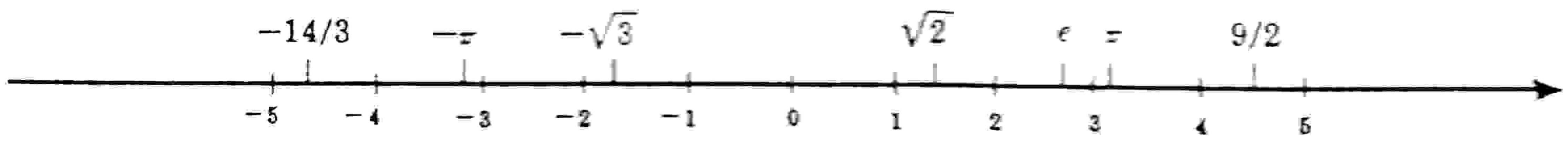
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Τό *σύνολο* ἤ *σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν* περιλαμβάνει τούς *ρητούς* καί τούς *ἄρρητους* ἤ *ἀσύμμετρους* ἀριθμούς. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου αὐτοῦ μποροῦν νά ἀντιστοιχιστοῦν ἕνα πρός ἕνα μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, πού καλεῖται *ἄξονας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Ἔτσι κάθε σημεῖο ἀντιπροσωπεύει ἕνα μοναδικό πραγματικό ἀριθμό καί κάθε πραγματικός ἀριθμός ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα μοναδικό σημεῖο τοῦ ἄξονα, ὅπως φαίνεται στό Σχ. 4-1. Οἱ πράξεις τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί τῆς διαιρέσεως μποροῦν νά ἐκτελεστοῦν μέ ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς αὐτοῦ τοῦ συστήματος (πλήν τῆς διαιρέσεως διά τοῦ μηδενός). Οἱ τετραγωνικές ρίζες θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μποροῦν νά παρασταθοῦν στόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀλλά ἡ τετραγωνική ρίζα ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δέν ὁρίζεται στό σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 4-1. Ἄξονας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν

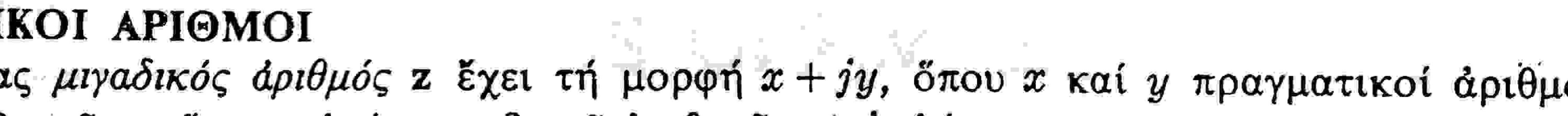
ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἡ τετραγωνική ρίζα ἑνός ἀρνητικοῦ (πραγματικοῦ) ἀριθμοῦ λέγεται *καθαρός φανταστικός* ἤ ἁπλά *φανταστικός ἀριθμός*, π.χ. $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-16}$.

Ἄν ὁρίσουμε $j = \sqrt{-1}$, τότε $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = j2$, $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$, κτλ. Ἐπίσης ἔχουμε

$$j^2 = -1, \quad j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j, \quad j^4 = (j^2)^2 = 1, \quad j^5 = j, \quad \ldots$$

Ὅλοι οἱ φανταστικοί ἀριθμοί μποροῦν νά ἀντιπροσωπευτοῦν ἀπό τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, πού καλεῖται *ἄξονας τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν*, ὅπως φαίνεται στό Σχ. 4-2.



Σχ. 4-2. Ἄξονας τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν

Ἡ ἐκλογή τῆς λέξεως *φανταστικός* εἶναι ἀνεπιτυχής, γιατί καί οἱ φανταστικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν ὅσο καί οἱ πραγματικοί. Ὁ ὅρος αὐτός ἁπλῶς ὑπενθυμίζει, ὅτι τέτοιοι ἀριθμοί δέν μποροῦν νά παρασταθοῦν στόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀλλά τοποθετοῦνται σέ ἕναν ἄλλο ἄξονα ἀριθμῶν, τόν ἄξονα τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

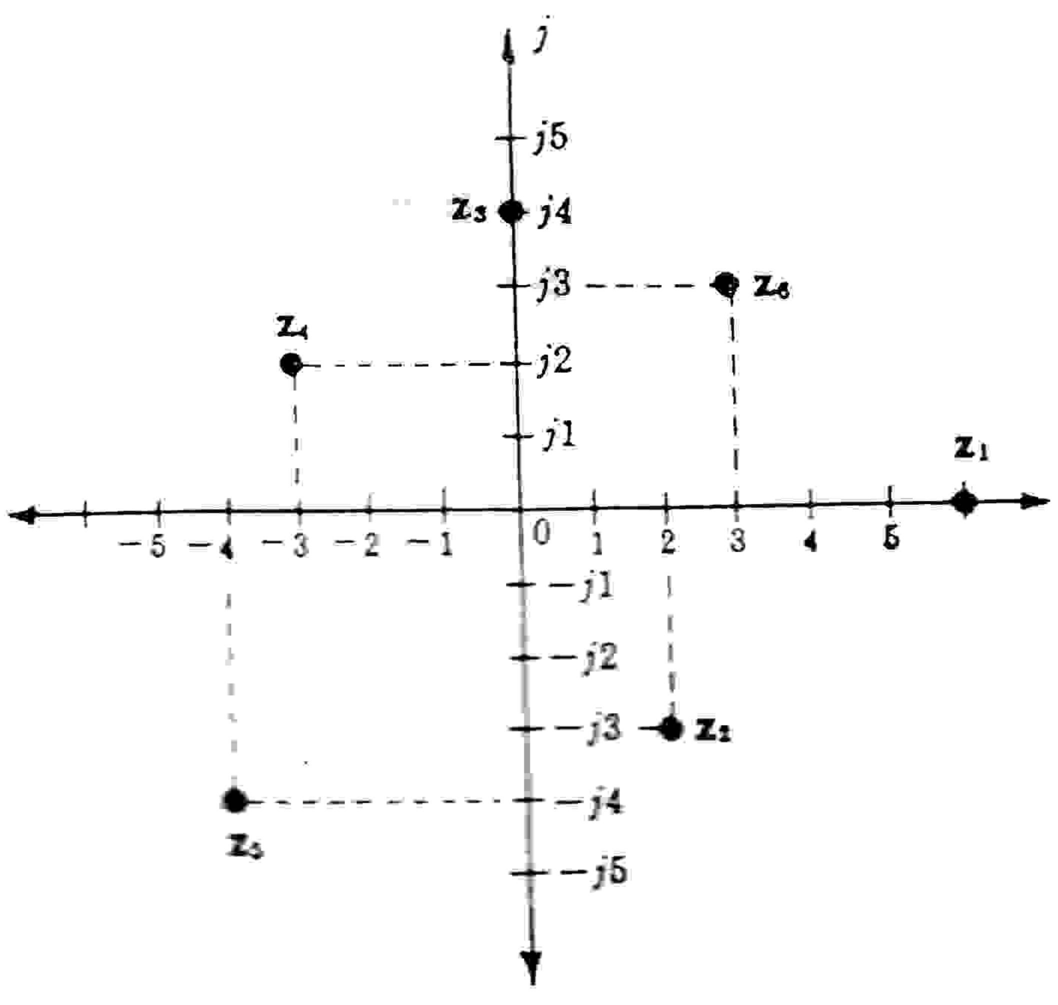
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἕνας *μιγαδικός ἀριθμός* **z** ἔχει τή μορφή $x + jy$, ὅπου x καί y πραγματικοί ἀριθμοί καί $j = \sqrt{-1}$. Ὁ πρῶτος ὅρος x ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $x + jy$ λέγεται *πραγματικό μέρος*. Ὁ συντελεστής y λέγεται *φανταστικό μέρος*. Ὅταν $x = 0$, ὁ μιγαδικός ἀριθμός εἶναι (καθαρός) φανταστικός καί ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν φανταστικῶν. Ὅταν $y = 0$, ὁ μιγαδικός ἀριθμός εἶναι πραγματικός καί ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν πραγματικῶν. Συνεπῶς, οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί περιλαμβάνουν ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς καί ὅλους τούς φανταστικούς.

Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί, $a + jb$ καί $c + jd$, εἶναι ἴσοι ἄν καί μόνον ἄν $a = c$ καί $b = d$.

Ἄν, ὅπως φαίνεται στό Σχ. 4-3, ὁ ἄξονας τῶν πραγματικῶν εἶναι κάθετος στόν ἄξονα τῶν φανταστικῶν στό κοινό τους σημεῖο 0, τότε προκύπτει τό *μιγαδικό ἐπίπεδο*. Σέ κάθε σημεῖο αὐτοῦ τοῦ ἐπίπεδου ἀντιστοιχεῖ ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός καί ἀντίστροφα. Στό Σχ. 4-3 ἔχουν σημειωθεῖ ἔξι μιγαδικοί ἀριθμοί.

$$\mathbf{z}_1 = 6$$
$$\mathbf{z}_2 = 2 - j3$$
$$\mathbf{z}_3 = j4$$
$$\mathbf{z}_4 = -3 + j2$$
$$\mathbf{z}_5 = -4 - j4$$
$$\mathbf{z}_6 = 3 + j3$$



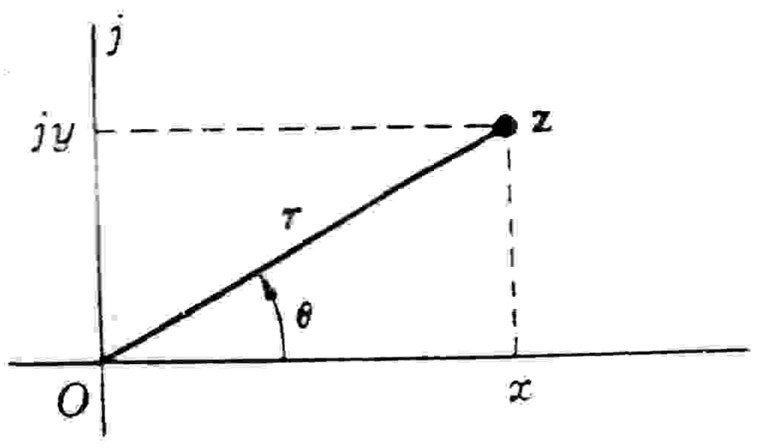
Σχ. 4-3

ΜΟΡΦΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στό Σχ. 4-4 εἶναι $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\mathbf{z}$ γράφεται

$$\mathbf{z} = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

ὅπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ εἶναι τό *μέτρο* ἤ *ἀπόλυτη τιμή* τοῦ $\mathbf{z}$ καί $\theta = \tan^{-1} y/x$ ἡ *γωνία* ἤ *ὅρισμα* τοῦ $\mathbf{z}$.



Σχ. 4-4

Ὁ τύπος τοῦ Euler $e^{j\theta} = (\cos\theta + j\sin\theta)$ ἐπιτρέπει τήν ἔκφραση τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ σέ *ἐκθετική* μορφή (βλέπε καί Πρόβλ. 4.1)

$$\mathbf{z} = r\cos\theta + jr\sin\theta = r\,e^{j\theta}$$

Στήν ἀνάλυση δικτύων γίνεται συχνά χρήση τῆς *πολικῆς* μορφῆς ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ

$$r\underline{/\theta}$$

ὅπου τό θ εἶναι συνήθως σέ μοῖρες.

Συνοψίζουμε, λοιπόν, τούς τέσσερις τρόπους πού μπορεῖ νά γραφεῖ ἕνας μιγαδικός (στήν πράξη προτιμᾶμε κάθε φορά τή μορφή πού μᾶς διευκολύνει):

Καρτεσιανή μορφή	$\mathbf{z} = x + jy$
Πολική μορφή	$\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$
Ἐκθετική μορφή	$\mathbf{z} = r\,e^{j\theta}$
Τριγωνομετρική μορφή	$\mathbf{z} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

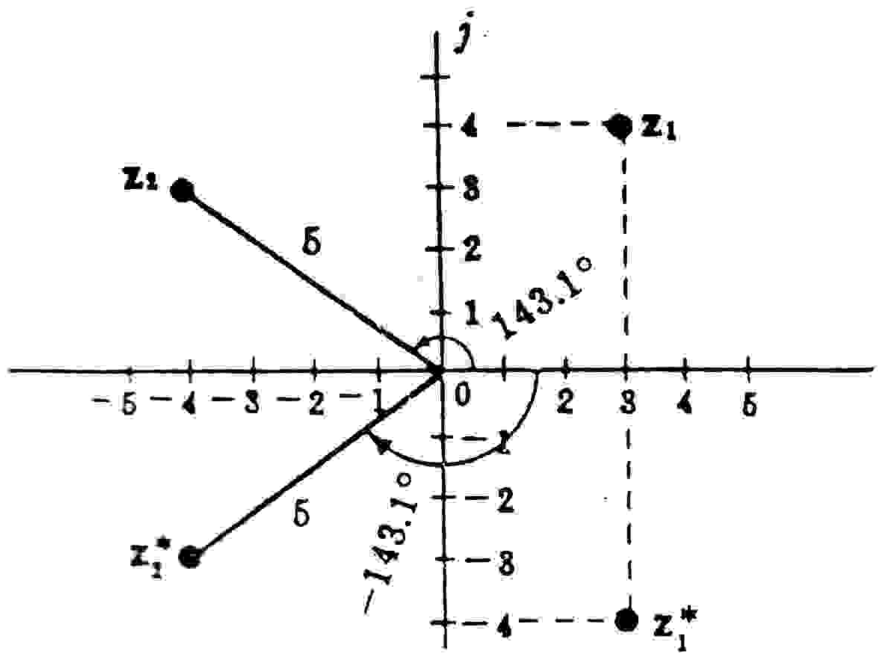
Ο ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ὁ *συζυγής* μιγαδικός τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\mathbf{z} = x + jy$ εἶναι ὁ $\mathbf{z}^* = x - jy$. Ἔτσι, π.χ., δύο ζεύγη συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι τά (*1*) $3 - j2$ καί $3 + j2$, (*2*) $-5 + j4$ καί $-5 - j4$.

Σέ πολική μορφή, ὁ συζυγής τοῦ $\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$ εἶναι ὁ $\mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta}$. Σέ τριγωνομετρική μορφή, ἐπειδή $\cos(-\theta) = \cos\theta$ καί $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, ὁ συζυγής τοῦ $\mathbf{z} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ εἶναι ὁ $\mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$.

Στό μιγαδικό ἐπίπεδο (Σχ. 4-5) ὁ συζυγής $\mathbf{z}^*$ ἑνός μιγαδικοῦ $\mathbf{z}$ παριστάνεται ἀπό τό σημεῖο πού εἶναι τό συμμετρικό τοῦ $\mathbf{z}$ ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι ἔχουμε τέσσερις τρόπους γραφῆς ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\mathbf{z}$ καί τοῦ συζυγῆ του:



$z_1 = 3 + j4, \quad z_1^* = 3 - j4$
$z_2 = 5\underline{/143.1^\circ}, \quad z_2^* = 5\underline{/-143.1^\circ}$
Σχ. 4-5

$$\mathbf{z} = x + jy \qquad \mathbf{z} = r\underline{/\theta} \qquad \mathbf{z} = r\,e^{j\theta} \qquad \mathbf{z} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$\mathbf{z}^* = x - jy \qquad \mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta} \qquad \mathbf{z}^* = r\,e^{-j\theta} \qquad \mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γιά νά προσθέσουμε δύο μιγαδικούς ἀριθμούς, προσθέτουμε τά πραγματικά μέρη καί τά φανταστικά μέρη χωριστά. Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο μιγαδικούς ἀριθμούς, ἀφαιροῦμε τά πραγματικά μέρη καί τά φανταστικά μέρη χωριστά. Ὅπως εἶναι φανερό, γιά πρόσθεση ἤ ἀφαίρεση συμφέρει νά ἔχουμε τούς μιγαδικούς ἀριθμούς στήν καρτεσιανή τους μορφή.

Παράδειγμα 1. Μέ $\mathbf{z}_1 = 5 - j2$ καί $\mathbf{z}_2 = -3 - j8$, ἔχουμε

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$
$$\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (-3-5) + j(-8+2) = -8 - j6$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν σέ ἐκθετική μορφή προκύπτει ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Εἶναι

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

Ἄν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι γραμμένοι σέ πολική μορφή, τό γινόμενό τους βρίσκεται μέ ἀνάλογο τρόπο

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1 r_2\underline{/\theta_1+\theta_2}$$

Ἄν οἱ μιγαδικοί εἶναι σέ καρτεσιανή μορφή, κάνουμε κανονικά τίς πράξεις σάν νά πρόκειται γιά διώνυμα. Ἔτσι ἔχουμε

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Παράδειγμα 2. Μέ $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ καί $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, ἔχουμε $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

Παράδειγμα 3. Μέ $\mathbf{z}_1 = 2\underline{/30^\circ}$ καί $\mathbf{z}_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, ἔχουμε $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-45^\circ}) = 10\underline{/-15^\circ}$.

Παράδειγμα 4. Μέ $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ καί $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, ἔχουμε $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2+j3)(-1-j3) = 7 - j9$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν σέ ἐκθετική μορφή προκύπτει ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$