



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

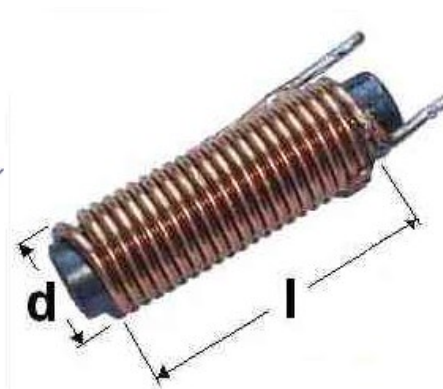
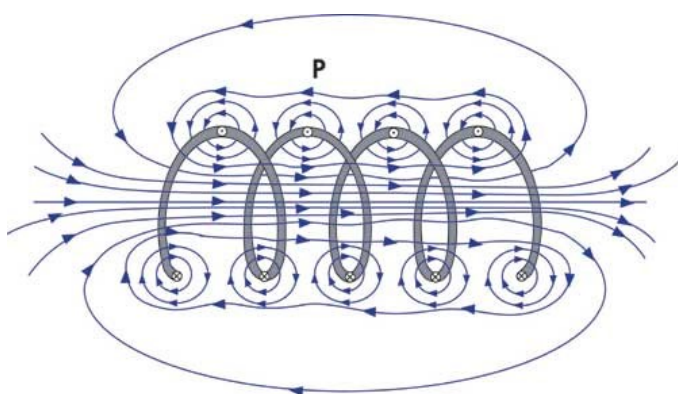
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

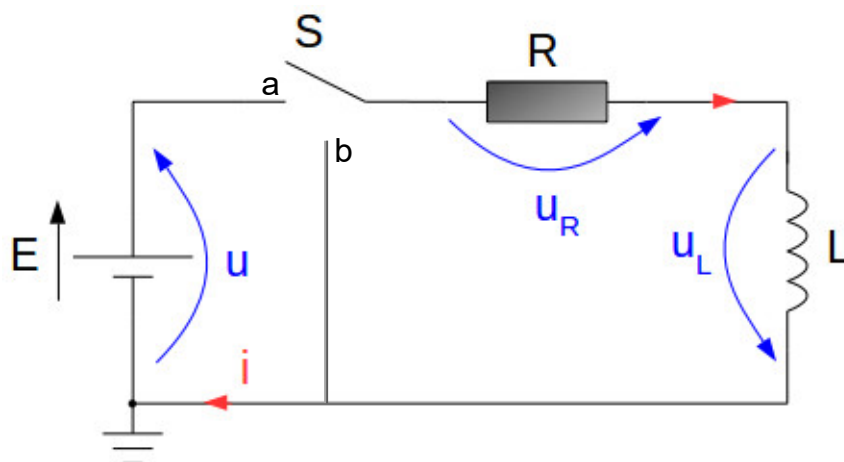
Εργαστήριο Ηλεκτρομαγνητισμού

Εργαστηριακή Άσκηση 3

Συντελεστής Αυτεπαγωγής Σωληνοειδούς



Αυτεπαγωγή



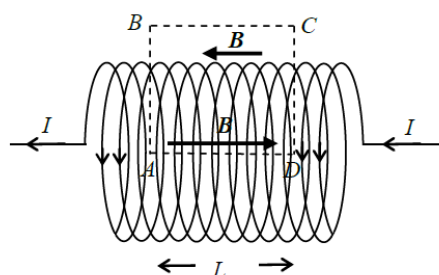
Σχήμα 1

Θεωρήστε ότι ένα απομονωμένο κύκλωμα αποτελείται από μία πηγή ΗΕΔ, ένα διακόπτη, μία αντίσταση και ένα πηνίο, όπως παρουσιάζεται στο ανωτέρω σχήμα. Όταν κλείσουμε το διακόπτη, το ρεύμα δεν αποκτά αμέσως, από τη μηδενική τιμή, τη μέγιστη τιμή του E/R . Και τούτο συμβαίνει διότι το εμποδίζει ο νόμος ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής (Νόμος Faraday).

Καθώς το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα αποκαθίσταται (αυξάνεται), αυξάνεται ταυτόχρονα και η ροή του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο πηνίο από το ρεύμα που το διαρρέει. Η αυξανόμενη αυτή ροή προκαλεί, «επάγει» μια ΗΕΔ, E_L , στο κύκλωμα που εναντιώνεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαπερνά το πηνίο. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, το ρεύμα επαγωγής που αναπτύσσεται από την επαγόμενη ΗΕΔ, E , αντιτίθεται στη μεταβολή του ρεύματος αγωγιμότητας, dI/dt , με συνέπεια να μειώνεται το συνολικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Για το λόγο αυτό το ρεύμα μεταβαίνει (καθυστερεί να αποκτήσει) τη μέγιστη (τελική) τιμή του. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυτεπαγωγή, διότι το ίδιο το κύκλωμα προκαλεί τη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Και ΗΕΔ εξ' αυτεπαγωγής, E , ονομάζεται η ΗΕΔ που δημιουργείται κατά τον τρόπο αυτό.



Heinrich Lenz
(1804-1865)



Σχήμα 2

Ένα ιδανικό (εάν η πυκνότητα των σπειρών του είναι μεγάλη και το μήκος του σωληνοειδούς είναι αρκετά μεγαλύτερο από την ακτίνα των σπειρών) σωληνοειδές (βλ. Σχ.2) ονομάζεται επαγωγέας ή πηνίο. Το πηνίο αποθηκεύει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του με ανάλογο τρόπο, όπως ένας πυκνωτής αποθηκεύει ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του, όταν εφαρμοστεί στα άκρα του διαφορά δυναμικού. Το πεδίο B είναι ομογενές στο εσωτερικό του, με διεύθυνση αυτή του άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς,

εξαιρουμένων των περιοχών κοντά στα άκρα του. Επίσης, στο εξωτερικό μέρος του ιδανικού σωληνοειδούς, επειδή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι πολύ αραιές, το πεδίο B είναι πολύ μικρό (πρακτικά μηδέν).

Από το Νόμο του *Ampere*, για την κλειστή διαδρομή *ABCD* (βλ. Σχ.2) προκύπτει:

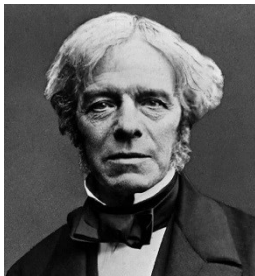
$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{περικλείον}} \Rightarrow B \cdot L = \mu_0 \cdot nL \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I \quad (1)$$

Η φορά του ομογενούς μαγνητικού πεδίου καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, με τα δάκτυλα να δείχνουν την φορά του ρεύματος και τον αντίχειρα αυτή του πεδίου.

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν *ιδανικό* επαγωγέα με *N* σπείρες και μήκος *l*, (άρα $n = N/l$) συνδεδεμένο σε ηλεκτρικό κύκλωμα, όπως φαίνεται στο Σχ.3.

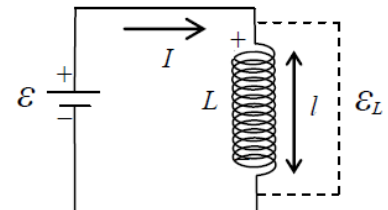


Andre Marie Ampere
(1775-1836)



Michael Faraday
(1791-1867)

Σύμφωνα με τον Νόμο του Faraday, για την *αυτεπαγωγή*, η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται με το αντίθετο του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής. Η μαγνητική ροή όμως είναι ανάλογη με το μαγνητικό πεδίο, που με τη σειρά του είναι, σύμφωνα με το Νόμο του *Ampere*, ανάλογο με το ρεύμα το που διαρρέει το κύκλωμα. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η



Σχήμα 3

εξ' αυτεπαγωγής ΗΕΔ, $\mathcal{E}_L$, είναι πάντοτε ανάλογη με το χρονικό ρυθμό μεταβολής του ρεύματος:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N \cdot \vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} = -NA \frac{dB}{dt} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{E}_L = -\mu_0 nNA \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

Η σταθερά αναλογίας ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής του επαγωγέα (σωληνοειδούς ή πηνίου):

$$L = \mu_0 nNA = \mu_0 n^2 lA \quad (3)$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} NA^{-2}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Επίσης, συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:



Joseph Henry
(1797-1878)

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} \Rightarrow \Phi_m = L \cdot I \text{ και } L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) θεωρείται, γενικά, ο ορισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής ενός πηνίου ανεξάρτητα από το σχήμα, το μέγεθος ή τα άλλα χαρακτηριστικά του. Όπως η αντίσταση είναι μέτρο της εναντίωσης προς το ρεύμα, έτσι και η αυτεπαγωγή είναι, κατά κάποιον τρόπο, το μέτρο εναντίωσης στη μεταβολή του ρεύματος. Μονάδα τού συντελεστή αυτεπαγωγής στο SI είναι το Henry (H), προς τιμήν του Joseph Henry (1797-1878), το οποίο ορίζεται ως $H = V \cdot s/A$.

Κυκλώματα RL

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του Σχήματος 1 που περιλαμβάνει εκτός της πηγής *E*, μια αντίσταση *R* και έναν ιδανικό επαγωγέα (ιδανικό πηνίο) με συντελεστή αυτεπαγωγής *L*. Το κύκλωμα αυτό ονομάζεται κύκλωμα RL. Η συμπεριφορά ενός επαγωγέα σε ένα κύκλωμα βασίζεται στην εξίσωση (4), σύμφωνα με την οποία μια εξ' αυτεπαγωγής ΗΕΔ, $\mathcal{E}_L$, αναπτύσσεται στα άκρα του, με πολικότητα που εξαρτάται από την μεταβολή του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου. Όταν δηλαδή το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο αυξάνεται, μια επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$, αντίθετης πολικότητας από αυτή της πηγής αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου. Αντιθέτως, όταν το ρεύμα που δίνει η πηγή στο κύκλωμα ελαττώνεται, στα άκρα του πηνίου αναπτύσσεται επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$, ιδίας πολικότητας με αυτή της πηγής, τέτοια ώστε να αναιρέσει την ελάττωση του ρεύματος στο κύκλωμα. Όταν το ρεύμα είναι

σταθερό, τότε το πηνίο διαρρέεται από αυτό το ρεύμα και συμπεριφέρεται σαν ένας απλός αγωγός, χωρίς να συμβαίνει κανένα επαγωγικό φαινόμενο. Υποθέτουμε πάντοτε ότι η αυτεπαγωγή του υπόλοιπου κυκλώματος είναι αμελητέα, συγκρινόμενη με την αυτεπαγωγή του πηνίου. Επίσης, υποθέτουμε ότι η τόσο η ωμική αντίσταση της πηγής όσο και του πηνίου είναι αμελητέες σε σύγκριση με την αντίσταση R .

Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο διακόπτης S κλείνει στη θέση a (βλ. Σχ.1) και τότε ρεύμα I αρχίζει να διαρρέει το κύκλωμα RL . Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff (δεξιόστροφα) για το βρόχο σε χρονική στιγμή t , λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$E - IR + \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow E - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I - \frac{E}{L} = 0 \quad (5)$$

όπου $\left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} = \frac{E}{L}$, άρα όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά αυτεπαγωγής L , τόσο μικρότερος είναι ο αρχικός ρυθμός αύξησης του ρεύματος. Όταν το ρεύμα τελικά φθάσει στην μέγιστη τιμή του, τότε η μεταβολή του ρεύματος μηδενίζεται, οπότε και πάλι από την (5): $I_{max} = \frac{E}{R}$.

Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (5) με βάση τις ανωτέρω οριακές συνθήκες, προκύπτει:

$$I = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_{max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6)$$

Από την εξίσωση (6), συμπεραίνουμε ότι το ρεύμα στο κύκλωμα RL αυξάνεται από μηδέν έως ασυμπτωτικά την μέγιστη τιμή, I_{max} (βλ. Σχ.4).

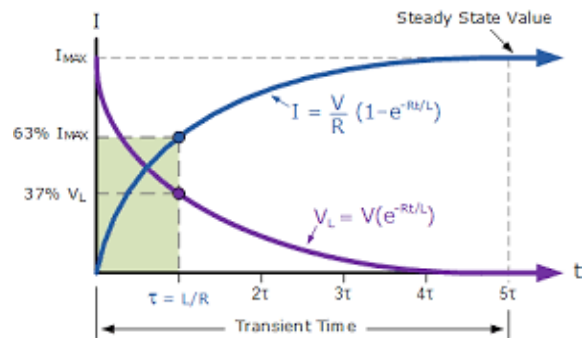
Για χρόνο $\tau = L/R$, το ρεύμα γίνεται $0.6321 \cdot I_{max}$. Ο χρόνος τ ονομάζεται *επαγωγική σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL* . Για μεγάλο χρόνο $t \rightarrow \infty$, (πρακτικά $t \approx 5\tau$) η τιμή του ρεύματος γίνεται I_{max} (βλ. Σχ.5). Όσο μικρότερη είναι η σταθερά χρόνου τ , τόσο πιο γρήγορα επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή του ρεύματος. Για δεδομένη αντίσταση R , όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής L , τόσο πιο αργά επέρχεται η μεγιστοποίηση του ρεύματος στο κύκλωμα.

Η *επαγωγική σταθερά χρόνου τ* , μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μετασχηματίζοντας τη σχέση (6) σε γραμμική σχέση ως προς το χρόνο, λογαριθμίζοντας και τα δύο μέρη:

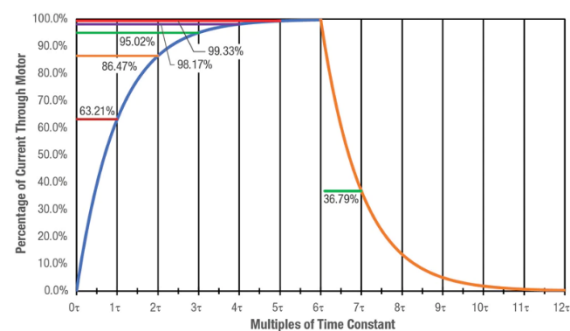
$$\ln[E - V_R(t)] = \ln(E) - (1/\tau) \cdot t \quad (7)$$

Ένας άλλος, γρήγορος τρόπος υπολογισμού της *σταθεράς χρόνου*, τ είναι η απευθείας μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για την αύξηση της τάσης

$V_R(t) = I(t) \cdot R$ από το μηδέν ή V_R^{min} (που είναι η στιγμή που εφαρμόζεται η τάση E), στο $(1 - e^{-1}) \cong 0.6321$ της τελικής τιμής E ή της $(V_R^{max} - V_R^{min})$, με την προϋπόθεση ότι εξασφαλίζεται η διατήρηση της E τουλάχιστον για χρόνο $t \approx 5\tau$.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι αφού έχει επιτευχθεί η μέγιστη τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα RL του σχήματος 1, μεταγάγουμε το διακόπτη S στη θέση b . Η πηγή ΗΕΔ απομονώνεται και το πηνίο αρχίζει να λειτουργεί ως πηγή ενέργειας, διότι έχει αποθηκεύσει ενέργεια μαγνητικού πεδίου $U_B = \frac{1}{2}LI_{max}^2$. Η ενέργεια αυτή αποδίδεται ως ηλεκτρική στην ωμική αντίσταση R , η οποία δαπανά ενέργεια, με αποτέλεσμα το ρεύμα στο κύκλωμα RL να μειώνεται με το χρόνο. Η ελάττωση αυτή του ρεύματος έχει ως συνέπεια τη δημιουργία εκ νέου επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$, ίδιας πολικότητας με αυτή της πηγής που απομονώθηκε. Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff (δεξιόστροφα) για το νέο βρόχο σε χρονική στιγμή t , λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$-IR + \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow L \frac{dI}{dt} = -IR \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad (8)$$

όπου $I_{t=0} = I_{max}$. Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (8) προκύπτει:

$$I = I_{max} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9)$$

(βλ. και Σχ.5). Αντικαθιστώντας τη σχέση (9) στην (4), προκύπτει ότι επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ στο πηνίο ελαττώνεται με τον ίδιο τρόπο:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_{max} \frac{d}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} = RI_{max} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10)$$

Πειραματική Διαδικασία

Ο υπολογισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής L του σωληνοειδούς γίνεται στην άσκηση αυτή με δύο μεθόδους. Η πρώτη βασίζεται στην καθυστέρηση, λόγω φαινομένων αυτεπαγωγής, με την οποία αυξάνεται το ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα RL σε σειρά, όταν συνδέσουμε πηγή συνεχούς τάσης. Για να γίνει παρατηρήσιμος ο (μικρός) χρόνος καθυστέρησης, δηλαδή η *επαγωγική σταθερά χρόνου* τ , χρησιμοποιείται παλμογράφος. Η πηγή συνεχούς τάσης (μαζί με το διακόπτη) προσεγγίζεται με γεννήτρια τετραγωνικής κυματομορφής της οποίας η περίοδος είναι πολύ μεγαλύτερη από την καθυστέρηση που θέλουμε να μετρήσουμε ($T \approx 5\tau$). Στο πείραμα μετρείται πρώτα η *επαγωγική σταθερά χρόνου* τ , του κυκλώματος RL και στη συνέχεια υπολογίζεται ο συντελεστής αυτεπαγωγής L .

Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην αναλυτική έκφραση (3) που ισχύει για ιδανικό σωληνοειδές, σύμφωνα με την οποία ο συντελεστής αυτεπαγωγής L εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σωληνοειδούς. Τα μεγέθη που μετρούνται στη μέθοδο αυτή είναι το μήκος, η επιφάνεια διατομής και ο αριθμός των σπειρών του πηνίου και στη συνέχεια υπολογίζεται το L .

Όργανα:

- Σωληνοειδές
- Αντίσταση
- Μέτρο
- Πολύμετρο
- Γεννήτρια Σήματος
- Ψηφιακός Παλμογράφος

Το στοιχείο L του κυκλώματός παρέχεται από ένα σωληνοειδές. Η ωμική αντίσταση του κυκλώματος αποτελείται από μία εξωτερική αντίσταση R_I ($\sim 500 \Omega$) η οποία επιλέγεται πολύ μεγαλύτερη από τη (μικρή) ωμική αντίσταση r , που έχει το χάλκινο σύρμα του πηνίου (η r είναι σε σειρά με την R). Έτσι προσεγγίζεται η ολική ωμική αντίσταση.

- 1) Μετρήσετε με το πολύμετρο την εξωτερική αντίσταση R_I καθώς και την αντίσταση r στα άκρα του πηνίου.
- 2) Μετρήσετε το μήκος και τη διατομή του σωληνοειδούς. Ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους δίνεται ότι είναι: $n = 9.524 \text{ turns/cm}$.
- 3) **1^η μέθοδος:** Υπολογίστε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του σωληνοειδούς από τα γεωμετρικά του στοιχεία και τη σχέση (3).
- 4) Συνδέστε τη γεννήτρια σήματος και τροφοδοτείστε το κύκλωμα RL με σήμα τετραγωνικής κυματομορφής 5 kHz , $\sim 500 \text{ mV } V_{p-p}$, ώστε να απεικονίζεται ικανοποιητικά η χρονική εξέλιξη του ρεύματος του σωληνοειδούς στον παλμογράφο.
- 5) Το ένα κανάλι του παλμογράφου συνδέεται και απεικονίζει την τάση από τη γεννήτρια E , και το δεύτερο την πτώση τάσης V_R στα άκρα της αντίστασης R_I . Η μία άκρη της αντίστασης R πρέπει να είναι γειωμένη στη γεννήτρια σήματος. Ο διακόπτης εισόδου και στα δύο κανάλια θα πρέπει να είναι στη θέση DC. Η τάση V_R είναι ανάλογη του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.
- 6) Ρυθμίστε κατάλληλα τον παλμογράφο ώστε σχεδόν σε όλο το βαθμονομημένο μέρος της οθόνης του να απεικονίζεται μεταβολή της V_R παρόμοια με τα Σχ.4 και Σχ.5.
- 7) **2^η μέθοδος:** Χρησιμοποιώντας τους δρομείς (cursors) του παλμογράφου, να υπολογίσετε την επαγωγική σταθερά χρόνου τ ($\tau=L/R$) του κυκλώματος RL (για χρονική στιγμή όπου $V_R \approx 0.6321 \cdot V_R^{max}$ κατά την αύξηση του ρεύματος και για χρονική στιγμή όπου $V_R \approx 0.3679 \cdot V_R^{max}$ κατά τη μείωση του ρεύματος, αντίστοιχα). Στη συνέχεια υπολογίστε το συντελεστή αυτεπαγωγής L , λαμβάνοντας υπόψιν την εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος που έχετε χρησιμοποιήσει και το μέσο όρο των χρόνων που βρήκατε για τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος (κατά την φόρτιση και αποφόρτιση του πηνίου).
- 8) Συγκρίνετε τις τιμές για το συντελεστή αυτεπαγωγής L του σωληνοειδούς που προέκυψαν από την εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων. Ποια μέθοδο θεωρείτε, κατά τη γνώμη σας, πιο αξιόπιστη και γιατί;
- 9) Στη συνέχεια αντικαταστήστε την αντίσταση R_I των $\sim 500\Omega$ με μια άγνωστη αντίσταση R_2 και παρατηρήστε πως μεταβάλλεται η σταθερά χρόνου τ . Με βάση την αλλαγή της σταθεράς χρόνου τ , η άγνωστη αντίσταση R_2 περιμένετε να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη σε σχέση με την R_I ;
- 10) Υπολογίστε την άγνωστη αντίσταση R_2 χρησιμοποιώντας την τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής L που υπολογίσατε στο βήμα 7 και τη σταθερά χρόνου που μετρήσατε στο βήμα 8. Είναι αναμενόμενο αυτό το αποτέλεσμα;
- 11) Αν χρησιμοποιούσατε μια πολύ μικρή ($R \ll 500\Omega$) ή μια πολύ μεγάλη ($R \gg 500\Omega$) εξωτερική αντίσταση, ποιο θα ήταν το πρόβλημα σε κάθε περίπτωση για τον υπολογισμό της σταθεράς χρόνου τ του κυκλώματος;

Βιβλιογραφία

- Δ.Σ. Βλάχος, 2015, “Βασικά Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού”, www.kallipos.gr.
- H.D. Young, 1994, “Πανεπιστημιακή Φυσική, τόμος Β”, 8^η έκδοση, εκδ. Παπαζήση.
- J.D. Kraus and D.Fleisch, 2012, “Ηλεκτρομαγνητισμός και Εφαρμογές”, 5^η έκδοση, εκδ. Τζιόλα.
- Ν.Βακάκης Κ.Μπινιέρης, 2006, Εργαστηριακές Ασκήσεις Εφαρμοσμένου Ηλεκτρομαγνητισμού, Τμήμα Ηλεκτρονικής Τ.Ε.Ι. Κρήτης, Χανιά.