

2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ⁽¹⁾

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Εισαγωγή

Η δημιουργία των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων 3ου βαθμού. Αν στην $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$ θέσουμε $x = y - \frac{\beta}{3a}$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής $x^3 = px + q$. Στις αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad \text{όπου} \quad D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Στην περίπτωση που η “διακρίνουσα” D είναι θετική, ο τύπος αυτός δίνει αμέσως μια ρίζα της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στην $x^3 = 9x + 28$ είναι $D = 169$ και ο τύπος δίνει $x = 4$, που είναι η μοναδική πραγματική ρίζα. Διαπιστώθηκε, όμως, τότε ένα φαινόμενο τελείως διαφορετικό από την περίπτωση των εξισώσεων 2ου βαθμού: Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως, για παράδειγμα, η $x^3 = 15x + 4$, που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2 + \sqrt{3}$, $-2 - \sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Όπως είναι φανερό, οι μαθηματικοί βρέθηκαν, εδώ, μπροστά σε ένα δίλημμα: ή θα έπρεπε να εγκαταλείψουν τη μέθοδο των Ferro-Tartaglia ως γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού ή να δεχτούν ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως το 4, μπορεί να εκφραστεί με παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Η δεύτερη άποψη φαινόταν αδιανόητη αλλά αυτό δεν

⁽¹⁾ Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο: «Μαθηματικά Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης» των: Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

εμπόδισε την εφαρμογή των αλγεβρικών πράξεων σε τέτοιες παραστάσεις. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο R. Bombelli, κάνοντας τολμηρές υποθέσεις, βρήκε ότι ισχύει $(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121}$ και $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}$. Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (1) προκύπτει αμέσως ότι $x=4$, δηλαδή το αδιανόητο γίνεται πραγματικότητα! Οι αριθμοί της μορφής $a+bi$ με $i=\sqrt{-1}$, που ονομάστηκαν αρχικά φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε αναπόσπαστο εργαλείο των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους στις άλλες επιστήμες. Ο J. Hadamard, ο οποίος το 1896 απέδειξε με χρήση της μιγαδικής ανάλυσης το “θεώρημα των πρώτων αριθμών”, έγραψε ότι:

“Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών”.

Το Σύνολο $\mathbb{C}$ των Μιγαδικών Αριθμών

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την “αδυναμία” αυτή, διευρύνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα σύνολο $\mathbb{C}$, το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το $\mathbb{R}$, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$, δηλαδή ένα στοιχείο i , τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
 - Όλα τα στοιχεία της μορφής bi , που είναι γινόμενα των στοιχείων του $\mathbb{R}$ με το i και
 - Όλα τα αθροίσματα της μορφής $a+bi$, με a και b πραγματικούς αριθμούς.
- Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το $\mathbb{C}$ **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$,
- Κάθε στοιχείο z του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Η έκφραση $a + \beta i, a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ακριβώς ό,τι λέμε **μιγαδικό αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού a και του βi , τον οποίο ονομάζουμε **φανταστικό αριθμό**. Ο a λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\text{Re}(z)$, ενώ ο β λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\text{Im}(z)$. Επιπλέον, στο $\mathbb{C}$ κάθε πραγματικός αριθμός a εκφράζεται ως $a + 0i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός βi εκφράζεται ως $0 + \beta i$.

Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός $z = a + \beta i$, εννοούμε ότι οι a και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $a + \beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $a = \gamma$ και $\beta = \delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$a + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow a = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

Επομένως, επειδή $0 = 0 + 0i$, έχουμε

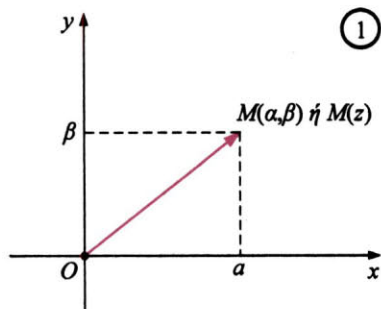
$$a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι, κατά την επέκταση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$, οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών οι οποίες ισχύουν στο $\mathbb{N}$, μεταφέρονται και στο $\mathbb{Z}$. Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$ και από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$. Στην επέκταση, όμως, από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο $\mathbb{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν και στο $\mathbb{C}$, εν τούτοις η διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό αριθμό $a + \beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(a, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε σημείο $M(a, \beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $a + \beta i$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $a + \beta i$. Αν θέσουμε $z = a + \beta i$, τότε το σημείο $M(a, \beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.

Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(a, 0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $a = a + 0i$, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού



ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0, \beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i = 0 + \beta i$

Ένας μιγαδικός $z = a + \beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(a, \beta)$.

2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{C}$ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον ορισμό του $\mathbb{C}$, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διάνυσμα $a + \beta x$ στο $\mathbb{R}$, όπου βέβαια αντί για x έχουμε το i . Έτσι:

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

$$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i.$$

Για παράδειγμα, $(3 + 4i) + (5 - 6i) = (3 + 5) + (4 - 6)i = 8 - 2i$.

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $a + \beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma + \delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma - \delta i$, έχουμε:

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

Δηλαδή

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

Για παράδειγμα

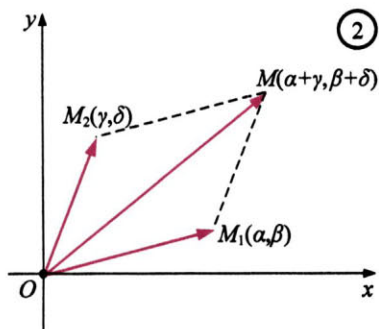
$$(3 + 4i) - (5 - 6i) = (3 - 5) + (4 + 6)i = -2 + 10i.$$

Αν $M_1(a, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(a + \gamma, \beta + \delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



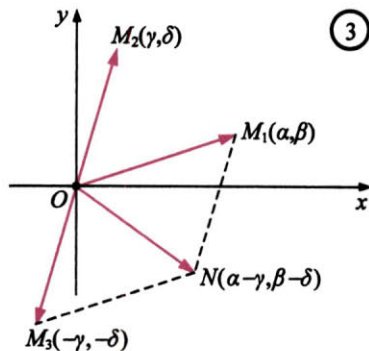
“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.

Επίσης, η διαφορά

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(a - \gamma, \beta - \delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (a + \beta i)(\gamma + \delta i) &= a(\gamma + \delta i) + \beta i(\gamma + \delta i) = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + (\beta i)(\delta i) = \\ &= a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i.$$

Για παράδειγμα,

$$(3 + 4i) \cdot (5 - 6i) = 15 - 18i + 20i - 24i^2 = (15 + 24) + (20 - 18)i = 39 + 2i.$$

Ειδικότερα, έχουμε: $(a + \beta i)(a - \beta i) = a^2 + \beta^2$. Ο αριθμός $a - \beta i$ λέγεται **συζυγής** του $a + \beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{a + \beta i}$. Δηλαδή,

$$\overline{a + \beta i} = a - \beta i.$$

Επειδή είναι και $\overline{a - \beta i} = a + \beta i$, οι $a + \beta i$, $a - \beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i}$, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$, στη μορφή

$\kappa + \lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(a + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{(a\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - a\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Για παράδειγμα: $\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{1+9} = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$

Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \dots, \text{ και γενικά } z^v = z^{v-1} \cdot z,$$

για κάθε θετικό ακέραιο v , με $v > 1$. Επίσης, αν $z \neq 0$, ορίζουμε

$$z^0 = 1, \quad z^{-v} = \frac{1}{z^v} \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } v.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot i^3 = -i,$$

δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^v επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i , γράφουμε τον εκθέτη v στη μορφή $v = 4\rho + \nu$, όπου ρ το πηλίκο και ν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του v με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^v = i^{4\rho + \nu} = i^{4\rho} i^\nu = (i^4)^\rho i^\nu = 1^\rho i^\nu = i^\nu = \begin{cases} 1, & \text{αν } \nu = 0 \\ i, & \text{αν } \nu = 1 \\ -1, & \text{αν } \nu = 2 \\ -i, & \text{αν } \nu = 3 \end{cases}$$

Για παράδειγμα:

$$i^{14} = i^{3 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$$

$$i^{19} = i^{4 \cdot 4 + 3} = i^3 = -i$$

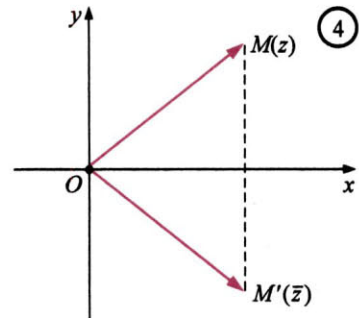
$$i^{16} = i^{4 \cdot 4 + 0} = i^0 = 1$$

$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i.$$

Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαίτερα σε αυτούς.

- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(a, \beta)$ και $M'(a, -\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = a + \beta i$ και $\bar{z} = a - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = a + \beta i$ και $\bar{z} = a - \beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2a \\ z - \bar{z} &= 2\beta i. \end{aligned}$$

- Αν $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ 2. \quad & \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ 3. \quad & \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ 4. \quad & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(a + \gamma) + (\beta + \delta)i} \\ &= (a + \gamma) - (\beta + \delta)i = (a - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n. \end{aligned}$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

Για παράδειγμα,
$$\left[\frac{(2-3i)^3}{4+5i} \right] = \left[\frac{(2-3i)}{4+5i} \right]^3 = \left(\frac{2+3i}{4-5i} \right)^3.$$

Επίλυση της Εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$

Επειδή $i^2 = -1$ και $(-i)^2 = i^2 = -1$, η εξίσωση $x^2 = -1$ έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1 = i$ και $x_2 = -i$. Ομοίως, η εξίσωση $x^2 = -4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1 = 2i$ και $x_2 = -2i$, αφού

$$z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \cdot 4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 2i \quad \text{ή} \quad z = -2i.$$

Εύκολα, όμως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο $\mathbb{C}$. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \text{με} \quad a, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a \neq 0.$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \frac{-\beta}{2a}$
- $\Delta < 0$. Τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4a^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z + \frac{\beta}{2a} \right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $z^2 - 5z + 6 = 0$ έχει $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ και οι λύσεις της είναι: $z_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $z_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Όμως, η εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$ έχει

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i, \quad z_2 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου n να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n.$$

ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος n και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο επίσης i . Επομένως, $S = i \frac{i^n - 1}{i - 1}$, οπότε, λόγω της ισότητας $n = 4\rho + \nu$ της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\nu = 0$. Τότε $n = 4\rho$, οπότε $S = i \frac{1 - 1}{i - 1} = 0$
- $\nu = 1$. Τότε $n = 4\rho + 1$, οπότε $S = i \frac{i - 1}{i - 1} = i$
- $\nu = 2$. Τότε $n = 4\rho + 2$, οπότε $S = i \frac{-1 - 1}{i - 1} = \frac{-2i}{i - 1} = \frac{2i}{1 - i} = \frac{2i(1 + i)}{2} = -1 + i$
- $\nu = 3$. Τότε $n = 4\rho + 3$, οπότε $S = i \frac{-i - 1}{i - 1} = \frac{1 - i}{i - 1} = -1.$

2. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + yi$, τότε:

$$\begin{aligned}
 \frac{z-1}{z-2i} &= \frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} \\
 &= \frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2} \\
 &= \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2} i.
 \end{aligned}$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $x^2-x+y^2-2y=0$ και $x^2+(y-2)^2 \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{και} \quad (x,y) \neq (0,2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

β) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$2x+y-2=0 \quad \text{και} \quad x^2+(y-2)^2 \neq 0.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x+y-2=0$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι:
 - πραγματικός αριθμός
 - φανταστικός αριθμός.
- Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:
 - $(x+y) + (x-y)i = 3-i$
 - $\sqrt{3x^2+x-6} + (x^2-3)i = 2+i$
 - $9-27i = (3x+2y) - yi$.

3. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i$, 1 , i , $-2i$, $3+4i$, $3-4i$, 5 , 0 .

4. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.

β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.

γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $a + bi$

α) $(-4+6i) + (7-2i)$

β) $(3-2i) - (6+4i)$

γ) $(3+4i) + (-8-7i) + (5+3i)$

δ) $(3+2i)(4+5i)$

ε) $3i(6+i)$

στ) $(4+3i)(4-3i)$

ζ) $i(3+i)(2-i)$.

6. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $a + bi$:

α) $\frac{1}{1-i}$

β) i^6

γ) $i^2 + 2i + 1$

δ) $(1+i\sqrt{3})^2$

ε) $\frac{3+i}{2-i}$

στ) $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

α) $(3-2i)^2 - (x+iy) = x - yi$

β) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$

γ) $(3-2i)(2x-iy) = 2(2x-iy) + 2i - 1$.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$

β) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$.

9. Ποιος είναι ο $\bar{z}$, όταν:

α) $z = -5+7i$

β) $z = -4-9i$

γ) $z = 4i$

δ) $z = 11$

ε) $z = -i$

στ) $z = 0$.

10. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z}$, $-z$ και $-\bar{z}$;
11. Αν $z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$, να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1 - z_2$ φανταστικός αριθμός.
12. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:
 α) $z - \bar{z} = 6i$ β) $z^2 = \bar{z}^2$ γ) $\bar{z}^2 = -z^2$ δ) $\bar{z} = 2 - z$
13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
 α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 2x + 3 = 0$ γ) $x + \frac{1}{x} = 1$.
14. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι $3 + 2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.
2. Αν $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{1}{z^2 - z}$.
3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$.
4. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^v + i^{-v}$;
5. Να λύσετε τις εξισώσεις
 α) $\bar{z} = z^2$ β) $\bar{z} = z^3$.
6. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$.
7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. α) Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.

β) Αν $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι φανταστικός.

9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 5 \operatorname{Re}(z)$$

$$\beta) \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3 \operatorname{Im}(z).$$

2.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή

$$|z| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Για παράδειγμα, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής

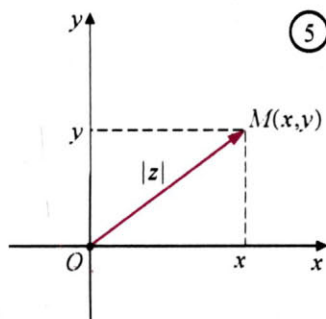
$z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x .

Αν $z = x + yi$, τότε $\bar{z} = x - yi$ και $-z = -x - yi$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \bullet \quad |z| &= |\bar{z}| = |-z| \\ \bullet \quad |z|^2 &= z \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε



$$\bullet \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\bullet \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

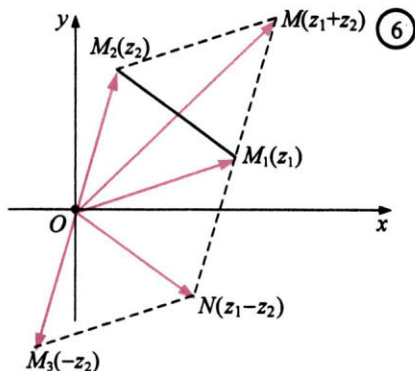
$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

και ειδικότερα

$$|z^v| = |z|^v.$$

Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του

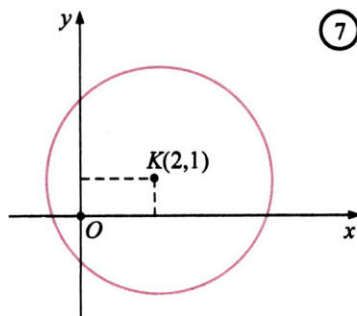
διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

Δηλαδή:

$$(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$$

Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση $|z - (2+i)| = 3$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $2+i$, δηλαδή από το σημείο $K(2,1)$, απόσταση 3 μονάδες. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

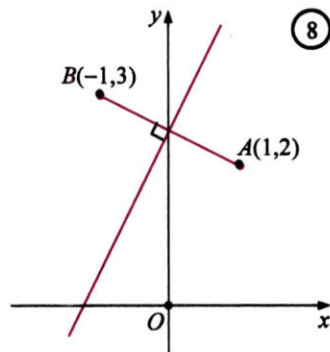


Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0$$

παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

Επίσης, η εξίσωση $|z - (1+2i)| = |z - (-1+3i)|$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $1+2i$ και $-1+3i$, δηλαδή από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,3)$. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος KA .



Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \dots, z_n$ ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ένας από τους $z_1, z_2, \dots, z_n$, για παράδειγμα ο z_k , ήταν πραγματικός, τότε οι

μιγαδικοί $z_k - i$ και $z_k + i$ θα ήταν συζυγείς και επομένως $\left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = 1$,

αφού

τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| \geq 1,$$

που είναι άτοπο.

2. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - (2+2i)| = \sqrt{2}$, να βρεθεί:

α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

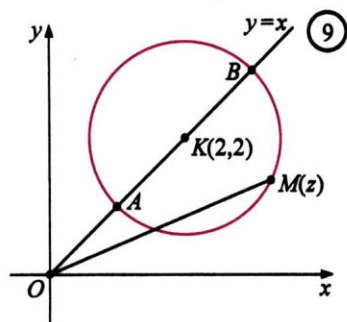
β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΛΥΣΗ

α) Η ισότητα $|z - (2+2i)| = \sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο $K(2,2)$ σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, δηλαδή ο κύκλος

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

β) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$, δηλαδή το μήκος (OM) . Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα A και B , τότε $(OA) \leq (OM) \leq (OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA) .



Η εξίσωση, όμως, της ευθείας OK είναι η $y=x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y=x \end{cases},$$

που είναι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(3,3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$1+i, \quad 1-i, \quad 3+4i, \quad 3-4i, \quad -5i, \quad -4, \quad \frac{1+i}{1-i},$$

$$(1-i)^2 \cdot (1+i)^4, \quad (2-i) \cdot (1+2i) \quad \text{και} \quad \frac{3+i}{4-3i}.$$

2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$(1+i)^2, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ με } |\lambda|+|\mu| \neq 0.$$

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

α) $|z^2| = z^2$ β) $|z-1| = z$ γ) $|z+i| = 2\bar{z}$.

4. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z| = 1$ β) $|z-i| = 1$
 γ) $|z+1+2i| = 3$ δ) $1 < |z| < 2$
 ε) $|z| \geq 2$.

5. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z+1| = |z-2i|$ β) $|z-i| > |z+1|$

6. Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{1+xi}{x+i}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$.

7. Από τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει $|z-4i| = 2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

8. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z+1$.

9. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$\sqrt{2} \cdot |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι:

Αν $|z| = 1$, τότε ο $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

3. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: Ο $w = z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

4. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq ai$, όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w = \frac{z+ai}{iz+a}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.
5. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{2z-i}{iz+2}$.
6. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.
7. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|1+z|^2+|1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.
8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Ποιο από τα σημεία M απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή $O(0,0)$.
9. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.
10. α) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
 β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \dots, z_k$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_k|=1$, να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2+\dots+z_k| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right|$.

2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Εισαγωγή

Η αποδοχή των μιγαδικών αριθμών, εκτός από τις δυνατότητες που άνοιξε στην επίλυση των εξισώσεων, έδωσε μεγάλη ευελιξία στον αλγεβρικό λογισμό. Για

παράδειγμα, η παράσταση $x^2 + y^2$ μπορεί τώρα να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $(x + yi)(x - yi)$. Οι μαθηματικοί εκμεταλλεύτηκαν αυτό το γεγονός σε πολλά ζητήματα, όπως είναι, για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των τόξων ενός κύκλου. Το 1739 ο A. de Moivre, συνδυάζοντας τον υπολογισμό των κυβικών ριζών παραστάσεων της μορφής $a + i\sqrt{b}$ (που εμφανίζονται στον τύπο επίλυσης της $x^3 = px + q$) με την τριγωνομετρική ταυτότητα $3\eta\mu\theta - 4\eta\mu^3\theta = \eta\mu 3\theta$, έδωσε τις πρώτες ιδέες για την τριγωνομετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Το 1748 ο L. Euler, ξεκινώντας από την ανάλυση της ισότητας $\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ στη μορφή $(\sin\theta + i\eta\mu\theta)(\sin\theta - i\eta\mu\theta) = 1$, τόνισε τη σημασία των παραστάσεων της μορφής $\sin\theta + i\eta\mu\theta$ και έδειξε ότι $(\sin x + i\eta\mu x)(\sin y + i\eta\mu y) = \sin(x + y) + i\eta\mu(x + y)$. Γενικεύοντας έφτασε στη σχέση $(\sin z \pm i\eta\mu z)^n = \sin nz \pm i\eta\mu nz$ (που σήμερα φέρει το όνομα του de Moivre), από την οποία, με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, βρήκε τύπους για τα $\eta\mu nz$ και $\sin nz$.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις οι μιγαδικοί αντιμετωπίζονταν ως καθαρά συμβολικές παραστάσεις, που δεν απεικόνιζαν κάποια συγκεκριμένη πραγματικότητα. Η τριγωνομετρική παράσταση έδωσε όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (από τον C. Wessel το 1799 και τον R. Argand το 1806) για την αναλυτική έκφραση της διεύθυνσης στο επίπεδο, ακριβώς όπως οι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για τη διάκριση της φοράς στην ευθεία. Αυτές οι εξελίξεις διεύρυναν τις εφαρμογές των μιγαδικών και άνοιξαν το δρόμο για τη γεωμετρική ερμηνεία τους, την οποία καθιέρωσε ο C.F. Gauss το 1831.

Ορισμός Μιγαδικού

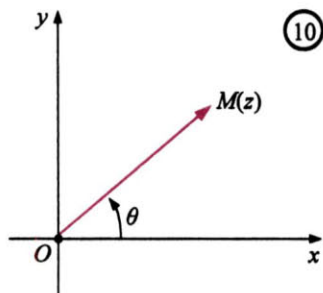
Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $\overline{OM}$ η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του.

Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού z καθεμία από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM .

Από όλα τα ορίσματα του z ένα ακριβώς βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού z και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$.

Είναι φανερό ότι:

- Το $\text{Arg}(z)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x'x$.
- Δυο ορίσματα του z διαφέρουν κατά γωνία $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Για το μιγαδικό $z=0$ δεν ορίζεται όρισμα. Γι' αυτό, στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι $z \neq 0$.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi \neq 0$, που έχει μέτρο $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Αν θ είναι ένα όρισμα του z , τότε, από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα, έχουμε

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

οπότε

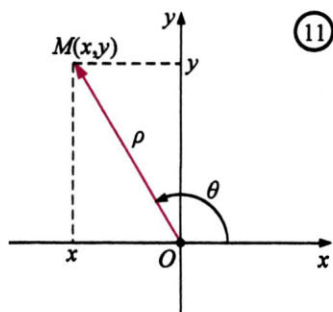
$$x = \rho \cos\theta \quad \text{και} \quad y = \rho \sin\theta$$

Επομένως, ο μιγαδικός z γράφεται

$$z = x + yi = \rho \cos\theta + \rho \sin\theta \cdot i,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Ο τρόπος αυτός γραφής του μιγαδικού z λέγεται **τριγωνομετρική** ή **πολική μορφή** του z .

Για παράδειγμα, αν $z = -\sqrt{3} + i$, τότε το μέτρο του z είναι $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ και για κάθε όρισμά του θ ισχύουν:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, μια τιμή του ορίσματος είναι η $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα, έχουμε

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{ ή γενικότερα:}$$

$$z = 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Αποδεικνύεται ότι, αν για έναν μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου $r > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε η παράσταση $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z .

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

“Δυο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π ”.

Δηλαδή:

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών z_1 και z_2 , τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi, \kappa \in \mathbb{Z}).$$

Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου Μιγαδικών

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 , τότε για το γινόμενο τους έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Ομοίως, για το πηλίκο τους $\frac{z_1}{z_2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι δυο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, τότε έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) \right] = 6 \left(\sin\frac{5\pi}{2} + i\eta\mu\frac{5\pi}{2} \right) = 6i$$

και

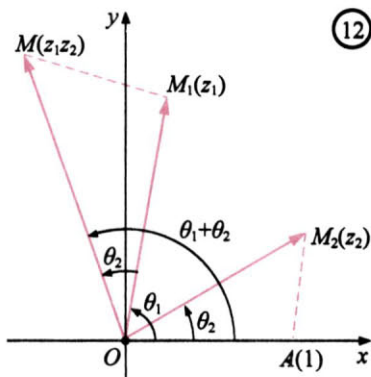
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) \right] = \frac{2}{3} \left[\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Από τις τριγωνομετρικές μορφές του γινομένου και του πηλίκου μιγαδικών προκύπτουν οι ιδιότητες

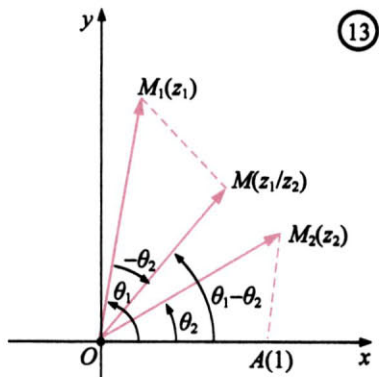
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{και} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

τις οποίες έχουμε συναντήσει και στην § 2.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Τα τρίγωνα OAM_2 και OM_1M είναι όμοια



Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\sin\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\sin\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 και μετά πολλαπλασιασμό της με ρ_2 (Σχ. 12). Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z με το μιγαδικό $\sin\theta + i\eta\mu\theta$ στρέφει μόνο τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία θ , αφού $|\sin\theta + i\eta\mu\theta| = 1$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, αφού $i = \sin\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}$.

• Η διαίρεση του μιγαδικού $z_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και μετά πολλαπλασιασμό της με $\frac{1}{\rho_2}$ (Σχ. 13).

Θεώρημα του De Moivre

Αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή, σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta).$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho^3(\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta).$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$z^4 = \rho^4(\sigma\upsilon\nu 4\theta + i\eta\mu 4\theta).$$

$$z^5 = \rho^5(\sigma\upsilon\nu 5\theta + i\eta\mu 5\theta).$$

Γενικά, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^n = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(n)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $n=1$ η ισότητα γίνεται $z^1 = \rho^1[\sigma\upsilon\nu(1\cdot\theta) + i\eta\mu(1\cdot\theta)]$ ή, ισοδύναμα, $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, που ισχύει. Άρα η $P(1)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι, αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής δηλαδή, αν $z^n = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)]$, τότε $z^{n+1} = \rho^{n+1}[\sigma\upsilon\nu(n+1)\theta + i\eta\mu(n+1)\theta]$.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)] \cdot \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \\ &= \rho^{n+1}[\sigma\upsilon\nu(n+1)\theta + i\eta\mu(n+1)\theta]. \end{aligned}$$

Άρα, η $P(n)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους n . ■

Για παράδειγμα, αν $z = \sqrt{3} + i$, επειδή $z = 2\left(\sin \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6}\right)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} z^{1998} &= \left[2\left(\sin \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6}\right) \right]^{1998} = 2^{1998} \left(\sin \frac{1998\pi}{6} + i\eta\mu \frac{1998\pi}{6} \right) \\ &= 2^{1998} (\sin 333\pi + i\eta\mu 333\pi) = 2^{1998} (\sin \pi + i\eta\mu \pi) = -2^{1998}. \end{aligned}$$

Το προηγούμενο θεώρημα αποδίδεται στο μαθηματικό **De Moivre** και γι' αυτό φέρει το όνομά του.

Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} [\rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)]^{-\nu} &= \frac{1}{\rho^{\nu}(\sin\theta + i\eta\mu\theta)^{\nu}} \\ &= \frac{1 \cdot (\sin 0 + i\eta\mu 0)}{\rho^{\nu} \cdot (\sin(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta))} \\ &= \rho^{-\nu} [\sin(0 - \nu\theta) + i\eta\mu(0 - \nu\theta)] \\ &= \rho^{-\nu} [\sin(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta)]. \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + yi$, τότε $\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1) + yi}{(x+1) + yi} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i$.

Άρα,

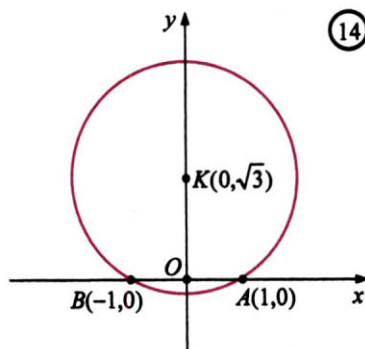
$$\frac{z-1}{z+1} = A + Bi, \quad \text{όπου} \quad A = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

Επομένως, η συνθήκη $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$ είναι

ισοδύναμη με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \frac{B}{A} = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \\ B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2^2 \\ y > 0 \end{cases}$$



Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι το τόξο του κύκλου κέντρου $K(0, \sqrt{3})$ και ακτίνας $\rho = 2$ που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

2. Αν $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$, να αποδειχτεί ότι

α) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$

β) $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$.

ΛΥΣΗ

Έστω οι μιγαδικοί $a = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha$, $b = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$, $c = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$. Έχουμε

$$a + b + c = (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma) + i(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma) = 0 + 0i = 0$$

και επομένως, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Με αντικατάσταση των a, b και c έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)^3 + (\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)^3 + (\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma)^3 &= \\ &= 3(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + i\eta\mu 3\alpha) + (\sigma\upsilon\nu 3\beta + i\eta\mu 3\beta) + (\sigma\upsilon\nu 3\gamma + i\eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3[\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma) + i(\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) \quad \text{και}$$

$$\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

α) $1 + \sqrt{3}i$

β) $1 - \sqrt{3}i$

γ) $-1 - \sqrt{3}i$

δ) $-1 + \sqrt{3}i$

ε) 4

στ) -4.

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $4(\sin 15^\circ + i\eta\mu 15^\circ) \cdot 6(\sin 30^\circ + i\eta\mu 30^\circ)$

β) $5\left(\sin \frac{\pi}{8} + i\eta\mu \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\left(\sin \frac{3\pi}{8} + i\eta\mu \frac{3\pi}{8}\right)$

γ) $\left(\sin \frac{2\pi}{10} + i\eta\mu \frac{2\pi}{10}\right) \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{10} + i\eta\mu \frac{3\pi}{10}\right).$

3. Να κάνετε τις πράξεις

α) $\frac{25(\sin 160^\circ + i\eta\mu 160^\circ)}{5(\sin 100^\circ + i\eta\mu 100^\circ)}$

β) $\frac{6\left(\sin \frac{5\pi}{6} + i\eta\mu \frac{5\pi}{6}\right)}{\sin \frac{\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi}{3}}$

γ) $\frac{7(\sin 130^\circ + i\eta\mu 130^\circ)}{14(\sin(-20^\circ) + i\eta\mu(-20^\circ))}.$

4. Να βρείτε τις δυνάμεις

α) $[2(\sin 20^\circ + i\eta\mu 20^\circ)]^3$

β) $\left[3\left(\sin \frac{5\pi}{4} + i\eta\mu \frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ) $\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16}.$

5. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}.$

6. Αν $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τον $z^{2000}.$

7. Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$, να υπολογίσετε την παράσταση $z_1^v + z_2^v$, όπου v θετικός ακέραιος.
8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i .
9. Αν $z = 1 + i\sqrt{3}$ και $w = 1 + i$, να δείξετε ότι $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{12}$ και να βρείτε το $\eta\mu\frac{\pi}{12}$ και το $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$.
10. Να βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού $z \neq 0$ αν $z^2 = \bar{z}$.

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού w , όπου

$$w = \left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta} \right)^v, \quad v \in \mathbb{N}^* \text{ και } \theta \neq (2\kappa + 1)\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^{100}$.

2. α) Να δείξετε ότι αν $(1+i)^v = (1-i)^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$ τότε $v = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$

β) Αν $f(v) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^v + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^v$, να δείξετε ότι $f(v+4) + f(v) = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι για $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ ισχύει:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|, \text{ αν και μόνο αν } \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2).$$

4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

α) $\text{Arg}(z-i) = \frac{\pi}{6}$ β) $\text{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{4}$ γ) $\text{Arg}\left(\frac{z}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5. Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z + 2 - 5i| \leq 2$, να βρείτε εκείνον που έχει:

α) Το μικρότερο πρωτεύον όρισμα

β) Το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.

6. Αν $z = \cos\theta + i\eta\mu\theta$, να αποδείξετε ότι:

α) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$

β) $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\eta\mu(n\theta)$.

7. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z|=1$ και $w = (\sqrt{3} - i)z$, τότε:

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w .

β) Να βρείτε την εικόνα εκείνου του μιγαδικού από τους w , για τον οποίο ισχύει $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$.

8. Αν $z = \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + i\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ και το μιγαδικό z .

9. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, η “αναγκαστική” επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των πραγματικών ριζών και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού δημιούργησαν στις αρχές του 17ου αιώνα τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων στην Άλγεβρα. Βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας δεν ήταν μόνο οι μέθοδοι επίλυσης, αλλά και δομικά ζητήματα, όπως οι σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας εξίσωσης, καθώς και η σχέση ανάμεσα στο βαθμό και στο πλήθος των ριζών. Το τελευταίο, που καθιερώθηκε αργότερα ως **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**

“κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών n ακριβώς ρίζες”,

διατυπώνεται στην αρχή διστακτικά, καθώς οι μιγαδικοί δε θεωρούνται ακόμη ισότιμοι προς τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο R. Descartes, στο βιβλίο III της “La Geometrie” (1637) γράφει ότι: “κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσες και οι διαστάσεις [δηλ. ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην

εξίσωση”, αλλά ονομάζει τις θετικές ρίζες “αληθινές”, τις αρνητικές “ψεύτικες” και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο “φανταστικές” για τις υπόλοιπες:

“... ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές”.

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας άρχισε να αποκτά εξαιρετική σημασία με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων έπαιξε πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Ο G.W. Leibniz έθεσε το 1702 αυτό το ζήτημα ισχυριζόμενος (λαθεμένα) ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Το γεγονός αυτό οδήγησε στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού, που αποτελεί μια άλλη ισοδύναμη μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Ύστερα από ορισμένες ημιτελείς προσπάθειες των d'Alembert (1746), L. Euler (1749) και J.L. Lagrange (1772), ο C.F. Gauss έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη το 1799 (σε ηλικία 22 χρονών), στη διδακτορική του διατριβή που είχε τίτλο: “Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού”.

H Εξίσωση $z^n = 1$

Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $z^n = 1$ έχει μια λύση, την $z=1$, αν ο n είναι περιττός και δύο λύσεις, τις $z=1$ και $z=-1$, αν ο n είναι άρτιος.

Ας λύσουμε τώρα στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών μερικές εξισώσεις της μορφής $z^n = 1$, όπου n θετικός ακέραιος. Έχουμε:

$$\bullet \quad z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-1=0 \text{ ή } z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z=1 \text{ ή } z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ή } z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο $\mathbb{C}$ τρεις ρίζες.

$$\bullet \quad z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \text{ ή } z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z=1 \text{ ή } z=i \text{ ή } z=-i \text{ ή } z=-1,$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ τέσσερις λύσεις.

Γενικά ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^v = 1$, όπου v θετικός ακέραιος, έχει v ακριβώς διαφορετικές λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots, v-1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $r(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$ μια λύση, σε τριγωνομετρική μορφή, της εξίσωσης $z^v = 1$. Τότε,

$$[r(\cos\theta + i\eta\mu\theta)]^v = 1,$$

οπότε

$$r^v (\cos(v\theta) + i\eta\mu(v\theta)) = \cos 0 + i\eta\mu 0$$

Άρα, $r^v = 1$ και $v\theta - 0 = 2\kappa\pi$, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε $r = 1$ και $\theta = \frac{2\kappa\pi}{v}$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v = 1$, θα είναι της μορφής

$$z_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Αλλά και αντιστρόφως, κάθε μιγαδικός της μορφής $z_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $z^v = 1$, αφού

$$z_\kappa = \left(\cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v} \right)^v = \cos(2\kappa\pi) + i\eta\mu(2\kappa\pi) = 1.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v = 1$ είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$z_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Για $\kappa = 0$ έχουμε την προφανή λύση $z_0 = 1$.

Αν θέσουμε $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{v}\right) = \omega$, τότε για τις ρίζες της $z^v = 1$, θα ισχύει:

$$z_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{v} = \left(\cos \frac{2\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\pi}{v} \right)^\kappa = \omega^\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Είναι λοιπόν:

$$\begin{array}{lll}
 z_0 = 1 & z_v = \omega^v & = 1 \\
 z_1 = \omega & z_{v+1} = \omega^{v+1} = \omega^v \cdot \omega & = \omega \\
 z_2 = \omega^2 & z_{v+2} = \omega^{v+2} = \omega^v \cdot \omega^2 & = \omega^2 \quad \text{κ.τ.λ.} \\
 \vdots & \vdots & \\
 z_{v-1} = \omega^{v-1} & z_{2v-1} = \omega^{2v-1} = \omega^v \cdot \omega^{v-1} & = \omega^{v-1}
 \end{array}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι λύσεις της $z^v = 1$ που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του κ έχουμε διαφορετικές λύσεις. Επειδή για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν ακέραιοι ρ και ν τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\kappa = \rho\nu + \nu$ με $0 \leq \nu < v$, έχουμε:

$$\omega^\kappa = \omega^{\rho\nu + \nu} = (\omega^v)^\rho \cdot \omega^\nu = 1 \cdot \omega^\nu = \omega^\nu.$$

Δηλαδή, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ η λύση z_κ ταυτίζεται με μια από τις

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις $1 = \omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω ότι δε συμβαίνει αυτό. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί λ_1, λ_2 με $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < v$, τέτοιοι, ώστε $\omega^{\lambda_1} = \omega^{\lambda_2}$, οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{2\lambda_1\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\lambda_1\pi}{v} &= \sin \frac{2\lambda_2\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\lambda_2\pi}{v} \\
 \frac{2\lambda_1\pi}{v} - \frac{2\lambda_2\pi}{v} &= \mu \cdot 2\pi, \quad \text{για κάποιο } \mu \in \mathbb{Z} \\
 \lambda_1 - \lambda_2 &= \nu\mu, \quad \text{για κάποιο } \mu \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

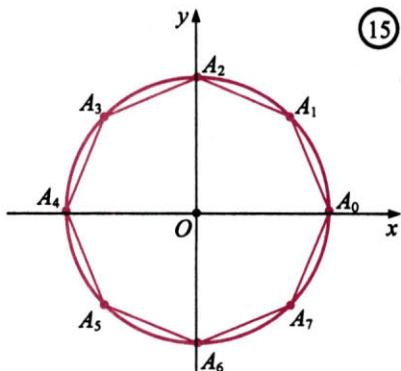
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος ν διαιρεί τη διαφορά $\lambda_1 - \lambda_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $0 < \lambda_1 - \lambda_2 < \nu$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v = 1$ είναι οι ν διαφορετικοί αριθμοί

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}, \quad \text{όπου} \quad \omega = \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{v}\right).$$

Οι λύσεις αυτές λέγονται και **νιοστές ρίζες της μονάδας**. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Οι εικόνες $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{v-1}$ των λύσεων $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$ της εξίσωσης $z^v = 1$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=1$. Πιο συγκεκριμένα:



(15)

- Η κορυφή A_0 παριστάνει τη λύση 1.
- Η επόμενη κορυφή A_1 παριστάνει τη λύση $\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$.
- Η κορυφή A_2 παριστάνει την ω^2 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$, δηλαδή κατά γωνία ίση με την κεντρική γωνία του κανονικού ν -γωνου.
- Η κορυφή A_3 παριστάνει την ω^3 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2 \cdot 2\pi}{\nu}$ κτλ.

Η Εξίσωση $z^\nu = a$, $a \neq 0$

Έστω $a = \rho(\text{συν}\theta + i\eta\mu\theta)$ μια τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού a . Τότε από τον τύπο του de Moivre έχουμε:

$$a = \left(\sqrt[\nu]{\rho} \left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu} \right) \right)^\nu.$$

Αν θέσουμε $z_0 = \sqrt[\nu]{\rho} \left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu} \right)$, τότε η εξίσωση $z^\nu = a$ γράφεται $z^\nu = z_0^\nu$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(\frac{z}{z_0} \right)^\nu = 1$$

Επομένως, το $\frac{z}{z_0}$ μπορεί να πάρει τις ν διαφορετικές τιμές

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\nu-1}, \quad \text{όπου} \quad \omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = a$ είναι οι αριθμοί

$$\begin{aligned} z_\kappa &= z_0 \cdot \omega^\kappa = \sqrt[\nu]{\rho} \left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu} \right) \cdot \left[\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) \right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho} \left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^v = a$, όπου v θετικός ακέραιος και $a = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$, $\rho = |a|$, έχει v διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \sqrt[v]{\rho} \left(\sin \frac{2\kappa\pi + \theta}{v} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi + \theta}{v} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, v-1.$$

Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $z^v = a$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με v πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[v]{\rho}$, όπου $\rho = |a|$.

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση

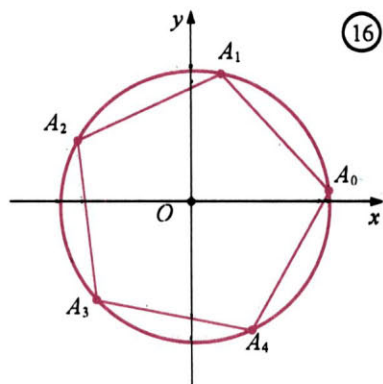
$$z^5 = 16(\sqrt{3} + i). \quad (1)$$

Επειδή $16(\sqrt{3} + i) = 32 \left(\sin \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6} \right)$, οι λύσεις z_κ της εξίσωσης (1) δίδονται από τον τύπο

$$z_\kappa = \sqrt[5]{32} \left(\sin \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5} \right) = 2 \left(\sin \frac{12\kappa\pi + \pi}{30} + i\eta\mu \frac{12\kappa\pi + \pi}{30} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Πιο συγκεκριμένα οι λύσεις είναι:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{30} + i\eta\mu \frac{\pi}{30} \right), \\ z_1 &= 2 \left(\sin \frac{13\pi}{30} + i\eta\mu \frac{13\pi}{30} \right), \\ z_2 &= 2 \left(\sin \frac{25\pi}{30} + i\eta\mu \frac{25\pi}{30} \right), \\ z_3 &= 2 \left(\sin \frac{37\pi}{30} + i\eta\mu \frac{37\pi}{30} \right), \\ z_4 &= 2 \left(\sin \frac{49\pi}{30} + i\eta\mu \frac{49\pi}{30} \right). \end{aligned}$$



Οι λύσεις αυτές είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho = 2$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Πραγματικούς Συντελεστές

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_v z^v + a_{v-1} z^{v-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_v \neq 0,$$

έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών n ακριβώς ρίζες.

Αν $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του πολωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές), τότε αποδεικνύεται ότι το πολώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Επομένως, η επίλυση πολωνυμικών εξισώσεων στο $\mathbb{C}$ γίνεται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται και στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς μόνο συντελεστές.

Έχουμε ήδη λύσει τη δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία, όπως είδαμε, έχει δύο ρίζες, οι οποίες, αν δεν είναι πραγματικές, είναι μιγαδικές συζυγείς. Ας λύσουμε τώρα μία ανωτέρου βαθμού, για παράδειγμα την $z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0$, που είναι πολωνυμική τρίτου βαθμού. Με σχήμα Horner έχουμε:

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 3)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad z - 1 = 0.$$

Όμως,

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}i \quad \text{ή} \quad z = 1 - \sqrt{2}i.$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$ και 1 . Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για οποιαδήποτε πολωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = a + \beta i$ είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης με **πραγματικούς συντελεστές**, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0 = a - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μια πολωνυμική εξίσωση, όπως γνωρίζουμε, έχει τη μορφή:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \quad \text{όπου } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ με } a_n \neq 0.$$

Αφού ο αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης, έχουμε κατά σειρά:

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \bar{0}$$

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \bar{a}_0 = 0$$

$$\overline{a_v z_0^v} + \overline{a_{v-1} z_0^{v-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$a_v \overline{z_0^v} + a_{v-1} \overline{z_0^{v-1}} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0, \text{ αφού } a_0, a_1, \dots, a_v \in \mathbb{R}.$$

Άρα, ο z_0 είναι και αυτός ρίζα της εξίσωσης. ■

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $\omega = \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{v}\right)$, να αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{v-1} = 0 \quad \beta) 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \dots \cdot \omega^{v-1} = (-1)^{v-1}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\alpha) \text{ Έχουμε } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{v-1} = \frac{1 - \omega^v}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0$$

$$\beta) 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \dots \cdot \omega^{v-1} = \omega^{1+2+3+\dots+(v-1)}$$

$$= \omega^{\frac{v(v-1)}{2}}$$

$$= \left(\sin \frac{2\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\pi}{v} \right)^{\frac{v(v-1)}{2}}$$

$$= \sin \frac{2\pi v(v-1)}{2v} + i\eta\mu \frac{2\pi v(v-1)}{2v}$$

$$= \sin(v-1)\pi + i\eta\mu(v-1)\pi$$

$$= (\sin\pi + i\eta\mu\pi)^{v-1}$$

$$= (-1)^{v-1}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2\sin\theta \cdot x + 1 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις x_1^v, x_2^v .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1) = -4\eta\mu^2\theta \leq 0$. Επομένως,

$$x_{1,2} = \frac{2\sin\theta \pm 2\eta\mu\theta \cdot i}{2} = \sin\theta \pm i\eta\mu\theta.$$

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η

$$x^2 - (x_1^v + x_2^v)x + x_1^v \cdot x_2^v = 0.$$

Έχουμε

$$x_1^v = (\sin\theta + i\eta\mu\theta)^v = \sin(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)$$

και

$$\begin{aligned} x_2^v &= (\sin\theta - i\eta\mu\theta)^v = [\sin(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)]^v = \sin(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta) \\ &= \sin(\nu\theta) - i\eta\mu(\nu\theta). \end{aligned}$$

Επομένως:

$$x_1^v + x_2^v = \sin(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta) + \sin(\nu\theta) - i\eta\mu(\nu\theta) = 2\sin(\nu\theta)$$

και

$$x_1^v \cdot x_2^v = (\sin(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta))(\sin(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta)) = \sin 0 + i\eta\mu 0 = 1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2\sin(\nu\theta)x + 1 = 0.$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6,$$

αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $1 + \sqrt{2}i$.

ΛΥΣΗ

Αφού το $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $x_0 = 1 + \sqrt{2}i$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του, $\bar{x}_0 = 1 - \sqrt{2}i$. Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το γινόμενο $Q(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$, για το οποίο έχουμε

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x - (1 + \sqrt{2}i)][x - (1 - \sqrt{2}i)] = [(x - 1) - \sqrt{2}i][(x - 1) + \sqrt{2}i] \\ &= (x - 1)^2 - (\sqrt{2}i)^2 \\ &= x^2 + 1 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Αν κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)$, βρίσκουμε πηλίκο $3x + 2$. Επομένως είναι

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x + 2).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Γενικά, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (αν υπάρχουν) έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

α) $z^3 = 1$

β) $z^4 = 1$

γ) $z^6 = 1$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = -i$

β) $z^4 = 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

γ) $z^5 = 243 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

β) $z^4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

γ) $z^6 = -64$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$

β) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

5. Αν ο μιγαδικός $2+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0,$$

να βρείτε και τις άλλες ρίζες της.

6. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδος, με $w \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$

7. Να λύσετε την εξίσωση

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0.$$

8. Να λύσετε την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ και να δείξετε ότι οι ει-
κόνες των ριζών είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3 = 1 - i$

β) $(z-1)^3 - (1-i)(z+1)^3 = 0$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $z^7 + 1 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τα τρι-
ώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που είναι παράγοντες του πο-
λωνύμου $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$.

4. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των
εξισώσεων $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$ και $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$.

5. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει
 $z^7 \bar{z}^3 = 1$.

6. Αν η εξίσωση $(1+iz)^v = p(1-iz)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ έχει πραγματική ρίζα, να α-
ποδείξετε ότι $|p|=1$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + 4 = 0$ με ρίζες τις x_1 και x_2 .

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και
 $x_1^2 + x_2^2$.

β) Αν η εξίσωση $x^2 + px + q = 0$ έχει ως ρίζες τις x_1^2 και x_2^2 , να βρεί-
τε τις τιμές των p και q .

8. α) Να λύσετε την εξίσωση

$$\sin^2 \theta \cdot z^2 - 2 \sin \theta \cdot z + (5 - 4 \sin^2 \theta) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα
 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια
υπερβολή.

9. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z \in \mathbb{C}$ και $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.

β) Έστω α, β δυο (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x, y)$, με $x \neq 0$, για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha x + \beta yi$ ικανοποιούν τη σχέση $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$.

2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z , w και w_1 , για τους οποίους ισχύουν:

$w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $w = z + (1+i)$

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0,0)$.

4. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

α) $|2z+1| < |z+i|$

β) $|z-1| = 1 + \operatorname{Re}(z)$.

5. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, \dots, z_k$ έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, τότε ισχύει $z_1 + z_2 + \dots + z_k \neq 0$.

6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $(1-z)^v = z^v$ είναι σημεία της ευθείας $x = \frac{1}{2}$.

7. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha \neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:

α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει

$$(\alpha \kappa^2 + \beta \kappa + \gamma)(\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma) > 0.$$

β) Για οποιουδήποτε συζυγείς μιγαδικούς z_1 και z_2 διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης

$$(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha \bar{z}_1^2 + \beta \bar{z}_1 + \gamma) > 0.$$

8. Γνωρίζοντας ότι για τις νιοστές ρίζες της μονάδας $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ ισχύει $1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$, να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\eta\mu \frac{2\pi}{n} + \eta\mu \frac{4\pi}{n} + \eta\mu \frac{6\pi}{n} + \dots + \eta\mu \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,$

β) $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{n} + \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{n} + \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{n} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :

A. $u = 0$

B. $v = 0$

Γ. $u = v = 0$

Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

(ii) Ο αριθμός $z = (3 + 5i)^{10} + (3 - 5i)^{10}$ είναι:

A. Φανταστικός

B. Μηδέν

Γ. Πραγματικός

Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

A. $|z^2| = |z|^2$

B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Γ. $z \cdot \bar{z} = z^2$

Δ. $z \cdot \bar{z} = |z|$

E. $|z^2| = z^2$.

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερης στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

	Συνθήκη		Ευθεία
A.	$ z-i = z+i $	α.	$x=1$
B.	$ z-1 = z+1 $	β.	yy'
Γ.	$ z-1 = z-i $	γ.	$y=x$
Δ.	$ z+1 = z+i $	δ.	$y=-x$
		ε.	$x'x$

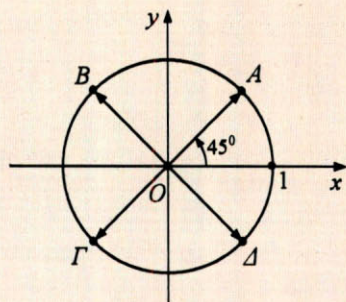
4. Να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό z της πρώτης στήλης στο όρισμά του της δεύτερης στήλης:

	Μιγαδικός ($k > 0$)		Όρισμα
A.	$k+ki$	α.	-45°
B.	$k-ki$	β.	225°
Γ.	$-k-ki$	γ.	45°
Δ.	$-k+ki$	δ.	180°
		ε.	60°
		ζ.	135°

5. Να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.
Ο αριθμός των πραγματικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 5^{av} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι:

A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4 E. 5

6. Να γράψετε τους μιγαδικούς που έχουν ως εικόνες τα σημεία A, B, Γ και Δ του διπλανού σχήματος:



A:
B:
Γ:
Δ:

7. Αν z είναι ο μιγαδικός που έχει ως εικόνα το A , να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στην εικόνα του που αναφέρεται στη δεύτερη στήλη και σημειώνεται στο παρακάτω σχήμα:

Μιγαδικός Εικόνα

$$\bar{z}$$

B

$$\frac{1}{2}z$$

Γ

$$\frac{1}{z}$$

Δ

$$-z$$

E

$$-\bar{z}$$

Z

H

Θ

