Κεφάλαιο 5

Μιγαδικοί στο MATLAB

5.1 Εισαγωγικά

Οι μιγαδικοί αριθμοί βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία. Στην επιστήμη του μηχανικού για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται κυρίως (αλλά όχι μόνον) για να εκφράσουν την αρμονική (ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή) φύση των ταλαντούμενων συστημάτων και πεδίων.

Ένας μιγαδικός αριθμός έχει τη μορφή

$$z = a + jb, \tag{5.1}$$

όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και $j = \sqrt{-1}$ και ονομάζεται **φανταστική μονάδα**[1] Η (5.1) ονομάζεται **καρτεσιανή** ή **ορθογώνια** μορφή του μιγαδικού z. Ο πραγματικός αριθμός a καλείται **πραγματικό μέρος** του z (συμβ. $\Re z$ ή $\mathrm{Re}(z)$) ενώ ο πραγματικός αριθμός b καλείται **φανταστικό μέρος** του z (συμβ. $\Im z$ ή $\mathrm{Im}(z)$).

Ακόμα ο $a - jb$ καλείται **συζυγής μιγαδικός** του z (συμβ. $\bar{z}$ ή z^*), η ποσότητα $\sqrt{a^2+b^2}$ καλείται **μέτρο** ή **πλάτος** του z (συμβ. $|z|$ ή r), ενώ ο $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ καλείται **όρισμα** του z (συμβ. $\angle z$ ή $\arg z$).

5.2 Εισαγωγή μιγαδικών στο MATLAB & πράξεις μιγαδικών

Το MATLAB αντίθετα με τις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού δε χρειάζεται ειδική μεταχείριση για τη χρήση των μιγαδικών, γεγονός που το καθιστά πολύ εύχρηστο.

[1] Όταν είχαν πρωτοεισαχθεί οι μιγαδικοί αριθμοί, για να υποδηλωθεί η φανταστική μονάδα χρησιμοποιούνταν η μεταβλητή i αλλά για τους μηχανικούς έχει επικρατήσει ο συμβολισμός j έτσι, ώστε να μη συγχέεται η φανταστική μονάδα i με το σύμβολο της έντασης του ρεύματος στον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί βρίσκουν ευρεία εφαρμογή.

Πιο συγκεκριμένα, το MATLAB αντιλαμβάνεται τις μεταβλητές `i` και `j` ως τη φανταστική μονάδα, *εκτός και αν τους έχει δοθεί κάποια άλλη τιμή*. Έτσι, ένας μιγαδικός π.χ. ο $z = 2 + j3$, είναι δυνατό να εισαχθεί στο MATLAB με τους εξής ισοδύναμους τρόπους:

```
>> z = 2+3i
>> z = 2+3j
>> z = 2+3*i
>> z = 2+3*j
>> z = 2+i*3
>> z = 2+j*3
```

Σημείωση 5.1 Προσοχή: η εισαγωγή του παραπάνω μιγαδικού αριθμού ως

```
>> z = 2+i3
```

ή

```
>> z = 2+j3
```

είναι λάθος. Γιατί;

Η υλοποίηση των ποσοτήτων (που ορίστηκαν παραπάνω) στο MATLAB συνοψίζεται στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Διαχείριση Μιγαδικών Αριθμών με το MATLAB

	Μαθηματική έκφραση	**Εντολή στο MATLAB**
πραγματικό μέρος του z	$\Re z$ ή $\mathrm{Re}(z)$	`real(z)`
φανταστικό μέρος του z	$\Im z$ ή $\mathrm{Im}(z)$	`imag(z)`
συζυγής του z	$\bar{z}$ ή z^*	`conj(z)`
μέτρο ή πλάτος του z	$\lvert z\rvert$	`abs(z)`
όρισμα του z	$\angle z$ ή $\arg z$	`angle(z)`

Σημείωση 5.2 Παρατηρήστε ότι το μέτρο του μιγαδικού z εκφράζεται στο MATLAB με την ίδια εντολή όπως και για την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού, δηλ. την εντολή `abs`. Γιατί;

Σημείωση 5.3 Ακόμα μια χρήσιμη εντολή για τους μιγαδικούς είναι η $sign(z)$, που την είδαμε στην εισαγωγή ως την συνάρτηση προσήμου για τους πραγματικούς. Η γενίκευσή της είναι η 'κανονικοποιήση' ενός μιγαδικού z. Είναι δηλαδή

$$\mathrm{sign}(z) = \frac{z}{|z|}.$$

όπου $|z|$ το μέτρο του z. Τι παρατηρήτε όταν ο z είναι πραγματικός;

Οι πράξεις μεταξύ μιγαδικών εισάγονται στο MATLAB όπως ακριβώς και για τους πραγματικούς με τα σύμβολα +, -, *, /, ^

Δραστηριότητα 5.1 Να υπολογιστούν οι $z_1 z_2$, z_1^2, z_2^2, $z_1 \bar{z}_2$, $\overline{(z_1 \bar{z}_2)}$ για τα παρακάτω ζεύγη μιγαδικών:

(α′) $z_1 = j3$, $z_2 = 1 - j$

(β′) $z_1 = 4 + j6$, $z_2 = 2 - 3i$

(γ′) $z_1 = \frac{1}{3}(2 + i4)$, $z_2 = \frac{1}{2}(1 - 5j)$

(δ′) $z_1 = \frac{1}{3}(2 - i4)$, $z_2 = \frac{1}{2}(1 + 5j)$

Δραστηριότητα 5.2 Να γραφτούν οι παρακάτω αριθμοί στην τυπική μορφή (δηλ. $a \pm jb$):

(α′) $(3 - 2j)^2 - (3 + 2j)^2$

(β′) $(7 + i14)^7$

(γ′) $\left[(2 + j)\left(\frac{1}{2} + 2j\right)\right]^2$

(δ′) $j(1 + 7j) - 3j(4 + 2j)$

(ε′) $\frac{3+4j}{2+5j}$

(ϛ′) $\frac{\sqrt{3}+j}{(1-j)(3+j)}$

(ζ′) $\left[\frac{1-i2}{2+i3} - \frac{3+i}{i2}\right]$

Δραστηριότητα 5.3 Για τα ζεύγη μιγαδικών που ορίστηκαν στη Δραστηριότητα 5.1, να επαληθευτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

(α′) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(β′) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(γ′) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(δ′) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(ε′) $\bar{\bar{z}} = z$

Δραστηριότητα 5.4 Εισάγετε το μιγαδικό πίνακα

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1-j & 2+j \\ -4-2j & 2-3j & j \\ -2 & 3 & 4+j \end{bmatrix}$$

και πληκτρολογήστε τα εξής:

(α′) `>> Z'`

(β′) `>> Z.'`

(γ′) `>> det(Z)`

(δ′) `>> (Z+conj(Z))/2`

(ε′) `>> (Z-conj(Z))/2`

(ϛ′) `>> angle(Z)`

(ζ′) `>> abs(Z)`

(η′) `>> sign(Z)`

Σημείωση 5.4 Κατά την εισαγωγή μιγαδικών πινάκων, όταν εισάγουμε ένα μιγαδικό στοιχείο, χρειάζεται προσοχή, ώστε ανάμεσα στο πραγματικό και φανταστικό μέρος να μην υπάρχουν κενά, διότι μπορεί το MATLAB να ερμηνεύσει το πραγματικό και φανταστικό μέρος ως διαφορετικά στοιχεία του πίνακα. Για παράδειγμα γράψτε διαδοχικά

```
>> A = [1 1+j]
>> A = [1 1 +j]
>> A = [1 1+ j]
>> A = [1 1 + j]
```

και παρατηρήστε την απόκριση του MATLAB. Βγάλτε έναν κανόνα.

5.3 Τριγωνομετρική, πολική και εκθετική μορφή μιγαδικού

Ο μιγαδικός $z = a + jb$ μπορεί να γραφτεί και στις μορφές:

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \quad \text{(τριγωνομετρική μορφή)} \tag{5.2}$$

$$z = r\angle\theta \quad \text{(πολική μορφή)} \tag{5.3}$$

$$z = re^{j\theta} \quad \text{(εκθετική μορφή)} \tag{5.4}$$

όπου

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{και} \quad \theta = \arg(z)$$

Οι (5.2)-(5.4) ονομάζονται αντίστοιχα **τριγωνομετρική**, **πολική** και **εκθετική** μορφή αντίστοιχα.

Δραστηριότητα 5.5 Να βρεθούν η τριγωνομετρική, πολική και εκθετική μορφή των παρακάτω μιγαδικών:

(α′) $\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^9}$

(β′) $\sqrt{-1+j}(j+2)$

(γ′) $(1+j+j^2+j^3)^{99}$

Δραστηριότητα 5.6 Για τα ζεύγη μιγαδικών που ορίστηκαν στη Δραστηριότητα 5.1, να βρεθούν το μέτρο και το όρισμα και στη συνέχεια να επαληθευτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

(α′) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(β′) $\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2$

(γ′) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2))$

(δ′) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2))$

(ε′) $z^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta))$ (εφαρμογή για $n = 2, 3$)

(ϛ′) $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$ (εφαρμογή για $n = 2, 3$)

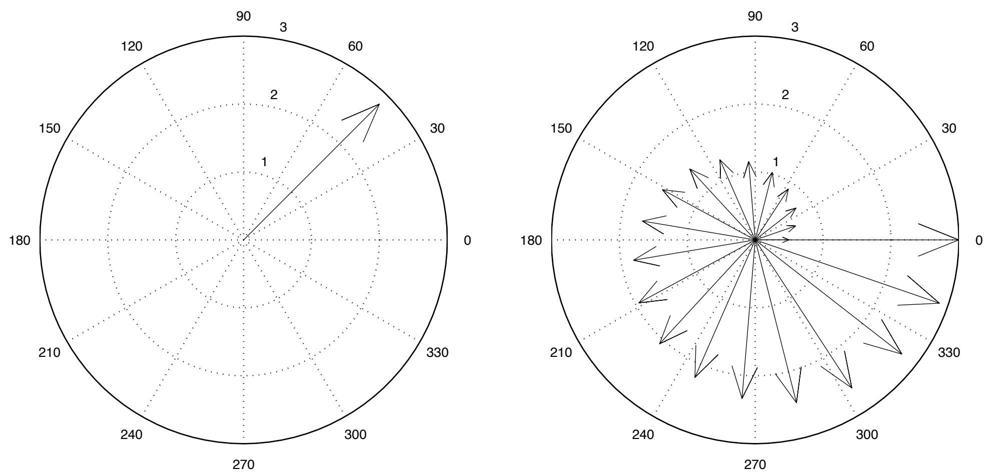
5.4 Γραφικές αναπαραστάσεις μιγαδικών

Η γραφική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού z πραγματοποιείται με την ειδική για αυτόν τον σκοπό εντολή `compass(z)`. Η εντολή αυτή σχεδιάζει ένα βέλος στο μιγαδικό επίπεδο με αρχή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, δηλ. το σημείο (0,0) και πέρας το μιγαδικό αριθμό z. Η μορφή με την οποία δίνουμε το z μπορεί να είναι οποιαδήποτε από αυτές που έχουμε ήδη αναφέρει. Οι εντολές που έπονται αναφέρονται όλες στον ίδιο μιγαδικό αριθμό και μας δίνουν το Σχ. 5.1(γ′).

```
>> compass(2+2i)
>> compass(2,2)
>> compass(2*sqrt(2)*exp((pi/4)*i))
>> compass(abs(2+2i)*exp(angle(2+2i)*i))
>> compass(2*sqrt(2)*(cos((pi/4))+j*sin((pi/4))))
```

Μπορούμε επίσης, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 4, να αναπαραστήσουμε σε ένα διάγραμμα πολλούς μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα με τις παρακάτω εντολές έχουμε το Σχ. 5.1(δ′).

```
>> clear all
>> x=linspace(0,2*pi,20);
>> y=linspace(0.5,3,20);
>> compass(y.*exp(x*i))
```



(γ′) Αναπαράσταση του $z = 2 + 2i$. (δ′) Αναπαράσταση ακολουθίας μιγαδικών.

Σχήμα 5.1: Γραφικές απεικονίσεις μιγαδικών αριθμών.

Δραστηριότητα 5.7 Χρησιμοποιώντας την εντολή `hold` σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τους μιγαδικούς:

(α′) $3 + 3i$

(β′) $\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{2}j}$,

(γ′) $2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$,

(δ′) 1 και i,

(ε′) $\frac{\pi}{2}i$ και $\frac{3\pi}{2}$,

(ϛ′) $\frac{1}{i}$ και $\frac{i+1}{i-1}$.

Δραστηριότητα 5.8 Εκτελώντας τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών, παρατηρήστε τη χρήση της εντολής `plot` στους μιγαδικούς αριθμούς.

```
>> plot(2+2i,'*')
>> plot(exp((pi/2)*i))
>> plot(3,'+')
>> plot(2*(cos(pi/4)+i*sin(pi/4)),'*')
```