι η επαγόμενη ΗΕΔ αυξάνεται για δεδομένο πλάτος ρεύματος



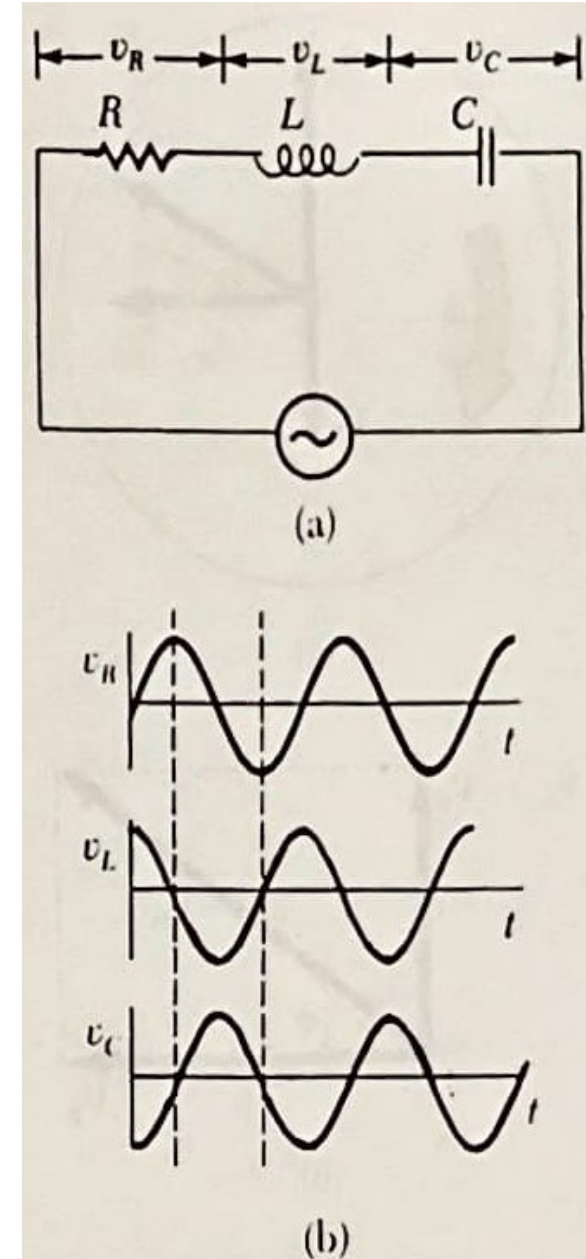
11.5 Πυκνωτές σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

- Στο σχήμα έχουμε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή συνδεδεμένο με γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος
- Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff: $v - v_C = 0 \Rightarrow v = v_C = V_m \sin \omega t$, όπου $v_C = \frac{Q}{C}$ είναι η στιγμιαία τιμή της τάσης ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή
- Άρα το στιγμιαίο φορτίο του πυκνωτή είναι: $Q = CV = CV_m \sin \omega t$
- Και το στιγμιαίο ρεύμα του πυκνωτή είναι: $i_C = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t$
- Άρα και πάλι το ρεύμα δεν βρίσκεται σε φάση με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή
- Το ρεύμα του πυκνωτή μπορεί και να γραφτεί ως εξής: $i_C = \omega C V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ (από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$)
- Άρα βλέπουμε ότι το ρεύμα και η τάση του πυκνωτή είναι εκτός φάσης κατά 90° , όπου το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά $\frac{1}{4}$ της περιόδου
- Όταν λοιπόν η εφαρμοζόμενη ΗΕΔ είναι αρμονική, τότε το ρεύμα προηγείται της τάσης του πυκνωτή κατά 90°
- Η μέγιστη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι: $I_m = \omega C V_m = \frac{V_m}{X_C}$, όπου $X_C = \frac{1}{\omega C}$ λέγεται χωρητική αντίσταση
- Για να βρούμε την ενεργό ένταση του ρεύματος θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση την V_{rms} αντί για την V_m
- Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε τη στιγμιαία τάση του πυκνωτή: $v_C = I_m X_C \sin \omega t$
- Καθώς αυξάνεται η κυκλική συχνότητα, αυξάνεται το ρεύμα και μειώνεται η χωρητική αντίσταση
- Καθώς η συχνότητα τείνει στο μηδέν, η τιμή της χωρητικής αντίστασης τείνει στο άπειρο και επομένως το ρεύμα τείνει στο μηδέν. Αυτό είναι λογικό γιατί όταν η $\omega \rightarrow 0$ τότε το κύκλωμα συμπεριφέρεται σαν συνεχούς ρεύματος και παύει να διαρρέει τον πυκνωτή ηλεκτρικό ρεύμα.



11.6 Κύκλωμα RLC εν σειρά

- Στο σχήμα βλέπουμε ένα κύκλωμα αποτελούμενο από μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος που είναι συνδεδεμένη εν σειρά με μια αντίσταση, ένα πηνίο και ένα πυκνωτή
- Όπως και προηγουμένως, η εναλλασσόμενη τάση έχει τη μορφή $v = V_m \sin \omega t$
- Έστω λοιπόν ότι το ρεύμα μεταβάλλεται ως εξής: $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, όπου φ είναι η διαφορά φάσης ανάμεσα στο ρεύμα και στην εφαρμοζόμενη τάση. Άρα πρέπει να βρούμε το φ και το I_m για κάθε περίπτωση
- Σημείωση: αφού τα μέρη του κυκλώματος είναι συνδεδεμένα εν σειρά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι το ίδιο κάθε στιγμή (έχει παντού το ίδιο πλάτος και φάση)
- Επίσης από τα προηγούμενα υποκεφάλαια, γνωρίζουμε ότι η τάση στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος έχει διαφορετικά πλάτη και διαφορετικές φάσεις
- Το ρεύμα και η τάση στα άκρα μιας αντίστασης έχουν την ίδια φάση; στα άκρα του πηνίου η φάση της τάσης προηγείται της φάσης του ρεύματος κατά 90° ; στα άκρα του πυκνωτή η φάση της τάσης έπεται της φάσης του ρεύματος κατά 90°
- Άρα οι στιγμιαίες τάσεις στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος είναι:
 - 1) $v_R = I_m R \sin \omega t = V_R \sin \omega t$,
 - 2) $v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = V_L \cos \omega t$
 - 3) $v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -V_C \cos \omega t$
- Όπου τα $V_R = I_m R$, $V_L = I_m X_L$ και $V_C = I_m X_C$ είναι τα πλάτη των τάσεων στα άκρα κάθε στοιχείου
- Σημείωση: η στιγμιαία τάση v ανάμεσα στην εν σειρά σύνδεση των τριών συνιστωσών ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τιμών τους: $v = v_R + v_L + v_C$

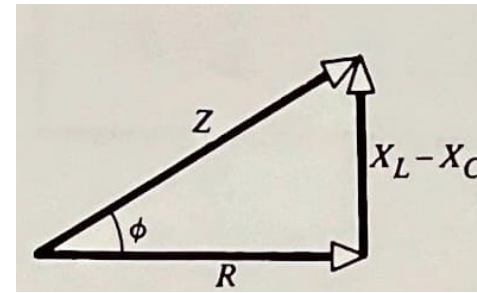
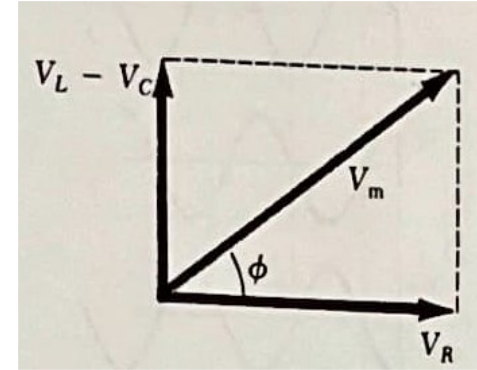


11.6 Κύκλωμα RLC εν σειρά

- Η μέγιστη τάση του κυκλώματος RLC εν σειρά δίνεται από την παρακάτω εξίσωση: $V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2} = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, όπου $X_L = \omega L$ και $X_C = \frac{1}{\omega C}$
- Άρα μπορούμε να εκφράσουμε το μέγιστο ρεύμα ως: $I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_m}{Z}$
- Ορίζουμε ότι σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση του κυκλώματος είναι: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, με μονάδα μέτρησης Ohm
- Άρα η μέγιστη τάση του κυκλώματος παίρνει τη μορφή $V_m = I_m Z$, όπου είναι η γενικευμένη μορφή του νόμου το Ohm για κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος
- Λοιπόν το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα εξαρτάται από την ωμική αντίσταση, το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου, την χωρητικότητα του πυκνωτή καθώς και από την κυκλική συχνότητα ω
- Από το διάγραμμα των αντιστάσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά φάσης ανάμεσα στο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και την εφαρμοζόμενη εξωτερική τάση και δίνεται τη γωνία του ορθ. τριγώνου:

$$\tan \varphi = \frac{(X_L - X_C)}{R}$$

- Όταν $X_L > X_C$ τότε η διαφορά φάσης είναι θετική, άρα το ρεύμα υστερεί της εφαρμοζόμενης ΗΕΔ
- Όταν $X_L < X_C$ τότε η διαφορά φάσης είναι αρνητική, άρα το ρεύμα προηγείται της εφαρμοζόμενης ΗΕΔ
- Όταν $X_L = X_C$ τότε η διαφορά φάσης είναι μηδενική



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 11

- ✓ Πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος Κύκλωμα RL
- ✓ Αντιστάσεις σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος
- ✓ Πηνία σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος
- ✓ Πυκνωτές σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος
- ✓ Κύκλωμα RLC εν σειρά

Ερωτήσεις;