Λύση της Άσκησης 5 του Κεφαλαίου 7 του βιβλίου της Ζ. Δουλγέρης

Μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό μοντέλο του ρομπότ μέσω της μεθόδου Lagrange, ως εξής:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau}, \tag{1}$$

όπου $L \in \mathbb{R}$ η Λανγκραζιανή του συστήματος που είναι:

$$L = T - P, \tag{2}$$

με $T \in \mathbb{R}^+$ και $P \in \mathbb{R}^+$την κινητική και δυναμική ενέργεια αντίστοιχα. Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$T = \frac{1}{2}m_1\|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\boldsymbol{v}_2\|^2, \tag{3}$$

όπου $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ οι γραμμικές ταχύτητες των μαζών 1 και 2 αντίστοιχα. Παρατηρήστε πως οι γωνιακές ταχύτητες των μαζών δεν εμπλέκονται στην κινητική ενέργεια, καθώς οι μάζες θεωρούνται σημειακές. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P = m_1 g h_1 + m_2 g h_2, \tag{4}$$

όπου $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ το ύψος της κάθε μάζας από την στάθμη αναφοράς.

Οι θέσεις των μαζών, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^3$, ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} L_1 c_1 \\ L_1 s_1 \\ \underbrace{0}_{h_1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} L_1 c_1 + L_2\, c_2\, c_1 \\ L_1 s_1 + L_2\, c_2\, s_1 \\ \underbrace{L_2\, s_2}_{h_2} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Οι παράγωγοι των $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ μας δίνει την ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ της κάθε μάζας αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$\boldsymbol{v}_1 \triangleq \dot{\boldsymbol{p}}_1 = \begin{bmatrix} -L_1\, s_1\, \dot{q}_1 \\ L_1 c_1\, \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_2 \triangleq \dot{\boldsymbol{p}}_2 = \begin{bmatrix} -L_1\, s_1\, \dot{q}_1 - L_2\, s_2\, c_1\, \dot{q}_2 - L_2\, c_2\, s_1\, \dot{q}_1 \\ L_1 c_1\, \dot{q}_1 - L_2\, s_2\, s_1\, \dot{q}_2 + L_2\, c_2\, c_1\, \dot{q}_1 \\ L_2\, c_2\, \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Παίρνοντας τώρα τα τετράγωνα των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, έχουμε:

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = L_1^2\, s_1^2\, \dot{q}_1^2 + L_1^2\, c_1^2\, \dot{q}_1^2 = L_1^2\, \dot{q}_1^2 (s_1^2 + c_1^2) = L_1^2\, \dot{q}_1^2,$$
$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}_2\|^2 = {} & L_1^2 s_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 s_2^2 c_1^2 \dot{q}_2^2 + L_2^2 c_2^2 s_1^2 \dot{q}_1^2 \cancel{+ 2L_1 s_1 \dot{q}_1 L_2 s_2 c_1 \dot{q}_2} \\ & + 2L_1 s_1 \dot{q}_1 L_2 c_2 s_1 \dot{q}_1 \cancel{+ 2L_2 s_2 c_1 \dot{q}_2 L_2 c_2 s_1 \dot{q}_1} + L_1^2 c_1^2 \dot{q}_1^2 \\ & + L_2^2 s_2^2 s_1^2 \dot{q}_2^2 + L_2^2 c_2^2 c_1^2 \dot{q}_1^2 \cancel{- 2L_1 c_1 \dot{q}_1 L_2 s_2 s_1 \dot{q}_2} \\ & + 2L_1 c_1 \dot{q}_1 L_2 c_2 c_1 \dot{q}_1 \cancel{- 2L_2 s_2 s_1 \dot{q}_2 L_2 c_2 c_1 \dot{q}_1} + L_2^2 c_2^2\, \dot{q}_2^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ενοποιώντας (βγάζοντας κοινούς παράγοντες) στους όρους που φαίνονται με το ίδιο χρώμα στην (7) και λαμβάνοντας υπόψη πως $s_i^2 + c_i^2 = 1$, έχουμε την παρακάτω σχέση για το $\|\boldsymbol{v}_2\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}_2\|^2 &= L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 s_2^2 \dot{q}_2^2 + L_2^2 c_2^2 \dot{q}_1^2 + 2L_1 \dot{q}_1 L_2 c_2 \dot{q}_1 + L_2^2 c_2^2\, \dot{q}_2^2 = \\ & (L_1^2 + L_2^2 c_2^2 + 2L_1 L_2 c_2)\dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 = \\ & (L_1 + L_2 c_2)^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την $\|\boldsymbol{v}_1\|^2$ και την $\|\boldsymbol{v}_2\|^2$ από τις (7) και (8) αντίστοιχα στην (3), έχουμε για την κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m_1 L_1^2\, \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (L_1 + L_2 c_2)^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2, \tag{9}$$

ή αλλιώς:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 L_1^2 + m_2 (L_1 + L_2 c_2)^2)\, \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2 \Longrightarrow \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}(m_1L_1^2 + m_2(L_1 + L_2c_2)^2) & 0 \\ 0 & m_2L_2^2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix}.$$	

Αντικαθιστώντας τον z άξονα από την σχέση (5) στην σχέση (4) έχουμε την δυναμική ενέργεια που προκύπτει η παρακάτω:

$$P = m_2gL_2s_2.$$	(11)

Αντικαθιστώντας τις T και P από τις (10) και (11) αντίστοιχα στην (2), έχουμε την Λανγκραζιανή, η οποία είναι:

$$L = \frac{1}{2}(m_1L_1^2 + m_2(L_1 + L_2c_2)^2)\,\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\dot{q}_2^2 - m_2gL_2s_2.$$	(12)

Κάνουμε τις παρακάτω πράξεις (θεωρούμε για τις πράξεις, για ευκολία στην παρουσίαση, πως η κλίση δίνεται ως διάνυσμα στήλης):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix}(m_1L_1^2 + m_2(L_1 + L_2c_2)^2)\,\dot{q}_1 \\ m_2L_2^2\dot{q}_2\end{bmatrix},$$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \begin{bmatrix}(m_1L_1^2 + m_2(L_1 + L_2c_2)^2)\ddot{q}_1 - 2m_2(L_1 + L_2c_2)L_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ m_2L_2^2\,\ddot{q}_2\end{bmatrix},$$ $$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix}0 \\ -m_2(L_1 + L_2c_2)L_2s_2\dot{q}_1^2 - m_2gL_2c_2\end{bmatrix}.$$	(13)

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις από την (13) στην (1), παίρνουμε το μοντέλο του ρομπότ που είναι:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\,\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau},$$	(14)

όπου:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 (L_1 + L_2 c_2)^2 & 0 \\ 0 & m_2 L_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -2 m_2 (L_1 + L_2 c_2) L_2 s_2 \dot{q}_2 & 0 \\ m_2 (L_1 + L_2 c_2) L_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g L_2 c_2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$