



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

12. ΗΜ Κύματα

12.1 Εισαγωγή

- Στη μηχανική περιγράφονται τα παραδοσιακά κύματα (ηχητικά, νερού, κ.α.) που ονομάζονται μηχανικά κύματα. Αυτά διαδίδονται διαταράσσοντας κάποιο μέσο.
- Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη διάδοση των Η/Μ κυμάτων, τα οποία μπορούν να διαδοθούν και στο κενό διάστημα.
- Οι εξισώσεις του Maxwell αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο για όλα τα Η/Μ φαινόμενα

12.2 Οι εξισώσεις του Maxwell και οι ανακαλύψεις του Hertz

- Οι εξισώσεις του Maxwell περιγράφουν τους θεμελιώδεις νόμους που καθορίζουν τη συμπεριφορά των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.
- Ο Maxwell απέδειξε ότι στην ενοποιημένη ΗΜ θεωρία, τα ΗΜ κύματα είναι αποτέλεσμα των νόμων που περιγράφουν οι εξισώσεις του.
- Στο κενό οι εξισώσεις του Maxwell είναι οι εξής:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0 \quad (\text{Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο}) \quad (1)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο}) \quad (2)$$

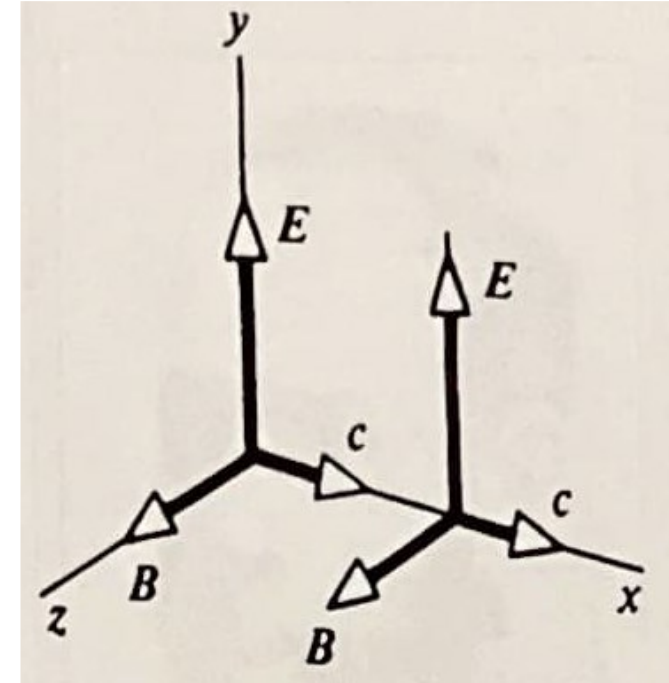
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_m/dt \quad (\text{Νόμος του Faraday}) \quad (3)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_e/dt \quad (\text{Νόμος του Ampère-Maxwell}) \quad (4)$$

- Συνδιάζοντας τις εξισώσεις 3 και 4 παίρνουμε την κυματική εξίσωση που περιγράφει τη διαταραχή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου
- Στο κενό διάστημα οι κυματικές αυτές εξισώσεις έχουν κυματική λύση, κατά την οποία η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο χώρο είναι $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$, που είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό
- Ο Hertz ήταν ο πρώτος, το 1887, που παρήγαγε και ανίχνευσε ΗΜ κύματα
- Ο ίδιος απέδειξε ότι τα κύματα σε ραδιοσυχνότητες έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως το φως (συμβολή, περίθλαση, ανάκλαση, διάθλαση και πόλωση). Επίσης απέδειξε ότι τα ραδιοκύματα διαφέρουν μόνο σε συχνότητα και μήκος κύματος σε σχέση με το ορατό φως. Τέλος μέτρησε την ταχύτητα διάδοσης των ραδιοκυμάτων και απέδειξε ότι είναι ίδια με την ταχύτητα του ορατού φωτός

12.3 Επίπεδα ΗΜ κύματα

- Μελετώντας τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να συμπεράνουμε τις ιδιότητες των ΗΜ κυμάτων
- Μπορούμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης που προκύπτει από το συνδυασμό της τρίτης και τέταρτης εξίσωσης Maxwell (εκτός των μαθησιακών στόχων του συγκεκριμένου μαθήματος)
- Αρχικά υποθέτουμε ότι το ΗΜ κύμα είναι ένα επίπεδο κύμα, ότι δηλαδή οδεύει μόνο σε μια κατεύθυνση
- Όπως φαίνεται στο σχήμα το κύμα κατευθύνεται στη διεύθυνση x , ενώ το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι παράλληλο στον άξονα y , ενώ το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλο στον άξονα z
- Τα κύματα στα οποία τα διανύσματα των πεδίων είναι παράλληλα στο επίπεδο yz τα ονομάζουμε γραμμικώς πολωμένα κύματα
- Υποθέτουμε επίσης ότι σε οποιοδήποτε σημείο P , οι τιμές των E και B εξαρτώνται μόνο από τη συντεταγμένη x και από το χρόνο t , και όχι από τις συντεταγμένες y και z του σημείου.



12.3 Επίπεδα ΗΜ κύματα

- Στο κενό διάστημα οι εξισώσεις 3 και 4 παίρνουν τη μορφή:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_m/dt$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_e/dt$$

- Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις και ότι το κύμα είναι επίπεδο καταλήγουμε στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις οι οποίες συνδέουν τα E και B

- $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

- $\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

- Παραγωγίζουμε τις εξισώσεις και συνδυάζοντας τες κατάλληλα καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις:

- $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ και $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$

- Άρα οι δύο εξισώσεις έχουν τη γενική μορφή της εξίσωσης κύματος του οποίου η ταχύτητα $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792 \frac{10^8 m}{s}$, (η ταχύτητα του φωτός στο κενό)

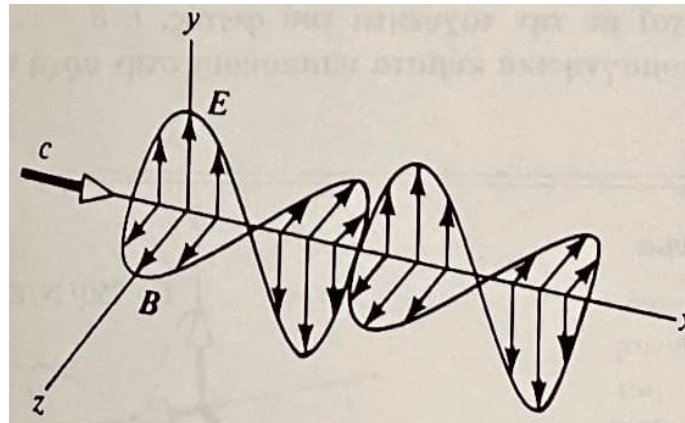
- Άρα το φως είναι φυσιολογικό να πούμε ότι είναι ΗΜ κύμα

12.3 Επίπεδα ΗΜ κύματα

- Η απλούστερη λύση των εξισώσεων $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ και $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$, είναι ένα επίπεδο αρμονικό κύμα του οποίου τα πλάτη του ηλ. και μαγν. πεδίου μεταβάλλονται ως προς x και t σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$E = E_m \cos(kx - \omega t) \text{ και } B = B_m \cos(kx - \omega t), \text{ όπου } k = 2\pi/\lambda \text{ και } \omega/k = c$$

- Το σχήμα απεικονίζει το στιγμιότυπο ενός αρμονικά μεταβαλλόμενου γραμμικά πολωμένου επίπεδου κύματος το οποίο κινείται προς τη διεύθυνση x



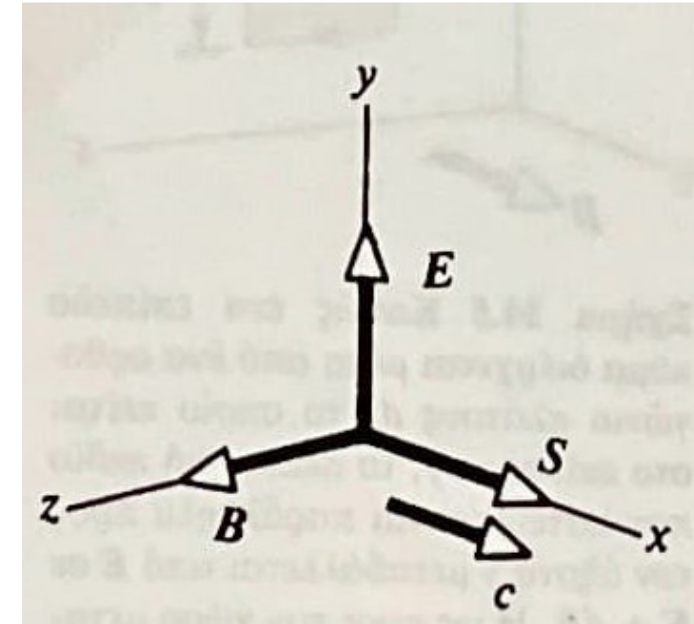
- Παίρνουμε τις μερικές παραγώγους των E και B και βρίσκουμε ότι
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -k E_m \sin(kx - \omega t) \text{ και } -\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \sin(kx - \omega t)$$
- Και επειδή $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$, καταλήγουμε ότι: $k E_m = \omega B_m \Rightarrow \frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c \Rightarrow \frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = c$
- Αυτό σημαίνει ότι το ηλ. και το μαγν. πεδίο ενός ΗΜ κύματος μεταβάλλονται έτσι ώστε κάθε στιγμή ο λόγος τους είναι ίσος με την ταχύτητα του φωτός

12.3 Επίπεδα ΗΜ κύματα

- Πρέπει να θυμόμαστε ότι τα ΗΜ κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας, καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τα E και B είναι γραμμικές δευτέρας τάξεως
- Πχ αν δύο κύματα της ίδιας συχνότητας διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, μπορούμε να τα συνδυάσουμε προσθέτοντας αλγεβρικά τα αντίστοιχα πεδία τους
- Τέλος έχουμε μια έκφραση για την ταχύτητα του φωτός: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
- Αν ανακεφαλαιώσουμε τις ιδιότητες των ΗΜ κυμάτων έχουμε:
 - 1) Οι λύσεις της τρίτης και τέταρτης εξίσωσης του Maxwell είναι κυματικής μορφής, άρα το καθένα από τα E και B ικανοποιεί την ίδια εξίσωση κύματος
 - 2) Τα ΗΜ κύματα οδεύουν στο κενό με την ταχύτητα του φωτός c
 - 3) Στα επίπεδα ΗΜ κύματα, τα διανύσματα του $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, όπως είναι κάθετα και στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Είναι δηλαδή εγκάρσια κύματα
 - 4) Κάθε στιγμή ο λόγος $E/B = c$
 - 5) Τα ΗΜ κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας

12.4 Ενέργεια μεταφερόμενη από ΗΜ κύματα

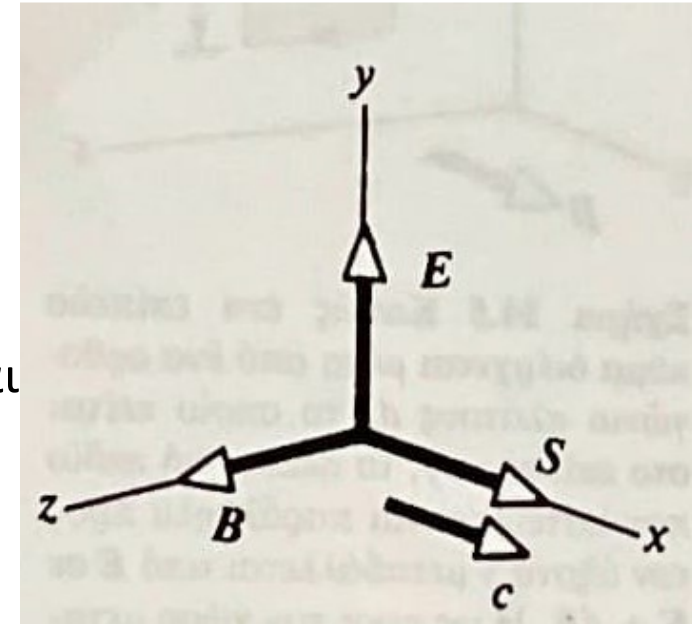
- Τα ΗΜ κύματα όπως όλα τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια και ορμή
- Καθώς διαδίδονται μέσα στο χώρο, μεταφέρουν ενέργεια και ορμή στα αντικείμενα που συναντούν στο δρόμο τους
- Ο ρυθμός ροής ενέργειας με ΗΜ κύμα περιγράφεται με ένα διάνυσμα $\mathbf{S}$ που ονομάζεται διάνυσμα Poynting και ορίζεται ως: $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$
- Το μέτρο του διανύσματος Poynting περιγράφει τον ως προς τον χρόνο ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διαρρέει μια μοναδιαία επιφάνεια που είναι κάθετη προς την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- Η κατεύθυνση του $\mathbf{S}$ είναι ίδια με την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- Μονάδα μέτρησης του διανύσματος Poynting στο SI εκφράζεται σε $\text{J/s} \cdot \text{m}^2 = \text{W/m}^2$



12.4 Ενέργεια μεταφερόμενη από ΗΜ κύματα

- Ας υπολογίσουμε το μέτρο του $\mathbf{S}$ για ένα επίπεδο ΗΜ κύμα $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = EB$
- Άρα $S = \frac{1}{\mu_0} EB$
- Αφού όμως $B=E/c \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \frac{c}{\mu_0} B^2$
- Σημαντικό είναι να ορίσουμε το μέσο όρο του S για επίπεδο αρμονικό ΗΜ κύμα για μια ή περισσότερες περιόδους. Αυτό ονομάζεται ένταση κύματος I και δίνεται από τη σχέση: $I = S_{av} = \frac{E_m B_m}{2\mu_0} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{c}{2\mu_0} B_m^2$
- Η σταθερά $\mu_0 c$ ονομάζεται εμπέδηση ή σύνθεση αντίσταση του κενού

$$\mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$



12.4 Ενέργεια μεταφερόμενη από ΗΜ κύματα

- Υπενθυμίζουμε ότι η ενέργεια ανά μονάδα όγκου u_e που σχετίζεται με το ηλ. πεδίο είναι: $u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$
- Και η ενέργεια ανά μονάδα όγκου u_m που σχετίζεται με το μαγν. πεδίο είναι: $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Γνωρίζοντας όμως ότι τα E και B ενός ΗΜ κύματος μεταβάλλονται ως προς το χρόνο, επομένως και οι πυκνότητες ενέργειας μεταβάλλονται ως προς το χρόνο
- Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $B=E/c$ και $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, άρα οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να ξαναγραφτούν ως εξής:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\left(\frac{E}{c}\right)^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2\mu_0} E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

- Άρα $u_m = u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Άρα σε ΗΜ κύμα, η στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο μαγν. πεδίο ισούται με τη στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο ηλ. πεδίο
- Συνεπώς η ολική πυκνότητα ενέργεια u ισούται με το άθροισμα των δύο πυκνοτήτων ενέργεια που οφείλονται στο ηλ. και μαγν. Πεδίο:

$$u = u_e + u_m = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

12.4 Ενέργεια μεταφερόμενη από ΗΜ κύματα

- Για να υπολογίσουμε το μέσο όρο της ολικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου για μια ή περισσότερες περιόδους ενός ΗΜ κύματος θα έχουμε: $u_{av} = \varepsilon_0 E_{av}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_m^2 = \frac{B_m^2}{2\mu_0}$

- Αν συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με τη μέση τιμή του S , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$I = S_{av} = cu_{av}$$

Άρα η ένταση ενός ΗΜ κύματος ισούται με τη μέση πυκνότητα ενέργειας επί την ταχύτητα του φωτός

12.5 Ορμή και πίεση ακτινοβολίας

- Τα ΗΜ κύματα μεταφέρουν και ορμή, εκτός από ενέργεια
- Άρα όταν ένα ΗΜ κύμα προσκρούει σε μια επιφάνεια, ασκεί πάνω της πίεση που ονομάζεται πίεση ακτινοβολίας
- Έστω ότι το ΗΜ κύμα μεταφέρει πάνω σε μια επιφάνεια, συνολική ενέργεια U μέσα σε χρόνο t
- Αν η επιφάνεια απορροφά όλη την προσπίπτουσα ενέργεια, ο Maxwell απέδειξε ότι η ολική ορμή p με την οποία το ΗΜ κύμα προσκρούει στην επιφάνεια είναι: $p = \frac{U}{c}$
- Επίσης η πίεση ακτινοβολίας P (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) που ασκεί το κύμα πάνω στην επιφάνεια (η οποία απορροφά πλήρως την ορμή και την ενέργεια του κύματος) είναι: $P = \frac{S}{c}$, όπου S το διάνυσμα Poynting
- Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σωστό για ένα μελανό σώμα που απορροφά όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία
- Στην περίπτωση τέλει ανάκλασης ενός ΗΜ κύματος πάνω σε μια επιφάνεια οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$p = \frac{2U}{c} \text{ και } P = \frac{2S}{c}$$

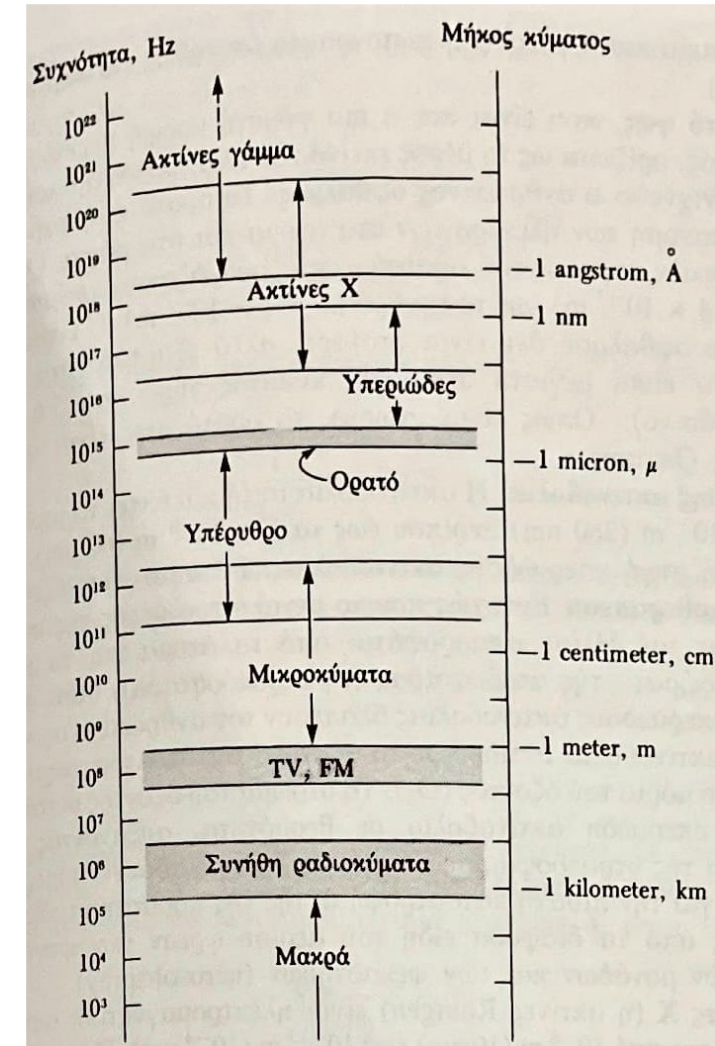
- Αυτό γιατί το κύμα που προσπίπτει δίνει στην επιφάνεια ορμή $\frac{U}{c}$ και άλλη τόση δίνει στην επιφάνεια το κύμα που ανακλάται

12.6 Το φάσμα της Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

- Είδαμε ότι όλα τα ΗΜ κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός c
- Τα κύματα αυτά μεταφέρουν ορμή και ενέργεια
- Πρώτος ο Hertz ανίχνευσε ΗΜ κύματα και επαλήθευσε τις προβλέψεις του Maxwell
- Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν πολλές μορφές ΗΜ κυμάτων που διαφέρουν μεταξύ τους σε συχνότητα και μήκος κύματος (αφού όλα διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός)
- Η συχνότητα συνδέεται με το μήκος κύματος ως εξής $c = \lambda f$

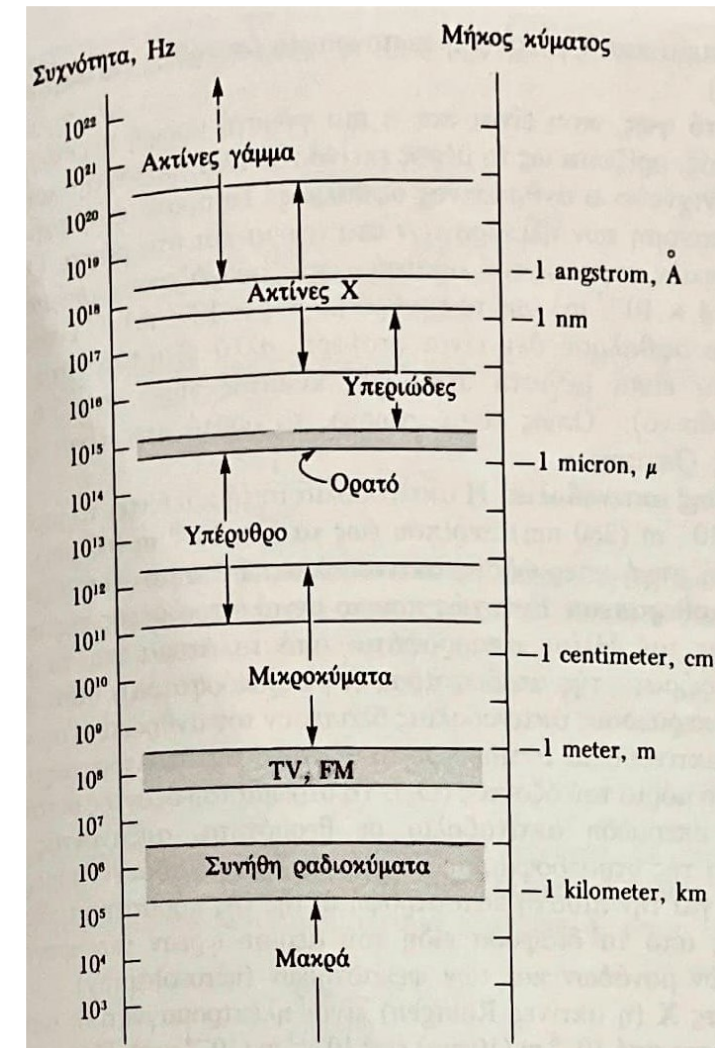
12.6 Το φάσμα της Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

- Στο σχήμα απεικονίζονται σχηματικά τα διάφορα είδη της ΗΜ ακτινοβολίας
- Ραδιοκύματα: Δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα (πχ LC) και χρησιμοποιούνται στη ραδιοφωνία και τηλεόραση
- Μικροκύματα: Έχουν μήκος κύματος από 30cm έως 1mm. Το μικρό μήκος κύματος τα κάνει χρήσιμα στα ραντάρ και στη μελέτη ατομικών/μοριακών ιδιοτήτων.
- Υπέρυθρα κύματα: Καλύπτουν το φάσμα από 1mm έως 700 nm. Τα κύματα αυτά εκπέμπονται από διάφορα θερμά σώματα και μόρια. Τα κύματα αυτά απορροφώνται πολύ εύκολα από τα περισσότερα υλικά και επανεμφανίζονται ως θερμότητα γιατί αυξάνουν τις ταλαντώσεις των ατόμων στο οποίο απορροφώνται
- Ορατό φως: Η πιο γνωστή ΗΜ ακτινοβολία που ανιχνεύει το ανθρώπινο μάτι. Παράγεται από ανακατανομή των ηλεκτρονίων στα άτομα και μόρια. Οι διάφορες περιοχές του ορατού φωτός ονομάζονται χρώματα, από το ιώδες 400nm έως το ερυθρό 700 nm
- Υπεριώδης ακτινοβολία: Καλύπτει μήκη κύματος από 380 nm έως 60 nm. Ο ήλιος αποτελεί ισχυρή πηγή αυτής της ακτινοβολίας. Ευτυχώς το μεγαλύτερο μέρος της απορροφάται από άτομα και μόρια της ατμόσφαιρας της γης. Η έκθεση σε μεγάλες ποσότητες υπεριώδης ακτινοβολία είναι βλαβερή για τον ανθρώπινο οργανισμό



12.6 Το φάσμα της Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

- Ακτίνες Χ: Είναι ΗΜ ακτινοβολία με μήκη κύματος από 10 nm έως 10^{-4} nm . Παράγονται από επιβράδυνση ταχέων ηλεκτρονίων καθώς αυτά προσκρούονται σε μεταλλικό στόχο. Οι ακτίνες Χ χρησιμοποιούνται στην ιατρική για διαγνώσεις και καταστροφή καρκινικών όγκων. Επίσης χρησιμοποιούνται σε επιστήμονικές έρευνες για τη μελέτη κρυσταλλικών δομών αφού το μήκος κύματος τους είναι συγκρίσιμο με την απόσταση των ατόμων σε στερεά σώματα. Πρέπει να αποφεύγεται άσκοπη έκθεση σε αυτές γιατί μπορεί να βλάψουν ζώντα κύτταρα.
- Ακτίνες γ: Είναι ΗΜ ακτινοβολία που εκπέμπεται από ορισμένους ραδιενεργούς πυρήνες και σε πυρηνικές αντιδράσεις. Τα μήκη κύματος είναι από 0.1 nm έως 10^{-5} nm . Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν τους οργανισμούς που τις απορροφούν. Αν πρέπει να είστε σε χώρους και έρχεστε σε επαφή με αυτή την ακτινοβολία πρέπει να φοράτε ειδικές στολές από βαρέα μέταλλα όπως πχ μόλυβδος.



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 12

- ✓ Οι εξισώσεις του Maxwell και οι ανακαλύψεις του Hertz
- ✓ Επίπεδα ΗΜ κύματα
- ✓ Ενέργεια μεταφερόμενη από ΗΜ κύματα
- ✓ Ορμή και πίεση ακτινοβολίας
- ✓ Το φάσμα της Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Ερωτήσεις;