

## Ανάπτυξη των εξισώσεων δυσκαμψίας επίπεδης τάσης και επίπεδης παραμόρφωσης

### ΣΤΟΧΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Να θυμηθούμε βασικές έννοιες της επίπεδης τάσης και της επίπεδης παραμόρφωσης.
- Να καταστρώσουμε τις εξισώσεις του μητρώου δυσκαμψίας για τριγωνικά στοιχεία σταθερής παραμόρφωσης (CST).
- Να δείξουμε πώς προσδιορίζονται το μητρώο δυσκαμψίας και οι τάσεις για ένα τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.
- Να περιγράψουμε τον τρόπο αντιμετώπισης δυνάμεων σώματος και επιφανείας για διδιάστατα στοιχεία.
- Να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.
- Να εφαρμόσουμε μια λεπτομερή λύση πεπερασμένων στοιχείων ενός προβλήματος επίπεδης τάσης.
- Να συνθέσουμε το μητρώο δυσκαμψίας για διγραμμικά ορθογώνια (Q4) στοιχεία τεσσάρων κόμβων.
- Να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μοντέλων CST και Q4 για ένα πρόβλημα κάμψης δοκού και να περιγράψουμε ορισμένα ελαττώματα των στοιχείων CST και Q4.

## Εισαγωγή

Στα Κεφάλαια 2 έως 5, εξετάσαμε μόνο γραμμικά στοιχεία. Δύο ή περισσότερα γραμμικά στοιχεία συνδέονται μόνο σε κοινούς κόμβους, σχηματίζοντας πλαισιωτούς ή αρθρωτούς φορείς όπως δικτυώματα, πλαίσια, και πλέγματα. Τα γραμμικά στοιχεία έχουν γεωμετρικές ιδιότητες, όπως εμβάδο και ροπή αδράνειας, που αφορούν τις διατομές τους. Παρ' όλα αυτά, απαιτείται μόνο μία τοπική συντεταγμένη  $x$  κατά μήκος του στοιχείου για να περιγράψει μια θέση στο μήκος του (γι' αυτό ονομάζονται *γραμμικά* ή *μονοδιάστατα* στοιχεία). Η συμβατότητα κόμβων επιβάλλεται τότε κατά τη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας κόμβων για ένα γραμμικό στοιχείο.

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με το διδιάστατο πεπερασμένο στοιχείο. Τα διδιάστατα (επίπεδα) στοιχεία ορίζονται με τρεις ή περισσότερους κόμβους σε ένα διδιάστατο επίπεδο (δηλαδή,  $x - y$ ). Τα στοιχεία συνδέονται σε κοινούς κόμβους ή και κατά μήκος των κοινών ακμών ώστε να σχηματίσουν συνεχείς κατασκευές όπως εκείνες στις Εικόνες 1-3, 1-4, 1-6, 6-2α, και 6-6(β). Τότε επιβάλλεται η συμβατότητα μετατόπισης κόμβων κατά τη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας κόμβων για διδιάστατα στοιχεία. Αν επιλεγούν οι κατάλληλες συναρτήσεις μετατόπισης, προκύπτει επίσης η συμβατότητα κατά μήκος των κοινών ακμών.

Το διδιάστατο στοιχείο είναι εξαιρετικά σημαντικό (1) για την ανάλυση επίπεδης τάσης, η οποία περιλαμβάνει προβλήματα όπως πλάκες με οπές, στενώσεις, ή άλλες αλλαγές της γεωμετρίας, που φορτίζονται στο επίπεδό τους με αποτέλεσμα τοπικές συγκεντρώσεις τάσης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-1· και (2) για την ανάλυση επίπεδης παραμόρφωσης, η οποία περιλαμβάνει προβλήματα όπως ένας επιμήκης υπόγειος αγωγός υπό ομοιόμορφο φορτίο που ενεργεί σταθερά σε όλο το μήκος του, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1-3, μια επιμήκης κυλινδρική ράβδος ελέγχου υπό ένα φορτίο που παραμένει σταθερό στο μήκος (ή το ύψος) της ράβδου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1-4, και φράγματα και σωλήνες που υπόκεινται σε φορτία τα οποία παραμένουν σταθερά στο μήκος τους, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-2.

Ξεκινούμε αυτό το κεφάλαιο με την ανάπτυξη του μητρώου δυσκαμψίας για ένα βασικό διδιάστατο ή επίπεδο πεπερασμένο στοιχείο, το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης. Εξετάζουμε το μητρώο δυσκαμψίας του τριγώνου σταθερής παραμόρφωσης (constant-strain triangle — CST) επειδή η εύρεσή του είναι η απλούστερη μεταξύ των διαθέσιμων στοιχείων δύο διαστάσεων. Το στοιχείο ονομάζεται έτσι επειδή έχει σταθερή παραμόρφωση παντού.

Θα συνθέσουμε το μητρώο δυσκαμψίας CST χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, επειδή οι ενεργειακές σχέσεις είναι οι πιο εφικτές για την ανάπτυξη των εξισώσεων τόσο για διδιάστατα όσο και για τριδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία.

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα απλό παράδειγμα προβλήματος επίπεδης τάσης σε μια λεπτή πλάκα προκειμένου να δείξουμε τη σύνθεση των μητρώων δυσκαμψίας επίπεδων στοιχείων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας όπως παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2. Θα παρουσιάσουμε την πλήρη λύση, όπου θα περιλαμβάνονται οι τάσεις στο εσωτερικό της πλάκας.

Τέλος, θα αναπτύξουμε το μητρώο δυσκαμψίας για το απλό ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων (στοιχείο Q4) και θα συγκρίνουμε τη λύση πεπερασμένων στοιχείων σε ένα πρόβλημα κάμψης δοκού προσομοιωμένο με τη χρήση στοιχείων CST και Q4.

### 6.1 Βασικές έννοιες επίπεδης τάσης και επίπεδης παραμόρφωσης

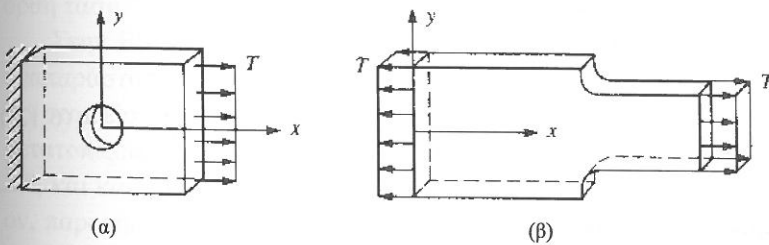
Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε τις έννοιες της επίπεδης τάσης και της επίπεδης παραμόρφωσης. Αυτές οι έννοιες είναι σημαντικές επειδή οι αναπτύξεις θεμάτων σε αυτό το κεφάλαιο έχουν άμεση εφαρμογή μόνο σε συστήματα τα οποία υποτίθεται ότι συμπεριφέρονται με τρόπο επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης. Επομένως, θα περιγράψουμε τώρα αυτές τις έννοιες αναλυτικά.

## Επίπεδη τάση

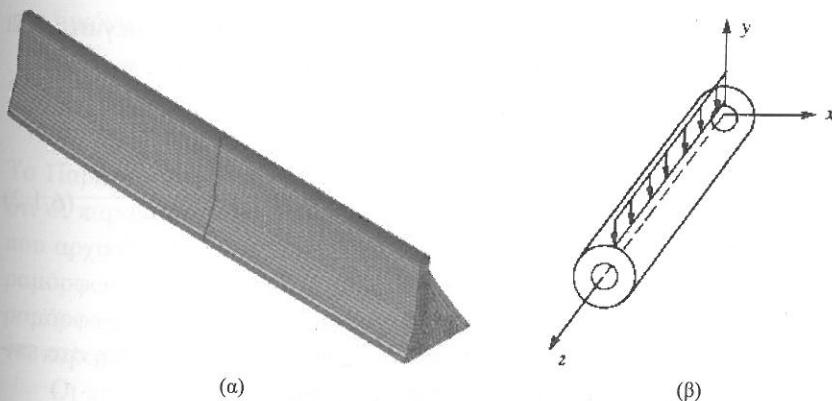
Ως *επίπεδη τάση* ορίζεται μια κατάσταση τάσης στην οποία η ορθή τάση και οι διατμητικές τάσεις που είναι κάθετες στο επίπεδο υποτίθεται ότι είναι μηδέν. Για παράδειγμα, στις Εικόνες 6-1(α) και 6-1(β), οι πλάκες στο επίπεδο  $x - y$  που παρουσιάζονται υπό επιφανειακές ελκτικές δυνάμεις  $T$  (πίεση που ασκείται στην ακμή της επιφάνειας ή στην έδρα ενός μέλους σε μονάδες δύναμη/επιφάνεια) στο επίπεδο είναι σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης· δηλαδή, η ορθή τάση  $\sigma_z$  και οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  υποτίθεται ότι είναι μηδέν. Γενικά, τα μέλη που είναι λεπτά (εκείνα με μικρή διάσταση κατά  $z$  σε σύγκριση με τις διαστάσεις κατά  $x$  και  $y$  στο εσωτερικό του επιπέδου) και των οποίων τα φορτία ενεργούν μόνο στο επίπεδο  $x - y$  μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται σε καθεστώς επίπεδης τάσης.

## Επίπεδη παραμόρφωση

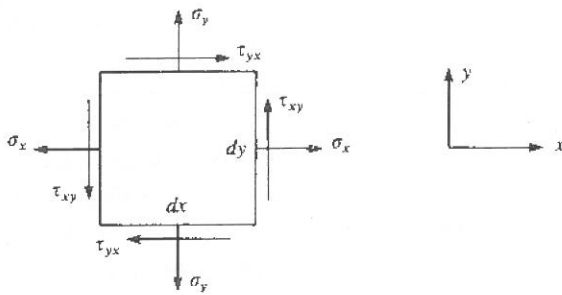
Ως *επίπεδη παραμόρφωση* ορίζεται μια κατάσταση παραμόρφωσης στην οποία η κάθετη στο επίπεδο  $x - y$  παραμόρφωση  $\varepsilon_z$  και οι διατμητικές παραμορφώσεις  $\gamma_{xz}$  και  $\gamma_{yz}$  θεωρούνται μηδέν. Οι παραδοχές της επίπεδης παραμόρφωσης είναι ρεαλιστικές για επιμήκη σώματα (έστω, στη διεύθυνση  $z$ ) με σταθερό εμβαδό διατομής που υπόκεινται σε φορτία τα οποία ενεργούν μόνο στη διεύθυνση  $x$  ή  $y$  και δεν μεταβάλλονται στη διεύθυνση  $z$ . Μερικά παραδείγματα επίπεδης παραμόρφωσης φαίνονται στην Εικόνα 6-2 [και στις Εικόνες 1-3 (ένας επιμήκης κιβωτιοειδής αγωγός) και 1-4 (ένα άκρο ράβδου υδραυλικού κυλίνδρου)]. Σε αυτά τα παραδείγματα, λαμβάνεται υπόψη μόνο ένα μοναδιαίο πάχος (1 mm ή 1 m) της κατασκευής επειδή κάθε μοναδιαίο πάχος συμπεριφέρεται πανομοιότυπα (εκτός από την περιοχή κοντά στα άκρα). Τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων των φορέων στην Εικόνα 6-2 αποτελούνται από κατάλληλα διακριτοποιημένες διατομές στο επίπεδο  $x - y$  με τα φορτία να ενεργούν σε μοναδιαίο πάχος στη διεύθυνση  $x$  ή  $y$ .



■ Εικόνα 6-1 Προβλήματα επίπεδης τάσης: (α) πλάκα με σπή· (β) πλάκα με στένωση



■ Εικόνα 6-2 Προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης: (α) φράγμα υπό οριζόντια φόρτιση (β) σωλήνας υπό κατακόρυφο φορτίο [Στο ένθετο θα δείτε την εικόνα στην έγχρωμη έκδοσή της.]



■ Εικόνα 6-3 Διδιάστατη κατάσταση τάσης

### Διδιάστατη κατάσταση τάσης και παραμόρφωσης

Η έννοια της διδιάστατης κατάστασης τάσης και παραμόρφωσης και οι σχέσεις τάσης/παραμόρφωσης για την επίπεδη τάση και την επίπεδη παραμόρφωση είναι απαραίτητες για να κατανοήσουμε πλήρως την ανάπτυξη και τη δυνατότητα εφαρμογής του μητρώου δυσκαμψίας για το τριγωνικό στοιχείο επίπεδης τάσης/επίπεδης παραμόρφωσης. Επομένως, θα περιγράψουμε σε συντομία τις βασικές έννοιες της διδιάστατης τάσης και παραμόρφωσης (δείτε τις Αναφορές [1] και [2] και το Παράρτημα Γ για περισσότερες λεπτομέρειες στο θέμα αυτό).

Πρώτα, δείχνουμε τη διδιάστατη κατάσταση της τάσης χρησιμοποιώντας την Εικόνα 6-3. Το απειροελάχιστο στοιχείο με πλευρές  $dx$  και  $dy$  έχει ορθές τάσεις  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  που ενεργούν στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  (εδώ στην κατακόρυφη και την οριζόντια έδρα), αντίστοιχα. Η διατμητική τάση  $\tau_{xy}$  δρα στην ακμή  $x$  (κατακόρυφη έδρα) στη διεύθυνση  $y$ . Η διατμητική τάση  $\tau_{yx}$  δρα στην ακμή  $y$  (οριζόντια έδρα) στη διεύθυνση  $x$ . Η ισορροπία ροπών του στοιχείου έχει ως αποτέλεσμα η  $\tau_{yx}$  να έχει ίσο μέγεθος με την  $\tau_{xy}$ . Δείτε το Παράρτημα Γ.1 για την απόδειξη αυτής της ισότητας. Επομένως, υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες τάσεις και αντιπροσωπεύονται από το διανυσματικό μητρώο στήλης

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.1.1)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας των στοιχείων προκύπτουν στο Παράρτημα Γ.1.

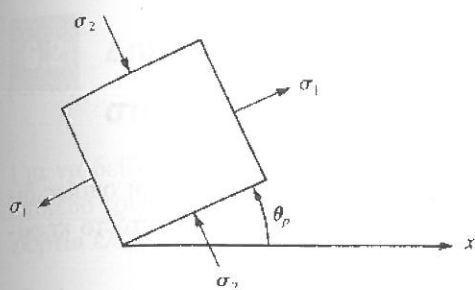
Οι τάσεις από την Εξίσωση (6.1.1) θα εκφράζονται συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου. Επομένως, αφού προσδιοριστούν οι μετατοπίσεις των κόμβων, αυτές οι τάσεις μπορούν να υπολογιστούν αμέσως.

Θυμηθείτε από την αντοχή των υλικών [2] ότι οι κύριες τάσεις, οι οποίες είναι οι μέγιστες και ελάχιστες ορθές τάσεις στο διδιάστατο επίπεδο, μπορούν να ληφθούν από τις επόμενες σχέσεις:

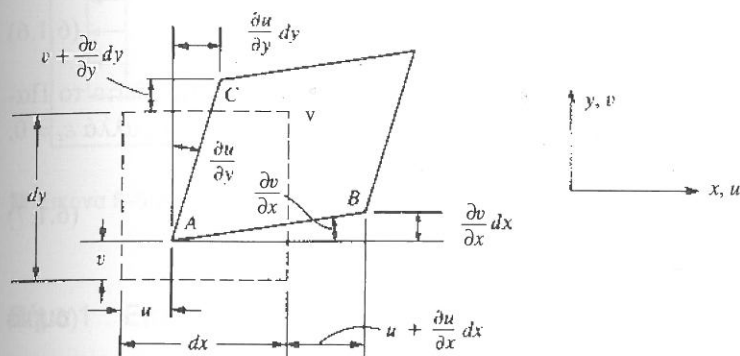
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Επίσης, η κύρια γωνία  $\theta_p$ , που ορίζει την ορθή τάση της οποίας η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο στο οποίο δρα η μέγιστη ή η ελάχιστη κύρια τάση, ορίζεται από τη σχέση

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.1.3)$$



■ Εικόνα 6-4 Κύριες τάσεις και οι διευθύνσεις τους



■ Εικόνα 6-5 Μετατοπίσεις και περιστροφές των ευθειών ενός στοιχείου στο επίπεδο  $x-y$

Η Εικόνα 6-4 δείχνει τις κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  και τη γωνία  $\theta_p$ . Θυμηθείτε (όπως δείχνει η Εικόνα 6-4) ότι η διατμητική τάση είναι μηδενική στα επίπεδα με κύρια (μέγιστη και ελάχιστη) ορθή τάση.

Στην Εικόνα 6-5, παρουσιάζουμε ένα απειροελάχιστο στοιχείο που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση της γενικής διδιάστατης κατάστασης παραμόρφωσης σε κάποιο σημείο ενός φορέα. Το στοιχείο φαίνεται να μετατοπίζεται κατά  $u$  και  $v$  στη διεύθυνση  $x$  και  $y$  στο σημείο  $A$ , και να μετατοπίζεται ή να επεκτείνεται κατά μια πρόσθετη ποσότητα  $(\partial u/\partial x)dx$  κατά μήκος της ευθείας  $AB$ , και κατά  $(\partial v/\partial y)dy$  κατά μήκος της ευθείας  $AC$  στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, παρατηρώντας τις ευθείες  $AB$  και  $AC$ , βλέπουμε ότι το σημείο  $B$  μετακινείται προς τα επάνω κατά  $(\partial v/\partial x)dx$  ως προς το  $A$ , και το σημείο  $C$  μετακινείται προς τα δεξιά κατά  $(\partial u/\partial y)dy$  ως προς το  $A$ .

Από τους γενικούς ορισμούς των ορθών και των διατμητικών παραμορφώσεων, και τη χρήση της Εικόνας 6-5, έχουμε

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.1.4)$$

Το Παράρτημα Γ.2 περιέχει τη λεπτομερή εύρεση των Εξισώσεων (6.1.4). Επομένως, θυμηθείτε ότι οι παραμορφώσεις  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  είναι οι αλλαγές στο μήκος ανά μονάδα μήκους των ινών υλικού που αρχικά είναι παράλληλες με τους άξονες  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα, όταν το στοιχείο υφίσταται παραμόρφωση. Αυτές οι παραμορφώσεις λέγονται τότε *κάθετες* (ή *διαμήκειες*) *παραμορφώσεις*. Η παραμόρφωση  $\gamma_{xy}$  είναι η αλλαγή στην αρχική ορθή γωνία μεταξύ  $dx$  και  $dy$  όταν το στοιχείο υφίσταται παραμόρφωση. Τότε, η παραμόρφωση  $\gamma_{xy}$  ονομάζεται *διατμητική παραμόρφωση*.

Οι παραμορφώσεις από τις Εξισώσεις (6.1.4) αντιπροσωπεύονται γενικά από το διανυσματικό μητρώο στήλης

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.1.5)$$

Οι σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , οι οποίες δίνονται από τις Εξισώσεις (6.1.4), αρκούν για να κατανοήσετε όσα ακολουθούν σε αυτό το κεφάλαιο.

Παρουσιάζουμε τώρα τις σχέσεις τάσης/παραμόρφωσης για ιστροπικά υλικά και για επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση. Για επίπεδη τάση, υποθέτουμε ότι οι επόμενες τάσεις είναι μηδενικές:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.1.6)$$

Με εφαρμογή της Εξίσωσης (6.1.6) στη σχέση τριδιάστατης τάσης/παραμόρφωσης [δείτε το Παράρτημα Γ, Εξίσωση (Γ.3.10)], για τις διατμητικές παραμορφώσεις ισχύει  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , αλλά  $\varepsilon_z \neq 0$ . Για συνθήκες επίπεδης τάσης, έχουμε

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (6.1.7)$$

όπου

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1.8)$$

ονομάζεται *μητρώο τάσης/παραμόρφωσης* (ή *καταστατικό μητρώο*),  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας, και  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson. Στην Εξίσωση (6.1.7), τα  $\{\sigma\}$  και  $\{\varepsilon\}$  ορίζονται από τις Εξισώσεις (6.1.1) και (6.1.5), αντίστοιχα.

Για επίπεδη παραμόρφωση, υποθέτουμε ότι οι επόμενες παραμορφώσεις είναι μηδενικές:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6.1.9)$$

Με εφαρμογή της Εξίσωσης (6.1.9) στη σχέση τριδιάστατης τάσης/παραμόρφωσης [Εξίσωση (Γ.3.10)], για τις διατμητικές τάσεις ισχύει  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , αλλά  $\sigma_z \neq 0$ . Το μητρώο τάσης/παραμόρφωσης γίνεται

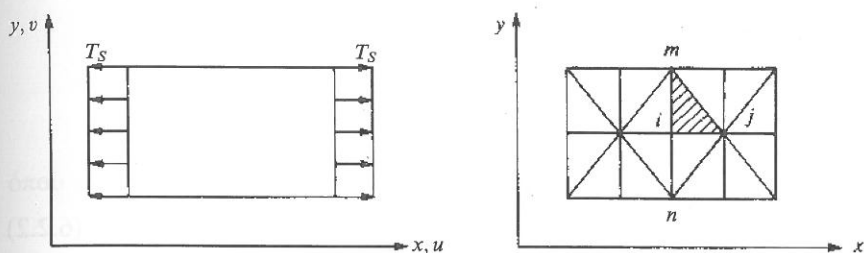
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1.10)$$

Τα μητρώα  $\{\sigma\}$  και  $\{\varepsilon\}$  παραμένουν ίδια όπως και για την περίπτωση της επίπεδης τάσης. Οι βασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις για επίπεδη τάση, όπως προκύπτουν στην Αναφορά [1], είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

## 6.2 Δημιουργία του μητρώου δυσκαμψίας και των εξισώσεων τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης

Για να δείξουμε τα βήματα και να παρουσιάσουμε τις βασικές εξισώσεις που απαιτούνται για το επίπεδο τριγωνικό στοιχείο, θεωρήστε τη λεπτή πλάκα που υπόκειται σε επιφανειακά εφελκυστικά φορτία έλξης  $T_s$  στην Εικόνα 6-6(α).



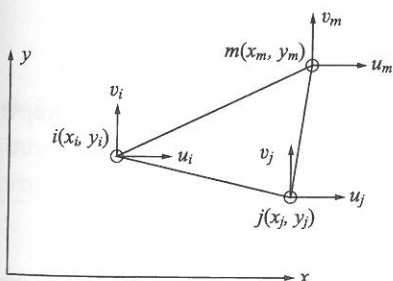
■ Εικόνα 6-6(α) Λεπτή πλάκα σε εφελκυσμό

■ Εικόνα 6-6(β) Διακριτοποιημένη πλάκα της Εικόνας 6-6(α) με τριγωνικά στοιχεία

### Βήμα 1 Επιλέξτε τύπο στοιχείου

Για να αναλύσουμε την πλάκα, θεωρούμε το βασικό τριγωνικό στοιχείο της Εικόνας 6-7 που έχει ληφθεί από τη διακριτοποιημένη πλάκα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-6(β). Η διακριτοποιημένη πλάκα έχει διαιρεθεί σε τριγωνικά στοιχεία, καθένα με κόμβους όπως  $i, j$ , και  $m$ . Χρησιμοποιούμε τριγωνικά στοιχεία, επειδή τα όρια σωμάτων ακανόνιστου σχήματος μπορούν να προσεγγιστούν με ακρίβεια με αυτόν τον τρόπο, και επειδή οι εκφράσεις που έχουν σχέση με το τριγωνικό στοιχείο είναι σχετικά απλές. Αυτή η διακριτοποίηση ονομάζεται *δημιουργία αραιού πλέγματος* (coarse-mesh generation) αν χρησιμοποιούνται μερικά μεγάλα στοιχεία. Κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας — μία μετατόπιση κατά  $x$  και μία κατά  $y$ . Έστω ότι  $u_i$  και  $v_i$  αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες μετατόπισης του κόμβου  $i$  στη διεύθυνση  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

Εδώ όλες οι σχέσεις βασίζονται σε αυτό το αριστερόστροφο σύστημα ονομασίας των κόμβων, αν και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα δεξιόστροφο σύστημα ονομασίας. Θυμηθείτε ότι μια συνεπής διαδικασία ονομασίας για ολόκληρο το σώμα είναι απαραίτητη για την αποφυγή προβλημάτων στους υπολογισμούς, όπως αρνητικά εμβαδά στοιχείων. Εδώ  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ , και  $(x_m, y_m)$  είναι οι γνωστές συντεταγμένες των κόμβων  $i, j$ , και  $m$ , αντίστοιχα.



■ Εικόνα 6-7 Βασικό τριγωνικό στοιχείο όπου φαίνονται οι βαθμοί ελευθερίας

Το μητρώο της μετατόπισης των κόμβων δίνεται ως

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \\ \{d_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.1)$$

## Βήμα 2 Επιλέξτε συναρτήσεις μετατόπισης

Επιλέγουμε μια γραμμική συνάρτηση μετατόπισης για κάθε στοιχείο ως

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (6.2.2)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y$$

όπου  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  περιγράφουν μετατοπίσεις σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο  $(x_i, y_i)$  του στοιχείου.

Η γραμμική συνάρτηση διασφαλίζει την τήρηση της συμβατότητας. Μια γραμμική συνάρτηση με καθορισμένα άκρα έχει μόνο μία διαδρομή να διασχίσει — δηλαδή, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο σημείων. Επομένως, η γραμμική συνάρτηση εξασφαλίζει ότι οι μετατοπίσεις κατά μήκος της ακμής και στους κόμβους που έχουν κοινά γειτονικά στοιχεία, όπως η ακμή  $i-j$  των δύο στοιχείων που φαίνεται στην Εικόνα 6–6(β), θα είναι ίσες. Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.2), η γενική συνάρτηση μετατόπισης  $\{\psi\}$ , η οποία περιέχει τις  $u$  και  $v$ , μπορεί να εκφραστεί ως

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (6.2.3)$$

Για να βρούμε τα  $a$  στην Εξίσωση (6.2.2), ξεκινούμε αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των κόμβων στις Εξισώσεις (6.2.2) και έχουμε

$$\begin{aligned} u_i &= u(x_i, y_i) = a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ u_j &= u(x_j, y_j) = a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ u_m &= u(x_m, y_m) = a_1 + a_2x_m + a_3y_m \\ v_i &= v(x_i, y_i) = a_4 + a_5x_i + a_6y_i \\ v_j &= v(x_j, y_j) = a_4 + a_5x_j + a_6y_j \\ v_m &= v(x_m, y_m) = a_4 + a_5x_m + a_6y_m \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς τα  $a$  με αρχή τις τρεις πρώτες από τις Εξισώσεις (6.2.4) σε μορφή μητρώου

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2.5)$$



ή, λύνοντας ως προς  $a$ , έχουμε

$$\{a\} = [x]^{-1} \{u\} \quad (6.2.6)$$

όπου  $[x]$  είναι το μητρώο  $3 \times 3$  στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (6.2.5). Η μέθοδος των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (cofactors — Παράρτημα Α) είναι μια πιθανή μέθοδος για να βρούμε το αντίστροφο του  $[x]$ . Έτσι,

$$[x]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

όπου

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (6.2.8)$$

είναι η ορίζουσα του  $[x]$ , που υπολογίζεται ως

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \quad (6.2.9)$$

Εδώ,  $A$  είναι το εμβαδό του τριγώνου, και

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_m - y_j x_m & \alpha_j &= y_i x_m - x_i y_m & \alpha_m &= x_i y_j - y_i x_j \\ \beta_i &= y_j - y_m & \beta_j &= y_m - y_i & \beta_m &= y_i - y_j \\ \gamma_i &= x_m - x_j & \gamma_j &= x_i - x_m & \gamma_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Έχοντας προσδιορίσει το  $[x]^{-1}$ , μπορούμε τώρα να εκφράσουμε την Εξίσωση (6.2.6) σε μορφή αναπτυγμένου μητρώου ως

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.11)$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις τρεις τελευταίες από τις Εξισώσεις (6.2.4), παίρνουμε

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.12)$$

Θα καταλήξουμε στη γενική συνάρτηση μετατόπισης κατά  $x$ ,  $u(x, y)$ , του  $\{\psi\}$  (η  $v$  θα ακολουθήσει ανάλογα) συναρτήσει των μεταβλητών συντεταγμένων  $x$  και  $y$ , των γνωστών μεταβλητών συντεταγμένων  $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \gamma_m$ , και των άγνωστων μετατοπίσεων κόμβων  $u_i, u_j$ , και  $u_m$ . Ξεκινώντας με τις Εξισώσεις (6.2.2) σε μορφή μητρώου, έχουμε

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2.13)$$

Με αντικατάσταση της Εξίσωσης (6.2.11) στην Εξίσωση (6.2.13), έχουμε

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.14)$$

Επεκτείνοντας την Εξίσωση (6.2.14), έχουμε

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} \alpha_i u_i + \alpha_j u_j + \alpha_m u_m \\ \beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m \\ \gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_m u_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.15)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μητρώα στην Εξίσωση (6.2.15) και μετά από αναδιάταξη, έχουμε

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \{(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)u_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)u_m\} \quad (6.2.16)$$

Αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τα  $u_i$  με  $v_i$ ,  $u_j$  με  $v_j$ , και  $u_m$  με  $v_m$  στην Εξίσωση (6.2.16), έχουμε τη μετατόπιση στη διεύθυνση του άξονα  $y$  να δίνεται από τη σχέση

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} \{(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)v_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)v_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)v_m\} \quad (6.2.17)$$

Για να εκφράσουμε τις Εξισώσεις (6.2.16) και (6.2.17) για τα  $u$  και  $v$  σε απλούστερη μορφή, ορίζουμε

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \\ N_m &= \frac{1}{2A}(\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.18), μπορούμε να ξαναγράψουμε τις Εξισώσεις (6.2.16) και (6.2.17) ως εξής:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Εκφράζοντας την Εξίσωση (6.2.19) σε μορφή μητρώου, έχουμε

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{Bmatrix}$$

ή

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.20)$$

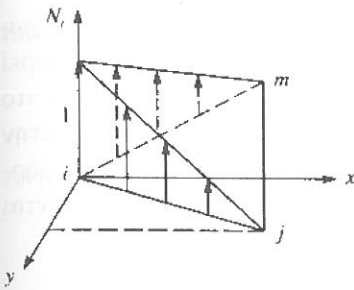
Τέλος, εκφράζοντας την Εξίσωση (6.2.20) σε συντομευμένη μορφή μητρώου, έχουμε

$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (6.2.21)$$

όπου το  $[N]$  δίνεται από τη σχέση

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (6.2.22)$$

Έχουμε τώρα εκφράσει τις γενικές μετατοπίσεις ως συναρτήσεις του  $\{d\}$ , με τις συναρτήσεις σχήματος  $N_i$ ,  $N_j$ , και  $N_m$ . Οι συναρτήσεις σχήματος αντιπροσωπεύουν το σχήμα του  $\{\psi\}$  όταν

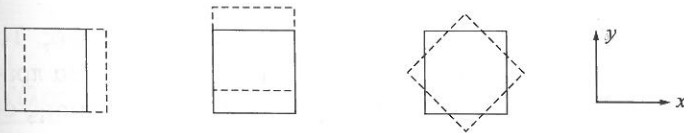


■ Εικόνα 6-8 Μεταβολή της  $N_i$  επάνω από την επιφάνεια  $x - y$  ενός τυπικού στοιχείου

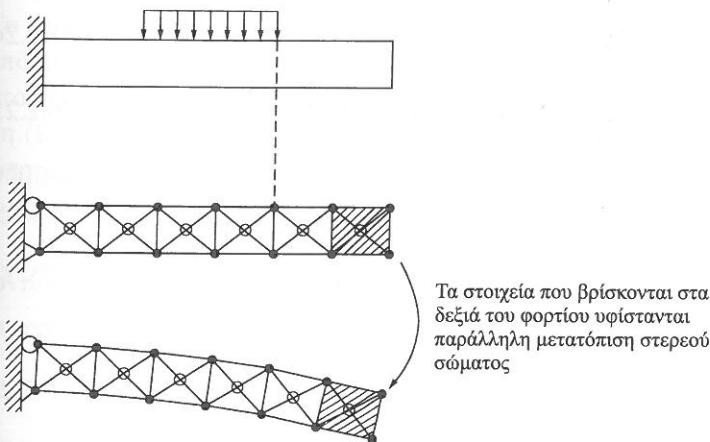
σχεδιάζονται επί ενός τυπικού στοιχείου. Για παράδειγμα, η  $N_i$  αντιπροσωπεύει το σχήμα της μεταβλητής  $u$  όταν σχεδιάζεται επί του στοιχείου για  $u_i = 1$  και όλους τους άλλους βαθμούς ελευθερίας ίσους με μηδέν· δηλαδή,  $u_j = u_m = v_i = v_j = v_m = 0$ . Επιπλέον, η  $u(x_i, y_i)$  θα πρέπει να είναι ίση με  $u_i$ . Επομένως, πρέπει να έχουμε  $N_i = 1$ ,  $N_j = 0$ , και  $N_m = 0$  για  $(x_i, y_i)$ . Αντίστοιχα,  $u(x_j, y_j) = u_j$ . Επομένως, θα είναι  $N_i = 0$ ,  $N_j = 1$ , και  $N_m = 0$  για  $(x_j, y_j)$ . Η Εικόνα 6-8 δείχνει τη μεταβολή σχήματος της γραφικής παράστασης της  $N_i$  στην επιφάνεια ενός τυπικού στοιχείου. Σημειώστε ότι η  $N_i$  δεν είναι ίση με μηδέν, εκτός από κατά μήκος μιας ευθείας που συνδέει και περιλαμβάνει τους κόμβους  $j$  και  $m$ .

Τέλος,  $N_i + N_j + N_m = 1$  για όλες τις θέσεις  $x$  και  $y$  στην επιφάνεια του στοιχείου έτσι ώστε τα  $u$  και  $v$  να δίνουν μια σταθερή τιμή όταν συμβαίνει μετατόπιση στερεού σώματος. Η απόδειξη αυτής της σχέσης είναι σύμφωνη με αυτή για το στοιχείο ράβδου στην Ενότητα 3.2 και σας την αφήνουμε ως άσκηση (Πρόβλημα 6.1). Οι συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται επίσης για την εύρεση των δυνάμεων σώματος και επιφάνειας σε κόμβους στοιχείων, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 6.3.

Η απαίτηση πληρότητας για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης που χρησιμοποιείται σε ένα διδιάστατο στοιχείο επίπεδης τάσης φαίνεται στην Εικόνα 6-9. Το στοιχείο θα πρέπει



(α) Καταστάσεις στερεού σώματος ενός στοιχείου επίπεδης τάσης (από αριστερά προς τα δεξιά, καθαρή παράλληλη μετακίνηση στη διεύθυνση  $x$  και  $y$  και καθαρή περιστροφή)



Τα στοιχεία που βρίσκονται στα δεξιά του φορτίου υφίστανται παράλληλη μετατόπιση στερεού σώματος

(β) Δοκός προβόλου προσομοιωμένη με τριγωνικά στοιχεία σταθερής παραμόρφωσης· τα στοιχεία στα δεξιά του φορτίου είναι χωρίς τάση

■ Εικόνα 6-9 Στοιχεία χωρίς τάση σε δοκό προβόλου με προσομοίωση CST

να μπορεί να μετακινείται ομοιόμορφα στη διεύθυνση  $x$  ή  $y$  στο επίπεδο, και να περιστρέφεται χωρίς παραμόρφωση όπως στην Εικόνα 6-9(α). Ο λόγος για τον οποίο το στοιχείο πρέπει να μπορεί να μετακινείται ως στερεό σώμα και να περιστρέφεται χωρίς να υφίσταται τάση παρουσιάζεται στο παράδειγμα μιας δοκού προβόλου η οποία προσομοιώνεται με στοιχεία επίπεδης τάσης όπως στην Εικόνα 6-9(β). Με απλή στατική, τα στοιχεία δοκού που βρίσκονται πέρα από το σημείο της φόρτισης είναι χωρίς τάση. Επομένως, αυτά τα στοιχεία θα πρέπει να είναι ελεύθερα να μετακινούνται και να περιστρέφονται χωρίς επιμήκυνση ή αλλαγή σχήματος.

### Βήμα 3 Ορίστε τις σχέσεις παραμόρφωσης/μετατόπισης και τάσης/παραμόρφωσης

Εκφράζουμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις των στοιχείων συναρτήσει των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων.

#### Παραμορφώσεις στοιχείων

Οι παραμορφώσεις που αφορούν το διδιάστατο στοιχείο δίνονται από τη σχέση

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.2.23\alpha)$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις μετατόπισης για τα  $u$  και  $v$  από τις Εξισώσεις (6.2.2) στην Εξίσωση (6.2.23α), έχουμε

$$\varepsilon_x = a_2 \quad \varepsilon_y = a_6 \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5 \quad (6.2.23\beta)$$

Παρατηρούμε από την Εξίσωση (6.2.23β) ότι οι παραμορφώσεις στο στοιχείο είναι σταθερές. Το στοιχείο τότε λέγεται τρίγωνο σταθερής παραμόρφωσης (constant-strain triangle — CST). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι, με βάση την παραδοχή της επιλογής συναρτήσεων μετατόπισης οι οποίες είναι γραμμικές κατά  $x$  και  $y$ , όλες οι ευθείες στο τριγωνικό στοιχείο παραμένουν ευθείες καθώς το στοιχείο παραμορφώνεται.

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.19) για τις μετατοπίσεις, έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m) \quad (6.2.24)$$

ή

$$u_{,x} = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + N_{m,x} u_m \quad (6.2.25)$$

όπου το κόμμα που ακολουθείται από μια μεταβλητή δείχνει διαφορίση ως προς αυτή τη μεταβλητή. Έχουμε χρησιμοποιήσει  $u_{i,x} = 0$  επειδή  $u_{i,x} = u(x_i, y_i)$  είναι μια σταθερή τιμή· αντίστοιχα,  $u_{j,x} = 0$  και  $u_{m,x} = 0$ .

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.18), μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκφράσεις για τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος στην Εξίσωση (6.2.25) ως εξής:

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \quad (6.2.26)$$

Αντίστοιχα,

$$N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \quad \text{και} \quad N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A} \quad (6.2.27)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.26) και (6.2.27) στην Εξίσωση (6.2.25), έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A}(\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m) \quad (6.2.28)$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(\gamma_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_m u_m + \beta_m v_m) \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.28) και (6.2.29) στην Εξίσωση (6.2.23α), έχουμε

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (6.2.30)$$

$$\text{ή} \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \\ \{d_m\} \end{Bmatrix} \quad (6.2.31)$$

όπου

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad [B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad [B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (6.2.32)$$

Τέλος, σε απλοποιημένη μορφή μητρώου, η Εξίσωση (6.2.31) μπορεί να γραφεί ως

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (6.2.33)$$

όπου

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{bmatrix} \quad (6.2.34)$$

Το μητρώο  $[B]$  (που μερικές φορές λέγεται μητρώο κλίσης — gradient matrix) είναι ανεξάρτητο από τις συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Εξαρτάται αποκλειστικά από τις συντεταγμένες των κόμβων του στοιχείου, όπως φαίνεται από τις Εξισώσεις (6.2.32) και (6.2.10). Οι παραμορφώσεις στην Εξίσωση (6.2.33) θα είναι σταθερές (συνεπείς με τις απλές εκφράσεις που έδωσε προηγουμένως η Εξίσωση (6.2.23β)).

### Σχέση τάσης/παραμόρφωσης

Γενικά, η σχέση τάσης/παραμόρφωσης στο επίπεδο δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.2.35)$$

όπου το  $[D]$  δίνεται από την Εξίσωση (6.1.8) για προβλήματα επίπεδης τάσης και από την Εξίσωση (6.1.10) για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.2.33) στην Εξίσωση (6.2.35), έχουμε τις τάσεις στο επίπεδο συναρτήσει των άγνωστων βαθμών ελευθερίας κόμβων ως

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (6.2.36)$$

όπου οι τάσεις  $\{\sigma\}$  είναι επίσης σταθερές παντού μέσα στο στοιχείο.

#### Βήμα 4 Βρείτε το μητρώο και τις εξισώσεις δυσκαμψίας του στοιχείου

Χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας<sup>1</sup>, μπορούμε να καταστρώσουμε τις εξισώσεις για ένα τυπικό τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης. Μην ξεχνάτε ότι για το βασικό στοιχείο επίπεδης παραμόρφωσης, η συνολική δυναμική ενέργεια είναι τώρα συνάρτηση των μετατοπίσεων των κόμβων  $u_i, v_i, u_j, \dots, v_m$  (δηλαδή, του  $\{d\}$ ) έτσι ώστε

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (6.2.37)$$

Εδώ η συνολική δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (6.2.38)$$

όπου η ενέργεια παραμόρφωσης είναι

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (6.2.39)$$

ή, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.2.35), έχουμε

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV \quad (6.2.40)$$

όπου στην Εξίσωση (6.2.40) έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση  $[D]^T = [D]$ .

Η δυναμική ενέργεια των δυνάμεων του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_b = - \iiint_V \{\psi\}^T \{X\} dV \quad (6.2.41)$$

όπου  $\{\psi\}$  είναι πάλι η γενική συνάρτηση μετατόπισης, και  $\{X\}$  είναι το βάρος σώματος/μονάδα όγκου ή μητρώο πυκνότητας βάρους (τυπικά, σε μονάδες kilonewton ανά κυβικό μέτρο).

Η δυναμική ενέργεια των συγκεντρωμένων φορτίων δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_p = -\{d\}^T \{P\} \quad (6.2.42)$$

<sup>1</sup> Για όσους έχουν γνώσεις λογισμού μεταβολών (variational calculus), ίσως θα ήταν σκόπιμο να αναφέρουμε ότι οι τυπικές σχέσεις μετατόπισης της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, με βάση τη λήψη της μεταβολής της συνολικής δυναμικής ενέργειας, ενισχύουν εγγενώς το γεγονός ότι οι συνοριακές συνθήκες εσωτερικής ισορροπίας και τάσης επιβάλλονται με την έννοια της μέσης τιμής ή ολοκληρωτικής μορφής και όχι σημείο προς σημείο. Στη βιβλιογραφία, η επίσημη μαθηματική βάση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται ασθενής μορφή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την ισχυρή μορφή όπου όλες οι διαφορικές εξισώσεις τάσης και οι συνοριακές συνθήκες που τη διέπουν δηλώνονται και ικανοποιούνται σημείο προς σημείο.

Επιπλέον, η ορολογία της ασθενούς μορφής σε σύγκριση με την ισχυρή μορφή δεν συνεπάγεται ότι η ασθενής μορφή είναι υποδεέστερη καθώς και οι δύο μορφές είναι έγκυρες διατυπώσεις ενός προβλήματος, όπως αυτό της επίπεδης τάσης. Για την ακρίβεια, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ασθενής μορφή οδηγεί στην ισχυρή μορφή όταν στην προσέγγιση χρησιμοποιούνται άπειροι βαθμοί ελευθερίας. Για μια πιο αναλυτική σύγκριση της ισχυρής έναντι της ασθενούς μορφής, συμβουλευτείτε την Αναφορά [3].

όπου το  $\{d\}$  αντιπροσωπεύει τις συνηθισμένες μετατοπίσεις κόμβων και το  $\{P\}$  αντιπροσωπεύει τώρα τα συγκεντρωμένα εξωτερικά φορτία.

Η δυναμική ενέργεια των κατανεμημένων φορτίων (ή επιφανειακών έλξεων) που μετακινούνται μέσω αντίστοιχων επιφανειακών μετατοπίσεων δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_s = - \iint_S \{\psi_s\}^T \{T_s\} dS \quad (6.2.43)$$

όπου το  $\{T_s\}$  αντιπροσωπεύει τις επιφανειακές έλξεις (τυπικά σε μονάδες kilonewton ανά τετραγωνικό μέτρο), το  $\{\psi_s\}$  αντιπροσωπεύει το πεδίο των επιφανειακών μετατοπίσεων μέσω των οποίων δρουν οι επιφανειακές έλξεις, και το  $S$  αντιπροσωπεύει τις επιφάνειες στις οποίες δρουν οι έλξεις  $\{T_s\}$ . Ανάλογα με την Εξίσωση (6.2.21), εκφράζουμε το  $\{\psi_s\}$  ως  $\{\psi_s\} = [N_s] \{d\}$ , όπου το  $[N_s]$  αντιπροσωπεύει το μητρώο της συνάρτησης σχήματος υπολογισμένο κατά μήκος της επιφάνειας όπου δρα η επιφανειακή έλξη.

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.2.21) για το  $\{\psi\}$  και την Εξίσωση (6.2.33) για τις παραμορφώσεις στις Εξισώσεις (6.2.40) έως (6.2.43), έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \iiint_V \{d\}^T [B]^T [D] [B] \{d\} dV - \iiint_V \{d\}^T [N]^T \{X\} dV - \{d\}^T \{P\} \\ & - \iint_S \{d\}^T [N_s]^T \{T_s\} dS \end{aligned} \quad (6.2.44)$$

Οι μετατοπίσεις κόμβων  $\{d\}$  είναι ανεξάρτητες από τις γενικές συντεταγμένες  $x - y$ , οπότε το  $\{d\}$  μπορεί να βγει ως κοινός παράγοντας από τα ολοκληρώματα της Εξίσωσης (6.2.44). Επομένως, θα είναι

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \{d\}^T \left[ \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{d\}^T \left[ \iiint_V [N]^T \{X\} dV \right. \\ & \left. - \{d\}^T \{P\} - \{d\}^T \iint_S [N_s]^T \{T_s\} dS \right] \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

Από τις Εξισώσεις (6.2.41) έως (6.2.43), μπορούμε να δούμε ότι οι τρεις τελευταίοι όροι της Εξίσωσης (6.2.45) αντιπροσωπεύουν το συνολικό σύστημα φορτίων σε ένα στοιχείο· δηλαδή,

$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_S [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (6.2.46)$$

όπου ο πρώτος, ο δεύτερος, και ο τρίτος όρος στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (6.2.46) αντιπροσωπεύουν τις δυνάμεις σώματος, τις συγκεντρωμένες δυνάμεις κόμβων, και τις επιφανειακές έλξεις, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.2.46) στην Εξίσωση (6.2.45), έχουμε

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{d\}^T \left[ \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{d\}^T \{f\} \quad (6.2.47)$$

Παίρνοντας την πρώτη παραλλαγή, ή ισοδύναμα, όπως είδαμε στα Κεφάλαια 2 και 3, τη μερική παράγωγο  $\pi_p$  ως προς τις μετατοπίσεις κόμβων αφού  $\pi_p = \pi_p(\{d\})$  (όπως κάναμε προηγουμένως για τα στοιχεία ράβδου και δοκού στα Κεφάλαια 3 και 4, αντίστοιχα), θα έχουμε

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{d\}} = \left[ \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{f\} = 0 \quad (6.2.48)$$

Ξαναγράφοντας την Εξίσωση (6.2.48), έχουμε

$$\iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} = \{f\} \quad (6.2.49)$$

όπου η μερική παράγωγος ως προς το μητρώο  $\{d\}$  ορίστηκε προηγουμένως από την Εξίσωση (2.6.12). Από την Εξίσωση (6.2.49) μπορούμε να δούμε ότι

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (6.2.50)$$

Για ένα στοιχείο με σταθερό πάχος,  $t$ , η Εξίσωση (6.2.50) γίνεται

$$[k] = t \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy \quad (6.2.51)$$

όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα (integrand) δεν είναι συνάρτηση του  $x$  ή του  $y$  για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης και έτσι μπορεί να βγει ως κοινός παράγοντας από το ολοκλήρωμα για να πάρουμε

$$[k] = tA [B]^T [D] [B] \quad (6.2.52)$$

όπου το  $A$  δίνεται από την Εξίσωση (6.2.9), το  $[B]$  από την Εξίσωση (6.2.34), και το  $[D]$  από την Εξίσωση (6.1.8) ή την Εξίσωση (6.1.10). Θα δεχθούμε στοιχεία σταθερού πάχους. (Αυτή η παραδοχή συγκλίνει προς την πραγματική κατάσταση καθώς το μέγεθος του στοιχείου μειώνεται.)

Από την Εξίσωση (6.2.52) βλέπουμε ότι το  $[k]$  είναι συνάρτηση των συντεταγμένων των κόμβων (επειδή τα  $[B]$  και  $A$  ορίζονται συναρτήσει αυτών) και των μηχανικών ιδιοτήτων  $E$  και  $\nu$  (από τις οποίες η  $[D]$  είναι μια συνάρτηση). Η ανάπτυξη της Εξίσωσης (6.2.52) για ένα στοιχείο είναι

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{im}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] & [k_{jm}] \\ [k_{mi}] & [k_{mj}] & [k_{mm}] \end{bmatrix} \quad (6.2.53)$$

όπου τα υπομητρώα  $2 \times 2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= [B_i]^T [D] [B_i] tA \\ [k_{ij}] &= [B_i]^T [D] [B_j] tA \\ [k_{im}] &= [B_i]^T [D] [B_m] tA \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

και ούτω καθεξής. Στις Εξισώσεις (6.2.54), τα  $[B_i]$ ,  $[B_j]$ , και  $[B_m]$  ορίζονται από τις Εξισώσεις (6.2.32). Το μητρώο  $[k]$  εμφανίζεται ως ένα μητρώο  $6 \times 6$  (ίσο σε τάξη με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο, δηλαδή δύο, επί τον συνολικό αριθμό των κόμβων ανά στοιχείο, δηλαδή τρία).

Γενικά, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η Εξίσωση (6.2.46) για τον υπολογισμό των δυνάμεων επιφάνειας και σώματος. Όταν χρησιμοποιείται η Εξίσωση (6.2.46) για τον υπολογισμό των δυνάμεων επιφάνειας και σώματος, οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται *συνεπή φορτία* (consistent loads) επειδή προέρχονται από τη συνεπή (ενεργειακή) προσέγγιση. Για στοιχεία υψηλότερης τάξης, συνήθως με τετραγωνικές ή κυβικές συναρτήσεις μετατόπισης, πρέπει να χρησιμοποιείται η Εξίσωση (6.2.46). Παρ' όλα αυτά, για το στοιχείο CST, οι δυνάμεις σώματος και επιφάνειας μπορούν να συσσωρευτούν στους κόμβους με ισοδύναμα αποτελέσματα (αυτό το δείχνουμε στην Ενότητα 6.3) και να προστεθούν σε οποιεσδήποτε συγκεντρωμένες δυνάμεις κόμβων ώστε να προκύψει το μητρώο δυνάμεων του κάθε στοιχείου. Οι εξισώσεις των στοιχείων δίνονται τότε ως

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2.55)$$



Τέλος, συνειδητοποιώντας ότι η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  είναι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (2.6.47) και χρησιμοποιώντας την έκφραση για το μητρώο δυσκαμψίας από την Εξίσωση (6.2.50), μπορούμε και πάλι να εκφράσουμε την ενέργεια παραμόρφωσης στην τετραγωνική μορφή  $U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\}$ .

### Βήμα 5 Συνδυάστε τις εξισώσεις των επιμέρους στοιχείων για να πάρετε τις γενικές εξισώσεις και προσθέστε συνοριακές συνθήκες

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας, παίρνουμε το ολικό μητρώο δυσκαμψίας και τις ολικές εξισώσεις

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad (6.2.56)$$

και 
$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (6.2.57)$$

όπου, στην Εξίσωση (6.2.56), τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των στοιχείων ορίζονται με βάση το γενικό σύστημα συντεταγμένων  $x - y$ , το  $\{d\}$  είναι τώρα το συνολικό μητρώο μετατοπίσεων του φορέα, και

$$\{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (6.2.58)$$

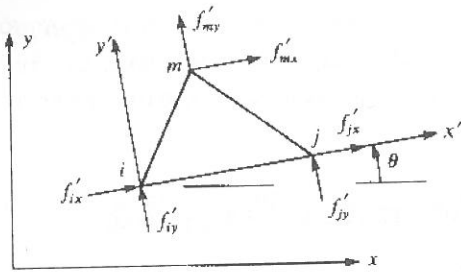
είναι η στήλη των ισοδύναμων ολικών φορτίων στους κόμβους τα οποία προκύπτουν με τη συσσώρευση δυνάμεων σώματος και κατανεμημένων φορτίων στους κατάλληλους κόμβους (καθώς και με συγκεντρωμένα φορτία κόμβων) ή με συνεπή χρήση της Εξίσωσης (6.2.46). (Περισσότερες λεπτομέρειες για τον χειρισμό των δυνάμεων σώματος και επιφανειακών έλξεων στην Ενότητα 6.3.)

Κατά τη δημιουργία του μητρώου δυσκαμψίας της Εξίσωσης (6.2.52), το μητρώο δημιουργήθηκε για γενικό προσανατολισμό σε γενικές συντεταγμένες. Η Εξίσωση (6.2.52) ισχύει τότε για όλα τα στοιχεία. Τα μητρώα όλων των στοιχείων εκφράζονται σε προσανατολισμό γενικών συντεταγμένων. Επομένως, δεν απαιτείται μετασχηματισμός από τοπικές σε ολικές εξισώσεις. Παρ' όλα αυτά, για λόγους πληρότητας, θα περιγράψουμε τώρα τη μέθοδο που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί αν οι τοπικοί άξονες για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης δεν είναι παράλληλοι με τους γενικούς άξονες για ολόκληρη την κατασκευή.

Αν οι τοπικοί άξονες για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης δεν είναι παράλληλοι με τους γενικούς άξονες για ολόκληρη την κατασκευή, θα πρέπει να εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς περιστροφής αξόνων παρόμοιους με αυτούς που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3 με την Εξίσωση (3.3.16) στο μητρώο δυσκαμψίας στοιχείων, καθώς και στα μητρώα δυνάμεων κόμβων και μετατόπισης των στοιχείων. Δείχνουμε τον μετασχηματισμό των αξόνων για το τριγωνικό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 6-10, θεωρώντας ότι το στοιχείο έχει τοπικούς άξονες  $x' - y'$  που δεν είναι παράλληλοι με τους γενικούς άξονες  $x - y$ . Οι τοπικές δυνάμεις στους κόμβους φαίνονται στην εικόνα. Ο μετασχηματισμός από τοπικές σε γενικές εξισώσεις γίνεται με τη διαδικασία που περιγράφεται στην Ενότητα 3.4. Έχουμε τις ίδιες γενικές εκφράσεις, τις Εξισώσεις (3.4.14), (3.4.16), και (3.4.22), να συνδέουν τις τοπικές με τις ολικές μετατοπίσεις, δυνάμεις, και μητρώα δυσκαμψίας, αντίστοιχα· δηλαδή,

$$\{d'\} = [T] \{d\} \quad \{f'\} = [T] \{f\} \quad [k] = [T]^T [k'] [T] \quad (6.2.59)$$

όπου πρέπει να αναπτυχθεί η Εξίσωση (3.4.15) για το μητρώο μετασχηματισμού  $[T]$  που χρησιμοποιείται τις Εξισώσεις (2.6.59), επειδή υπάρχουν δύο πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας στο τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης. Έτσι, η Εξίσωση (3.4.15) αναπτύσσεται σε



■ Εικόνα 6-10 Τριγωνικό στοιχείο με τοπικούς άξονες που δεν είναι παράλληλοι με τους γενικούς άξονες

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{matrix} \quad (6.2.60)$$

όπου  $C = \cos\theta$ ,  $S = \sin\theta$ , και η  $\theta$  φαίνεται στην Εικόνα 6-10.

### Βήμα 6 Λύστε ως προς τις μετατοπίσεις

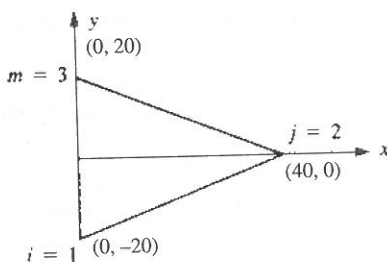
Προσδιορίζουμε τις άγνωστες μετατοπίσεις κόμβων του συνολικού φορέα με την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων από την Εξίσωση (6.2.57).

### Βήμα 7 Λύστε ως προς τις δυνάμεις (τάσεις)

Αφού βρήκαμε τις μετατοπίσεις των κόμβων, βρίσκουμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις στις γενικές διευθύνσεις  $x$  και  $y$  στα στοιχεία, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.33) και (6.2.36). Τέλος, προσδιορίζουμε τις μέγιστες και τις ελάχιστες κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  στο επίπεδο χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.1.2) για τον μετασχηματισμό, όπου αυτές οι τάσεις συνήθως θεωρούνται ότι ενεργούν στο κέντρο βάρους του στοιχείου. Η γωνία που σχηματίζει μία από τις κύριες τάσεις με τον άξονα  $x$  δίνεται από την Εξίσωση (6.1.3).

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1

Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας για το στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 6-11. Οι συντεταγμένες εμφανίζονται σε mm. Υποθέστε συνθήκες επίπεδης τάσης. Θεωρήστε ότι  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ , και πάχος  $t = 20 \text{ mm}$ . Υποθέστε ότι οι μετατοπίσεις κόμβων του στοιχείου έχουν βρεθεί να είναι  $u_1 = 0.0$ ,  $v_1 = 0.05 \text{ mm}$ ,  $u_2 = 0.025 \text{ mm}$ ,  $v_2 = 0.0$ ,  $u_3 = 0.0$ , και  $v_3 = 0.05 \text{ mm}$ . Προσδιορίστε τις τάσεις του στοιχείου.



■ Εικόνα 6-11 Στοιχείο με επίπεδη τάση για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας

## ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση (6.2.52) ώστε να βρούμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου. Για να υπολογίσουμε το  $[k]$ , χρησιμοποιούμε πρώτα τις Εξισώσεις (6.2.10) για να βρούμε τα  $\beta$  και  $\gamma$  ως εξής:

$$\begin{aligned}\beta_i &= y_j - y_m = 0 - 20 = -20 & \gamma_i &= x_m - x_j = 0 - 40 = -40 \\ \beta_j &= y_m - y_i = 20 - (-20) = 40 & \gamma_j &= x_i - x_m = 0 - 0 = 0 \\ \beta_m &= y_i - y_j = -20 - 0 = -20 & \gamma_m &= x_j - x_i = 40 - 0 = 40\end{aligned}\quad (6.2.61)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.32) και (6.2.34), έχουμε το μητρώο  $[B]$  ως

$$[B] = \frac{100}{2(8)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (6.2.62)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει  $A = 0.0008 \text{ m}^2$  στην Εξίσωση (6.2.62).

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.1.8) σε συνθήκες επίπεδης τάσης, έχουμε

$$[D] = \frac{210 \times 10^9}{1 - (0.25)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0.25}{2} \end{bmatrix} \text{ N/m} \quad (6.2.63)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6.2.62) και (6.2.63) στην Εξίσωση (6.2.52), έχουμε

$$[k] = \frac{(0.02)(0.0008)(100)210 \times 10^9}{16(0.9375)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \frac{100}{2(8)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Από το τριπλό γινόμενο μητρώων, έχουμε

$$[k] = 56 \times 10^7 \begin{bmatrix} 2.5 & 1.25 & -2 & -1.5 & -0.5 & 0.25 \\ 1.25 & 4.375 & -1 & -0.75 & -0.25 & -3.625 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 0 & 1.5 & 1.5 & -0.75 \\ -0.5 & -0.25 & -2 & 1.5 & 2.5 & -1.25 \\ 0.25 & -3.625 & 1 & -0.75 & -1.25 & 4.375 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.2.64)$$

Για να υπολογίσουμε τις τάσεις, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση (6.2.36). Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6.2.62) και (6.2.63), μαζί με τις δεδομένες μετατοπίσεις κόμβων, στην Εξίσωση (6.2.36), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{210 \times 10^9}{1 - (0.25)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \times \frac{100}{2(8)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.05 \\ 0.025 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.05 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad (6.2.65)$$

Από το τριπλό γινόμενο μητρών στην Εξίσωση (6.2.65), έχουμε

$$\sigma_x = 140 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 35 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -105 \text{ MPa} \quad (6.2.66)$$

Τέλος, έχουμε τις κύριες τάσεις και την κύρια γωνία αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα από τις Εξισώσεις (6.2.66) στις Εξισώσεις (6.1.2) και (6.1.3) ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{140 + 35}{2} + \left[ \left( \frac{140 - 35}{2} \right)^2 + (-105)^2 \right]^{1/2} \\ &= 204.89 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{140 + 35}{2} - \left[ \left( \frac{140 - 35}{2} \right)^2 + (-105)^2 \right]^{1/2} \\ &= -29.89 \text{ MPa} \\ \theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2(-105)}{140 - 35} \right] = -31.7^\circ \end{aligned} \quad (6.2.67)$$

### 6.3 Χειρισμός των δυνάμεων σώματος και επιφάνειας

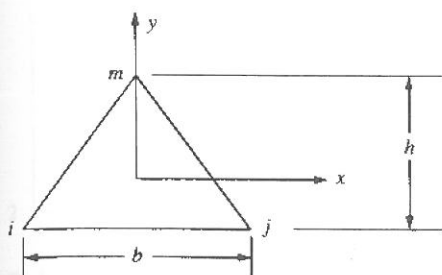
#### Δυνάμεις σώματος

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (6.2.46), μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις σώματος στους κόμβους:

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV \quad (6.3.1)$$

$$\text{όπου} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \quad (6.3.2)$$

και  $X_b$  και  $Y_b$  είναι οι πυκνότητες βάρους στη διεύθυνση  $x$  και  $y$  σε μονάδες δύναμης/μονάδα όγκου, αντίστοιχα. Αυτές οι δυνάμεις μπορούν να προκύψουν, για παράδειγμα, λόγω του πραγματικού βάρους του σώματος (δυνάμεις βαρύτητας), γωνιακής ταχύτητας (οπότε ονομάζονται φυγόκεντρες δυνάμεις σώματος, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 9), ή δυνάμεις αδράνειας στη δυναμική.



■ Εικόνα 6-12 Στοιχείο με κεντροβαρικούς άξονες συντεταγμένων

Στην Εξίσωση (6.3.1), το  $[N]$  είναι μια γραμμική συνάρτηση των  $x$  και  $y$ . επομένως, πρέπει να πραγματοποιηθεί η ολοκλήρωση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η ολοκλήρωση απλοποιείται αν επιλεγεί ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο βάρους του στοιχείου. Για παράδειγμα, θεωρήστε το στοιχείο με τις συντεταγμένες που φαίνονται στην Εικόνα 6-12. Με την αρχή των συντεταγμένων στο κέντρο βάρους του στοιχείου, έχουμε, από τον ορισμό του κέντρου βάρους,  $\iint x dA = \iint y dA = 0$  και επομένως,

$$\iint \beta_i x dA = \iint \gamma_i y dA = 0 \quad (6.3.3)$$

και

$$\alpha_i = \alpha_j = \alpha_m = \frac{2A}{3} \quad (6.3.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.3.2) έως (6.3.4) στην Εξίσωση (6.3.1), η δύναμη σώματος στον κόμβο  $i$  αντιπροσωπεύεται τότε από τη σχέση

$$\{f_{bi}\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{tA}{3} \quad (6.3.5)$$

Αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη τις δυνάμεις σώματος στους κόμβους  $j$  και  $m$ , έχουμε τα ίδια αποτελέσματα όπως στην Εξίσωση (6.3.5). Σε μορφή μητρώου, οι δυνάμεις σώματος του στοιχείου είναι

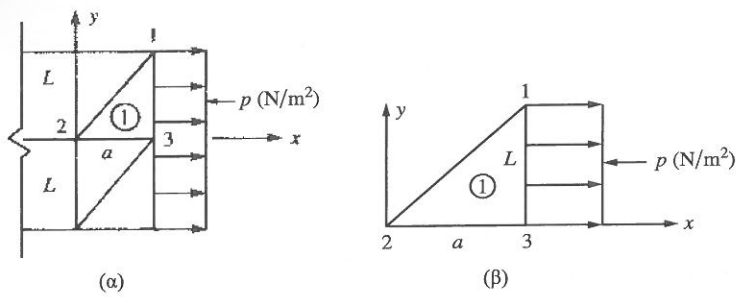
$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bix} \\ f_{biy} \\ f_{bjx} \\ f_{bjy} \\ f_{bmx} \\ f_{bmy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{At}{3} \quad (6.3.6)$$

Από τα αποτελέσματα της Εξίσωσης (6.3.6), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δυνάμεις σώματος κατανομούνται στους κόμβους σε τρία ίσα μέρη. Τα πρόσημα εξαρτώνται από τη φορά των  $X_b$  και  $Y_b$  ως προς τις θετικές γενικές συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Στην περίπτωση του βάρους σώματος μόνο, λόγω της δύναμης βαρύτητας στη διεύθυνση  $y$ , έχουμε μόνο  $Y_b (X_b = 0)$ .

### Επιφανειακές δυνάμεις

Χρησιμοποιώντας τον τρίτο όρο στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (6.2.46), μπορούμε να υπολογίσουμε τις επιφανειακές δυνάμεις στους κόμβους:

$$\{f_s\} = \iint_S [N_S]^T \{T_S\} dS \quad (6.3.7)$$



■ Εικόνα 6-13 (α) Στοιχεία με ομοιόμορφη επιφανειακή έλξη που ενεργεί σε μία ακμή και (β) το στοιχείο 1 με ομοιόμορφη επιφανειακή έλξη κατά μήκος της ακμής 1-3

Τονίζουμε ότι ο δείκτης  $S$  στο  $[N_S]$  στην Εξίσωση (6.3.7) σημαίνει ότι οι συναρτήσεις σώματος υπολογίζονται επάνω στην επιφάνεια όπου εφαρμόζεται η επιφανειακή έλξη.

Θα δείξουμε τώρα τη χρήση της Εξίσωσης (6.3.7) για το παράδειγμα μιας ομοιόμορφης τάσης  $p$  (έστω, σε λίβρες ανά τετραγωνική ίντσα ή Newton ανά τετραγωνικό χιλιοστό) που ασκείται μεταξύ των κόμβων 1 και 3 στην ακμή του στοιχείου 1 στην Εικόνα 6-13(β). Στην Εξίσωση (6.3.7), η επιφανειακή έλξη γίνεται τώρα

$$\{T_S\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3.8)$$

και

$$[N_S]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \text{ υπολογισμένο σε } x = a, y = y \quad (6.3.9)$$

Καθώς η επιφανειακή έλξη  $p$  δρα κατά μήκος της ακμής για  $x = a$  και  $y = y$  από  $y = 0$  έως  $y = L$ , υπολογίζουμε τις συναρτήσεις σχήματος για  $x = a$  και  $y = y$  και ολοκληρώνουμε στην επιφάνεια από 0 έως  $L$  στη διεύθυνση  $y$ , και από 0 έως  $t$  στη διεύθυνση  $z$ , όπως φαίνεται από την Εξίσωση (6.3.10).

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.3.8) και (6.3.9), εκφράζουμε την Εξίσωση (6.3.7) ως

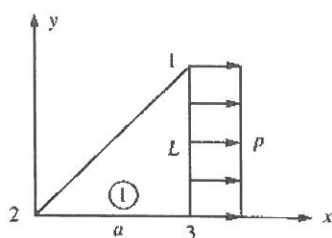
$$\{f_s\} = \int_0^t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} dz dy \quad (6.3.10)$$

υπολογισμένο σε  $x = a, y = y$

Με απλοποίηση της Εξίσωσης (6.3.10), έχουμε

$$\{f_s\} = t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 p \\ 0 \\ N_2 p \\ 0 \\ N_3 p \\ 0 \end{bmatrix} dy \quad (6.3.11)$$

υπολογισμένο σε  $x = a, y = y$



■ Εικόνα 6-14 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο που υπόκειται σε επιφανειακή έλξη ακμής  $p$

Τώρα, από τις Εξισώσεις (6.2.18) (με  $i=1$ ), έχουμε

$$N_1 = \frac{1}{2A}(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) \quad (6.3.12)$$

Για ευκολία, επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων για το στοιχείο όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-14. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό στις Εξισώσεις (6.2.10), έχουμε

$$\alpha_i = x_j y_m - y_j x_m$$

ή, με  $i=1, j=2$ , και  $m=3$ , θα είναι

$$\alpha_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad (6.3.13)$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες στην Εξίσωση (6.3.13), έχουμε

$$\alpha_1 = 0 \quad (6.3.14)$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας πάλι τις Εξισώσεις (6.2.10), έχουμε

$$\beta_1 = 0 \quad \gamma_1 = a \quad (6.3.15)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6.3.14) και (6.3.15) στην Εξίσωση (6.3.12), έχουμε

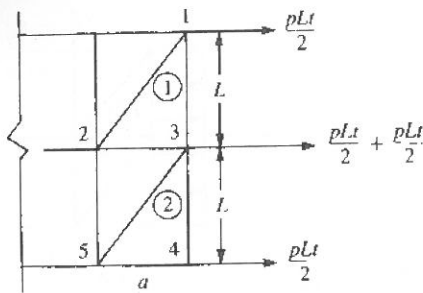
$$N_1 = \frac{ay}{2A} \quad (6.3.16)$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.2.18), μπορούμε να δείξουμε πως

$$N_2 = \frac{L(a-x)}{2A} \quad \text{και} \quad N_3 = \frac{Lx-ay}{2A} \quad (6.3.17)$$

Με αντικατάσταση των Εξισώσεων (6.3.16) και (6.3.17) για  $N_1, N_2$ , και  $N_3$  στην Εξίσωση (6.3.11), υπολογίζοντας τα  $N_1, N_2$ , και  $N_3$  για  $x=a$  και  $y=y$  (τις συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη θέση του επιφανειακού φορτίου  $p$ ) και, στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας ως προς  $y$ , έχουμε

$$\{f_s\} = \frac{t}{2(aL/2)} \left\{ \begin{array}{c} a \left( \frac{L^2}{2} \right) p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) ap \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.3.18)$$



■ Εικόνα 6-15 Δυνάμεις κόμβων ισοδύναμες με επιφανειακή έλξη

όπου για τη συνάρτηση σχήματος ισχύει  $N_2 = 0$  μεταξύ των κόμβων 1 και 3, όπως θα έπρεπε να είναι σύμφωνα με τους ορισμούς των συναρτήσεων σχήματος. Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.3.18), έχουμε τελικά

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s1x} \\ f_{s1y} \\ f_{s2x} \\ f_{s2y} \\ f_{s3x} \\ f_{s3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pLt/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ pLt/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3.19)$$

Η Εικόνα 6-15 δείχνει τα αποτελέσματα για τις ισοδύναμες δυνάμεις κόμβων επιφανειακού φορτίου και για τα δύο στοιχεία 1 και 2.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για ένα τρίγωνο σταθερής παραμόρφωσης, ένα κατανεμημένο φορτίο σε μια ακμή του στοιχείου μπορεί να αντιμετωπιστεί ως συγκεντρωμένα φορτία τα οποία δρουν στους κόμβους που σχετίζονται με τη φορτισμένη ακμή αν τα δύο είδη φορτίου γίνουν στατικά ισοδύναμα [το οποίο είναι ισοδύναμο με την εφαρμογή της Εξίσωσης (6.3.7)]. Παρ' όλα αυτά, για στοιχεία υψηλότερης τάξης, όπως το στοιχείο γραμμικής παραμόρφωσης (που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 8), η αντικατάσταση του φορτίου θα πρέπει να γίνει με τη χρήση της Εξίσωσης (6.3.7), που προήλθε από την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Για στοιχεία υψηλότερης τάξης, αυτή η αντικατάσταση φορτίου με τη χρήση της Εξίσωσης (6.3.7) γενικά δεν είναι ίση με την προφανή στατικά ισοδύναμη· παρ' όλα αυτά, είναι συνεπής με την έννοια ότι αυτή η αντικατάσταση προκύπτει απευθείας από την ενεργειακή προσέγγιση.

Αναγνωρίζουμε τώρα ότι το μητρώο δυνάμεων  $\{f_s\}$  που ορίζει η Εξίσωση (6.3.7), και βασίζεται στην αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, είναι ισοδύναμο με εκείνο που βασίζεται στην ισοδυναμία έργου, την οποία χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στο Κεφάλαιο 4, όταν περιγράφαμε κατανεμημένα φορτία που δρουν σε δοκούς.

## 6.4 Ρητή έκφραση για το μητρώο δυσκαμψίας τριγώνου σταθερής παραμόρφωσης

Αν και το μητρώο δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης γενικά σχηματίζεται εσωτερικά στα περισσότερα προγράμματα υπολογιστών, με το τριπλό γινόμενο μητρώων που δείχνει η Εξίσωση (6.4.1), ο ρητός υπολογισμός του εξακολουθεί να είναι μια πολύτιμη μαθησιακή εμπειρία. Επομένως, εδώ θα εξετάσουμε ειδικά την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης.

Πρώτα, θυμηθείτε ότι το μητρώο δυσκαμψίας δίνεται από τη σχέση

$$[k] = tA[B]^T [D][B] \quad (6.4.1)$$



όπου, για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, το  $[D]$  δίνεται από την Εξίσωση (6.1.10) και το  $[B]$  από την Εξίσωση (6.2.34). Με αντικατάσταση των μητρώων  $[D]$  και  $[B]$  στην Εξίσωση (6.4.1), έχουμε

$$[k] = \frac{tE}{4A(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \gamma_i \\ 0 & \gamma_i & \beta_i \\ \beta_j & 0 & \gamma_j \\ 0 & \gamma_j & \beta_j \\ \beta_m & 0 & \gamma_m \\ 0 & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (6.4.2)$$

$$\times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

Από τον πολλαπλασιασμό των μητρώων στην Εξίσωση (6.4.2), προκύπτει η Εξίσωση (6.4.3), το ρητό μητρώο δυσκαμψίας τριγώνου σταθερής παραμόρφωσης για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρήστε ότι το  $[k]$  είναι συνάρτηση της διαφοράς στις συντεταγμένες κόμβων κατά  $x$  και  $y$ , όπως φαίνεται από τα  $\gamma$  και  $\beta$ , των ιδιοτήτων του υλικού  $E$  και  $\nu$ , και του πάχους  $t$  και του εμβαδού επιφανείας  $A$  του στοιχείου.

$$[k] = \frac{tE}{4A(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} \beta_i^2(1-\nu) + \gamma_i^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i\gamma_i\nu + \beta_i\gamma_i \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i\beta_j(1-\nu) + \gamma_i\gamma_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_i\gamma_i\nu + \beta_i\gamma_i \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_i^2(1-\nu) + \beta_i^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j\gamma_i\nu + \beta_i\gamma_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_i\beta_j(1-\nu) + \gamma_i\gamma_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j\gamma_i\nu + \beta_i\gamma_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j^2(1-\nu) + \gamma_j^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_i\gamma_j\nu + \beta_j\gamma_i \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i\beta_m(1-\nu) + \gamma_i\gamma_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_i\gamma_m\nu + \beta_m\gamma_i \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \gamma_i\gamma_j(1-\nu) + \beta_i\beta_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_m\gamma_i\nu + \beta_i\gamma_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_i\gamma_m(1-\nu) + \beta_i\beta_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \beta_j\gamma_j\nu + \beta_j\gamma_j \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j\beta_m(1-\nu) + \gamma_j\gamma_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_j\gamma_m\nu + \gamma_j\beta_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ \gamma_j^2(1-\nu) + \beta_j^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \beta_m\gamma_j\nu + \beta_j\gamma_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_j\gamma_m(1-\nu) + \beta_j\beta_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ & \beta_m^2(1-\nu) + \gamma_m^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) & \gamma_m\beta_m\nu + \beta_m\gamma_m \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \\ & & \gamma_m^2(1-\nu) + \beta_m^2 \left( \frac{1-2\nu}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (6.4.3)$$

Για την περίπτωση επίπεδης τάσης, το μόνο που χρειάζεται είναι να αντικαταστήσουμε το  $1-\nu$  με 1, το  $(1-2\nu)/2$  με  $(1-\nu)/2$ , και το  $(1+\nu)(1-2\nu)$  έξω από τις αγκύλες με  $1-\nu^2$  στην Εξίσωση (6.4.3).

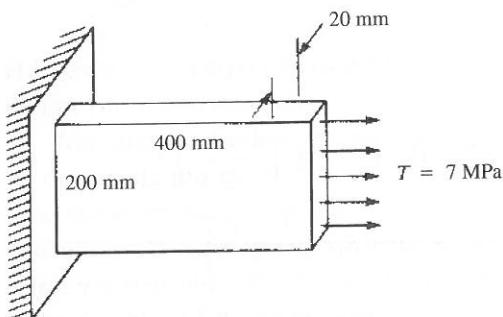
Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι για λόγο του Poisson  $\nu$  που πλησιάζει το 0.5, όπως σε ελαστικά υλικά και πλαστικά στερεά, για παράδειγμα, τα υλικά γίνονται ασυμπίεστα [2]. Για επίπεδη παραμόρφωση, καθώς το  $\nu$  πλησιάζει στο 0.5, ο παρονομαστής γίνεται μηδέν στο μητρώο ιδιοτήτων του υλικού [δείτε την Εξίσωση (6.1.10)] και συνεπώς στο μητρώο δυσκαμψίας, Εξίσωση (6.4.3). Μια τιμή του  $\nu$  κοντά στο 0.5 μπορεί να προκαλέσει δομικές εξισώσεις κακής κατάστασης (ill-conditioned). Σε αυτή την περίπτωση, έχει χρησιμοποιηθεί μια ειδική διατύπωση (που ονομάζεται *διατύπωση ποινής* — penalty formulation — [3]).

## 6.5 Λύση πεπερασμένων στοιχείων ενός προβλήματος επίπεδης τάσης

Για να δείξουμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για ένα πρόβλημα επίπεδης τάσης, θα δούμε τώρα μια λεπτομερή λύση.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2

Για μια λεπτή πλάκα που υπόκειται στην επιφανειακή έλξη η οποία φαίνεται στην Εικόνα 6–16, προσδιορίστε τις μετατοπίσεις των κόμβων και τις τάσεις του στοιχείου. Το πάχος της πλάκας είναι  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ , και  $\nu = 0.30$ .



■ Εικόνα 6–16 Λεπτή πλάκα που υπόκειται σε τάση εφελκυσμού

#### ΛΥΣΗ:

##### Διακριτοποίηση

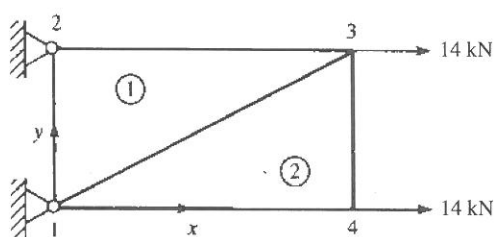
Για να δείξουμε τη λύση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την πλάκα, πρώτα διακριτοποιούμε την πλάκα σε δύο στοιχεία, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6–17. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι το αραιό πλέγμα δεν θα δώσει μια τόσο πραγματική πρόβλεψη για τη συμπεριφορά της πλάκας όπως ένα πιο πυκνό πλέγμα, ιδιαίτερα κοντά στην πακτωμένη ακμή. Παρ' όλα αυτά, επειδή εφαρμόζουμε μια «μη ηλεκτρονική» λύση, θα χρησιμοποιήσουμε μια αραιή διακριτοποίηση για λόγους απλότητας (αλλά χωρίς απώλεια γενικότητας της μεθόδου).

Στην Εικόνα 6–17, η αρχική εφελκυστική επιφανειακή έλξη στην Εικόνα 6–16 έχει μετατραπεί σε δυνάμεις στους κόμβους ως εξής:

$$F = \frac{1}{2}TA$$

$$F = \frac{1}{2}(7 \times 10^6)(20 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-3})$$

$$F = 14,000 \text{ N}$$



■ Εικόνα 6-17 Διακριτοποιημένη πλάκα

Γενικά, για στοιχεία υψηλότερης τάξης, θα πρέπει να χρησιμοποιείται η Εξίσωση (6.3.7) για τη μετατροπή κατανεμημένων επιφανειακών έλξεων σε δυνάμεις στους κόμβους. Παρ' όλα αυτά, για το στοιχείο CST, έχουμε δείξει στην Ενότητα 6.3 ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας αντικατάσταση με μια στατικά ισοδύναμη δύναμη, όπως έχει γίνει εδώ.

Η εξίσωση ολικού μητρώου είναι

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (6.5.1)$$

Με ανάπτυξη των μητρώων στην Εξίσωση (6.5.1), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 14,000 \\ 0 \\ 14,000 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.5.2)$$

όπου  $[K]$  είναι ένα μητρώο  $8 \times 8$  (δύο βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο με τέσσερις κόμβους) πριν από τη διαγραφή γραμμών και στηλών ώστε να λάβουμε υπόψη τις συνοριακές συνθήκες πάκτωσης στους κόμβους 1 και 2.

### Σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας

Σχηματίζουμε το ολικό μητρώο δυσκαμψίας με υπέρθεση των μεμονωμένων μητρώων δυσκαμψίας των στοιχείων. Από την Εξίσωση (6.2.52), το μητρώο δυσκαμψίας για ένα στοιχείο είναι

$$[k] = tA[B]^T[D][B] \quad (6.5.3)$$

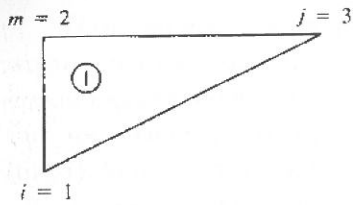
Στην Εικόνα 6-18 για το στοιχείο 1, έχουμε συντεταγμένες  $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ ,  $x_j = 400$  mm,  $y_j = 10$ ,  $x_m = 0$ , και  $y_m = 200$  mm, αφού οι γενικοί άξονες συντεταγμένων έχουν οριστεί με αρχή τον κόμβο 1, και είναι

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)(0.4)(0.2) = 0.04 \text{ m}^2$$

ή, γενικά, το  $A$  μπορεί να προκύψει ισοδύναμα από τη σχέση των συντεταγμένων των κόμβων, Εξίσωση (6.2.9).

Θα υπολογίσουμε τώρα το  $[B]$ , όπου το  $[B]$  δίνεται από την Εξίσωση (6.2.34), αναπτυγμένο εδώ ως



■ Εικόνα 6-18 Στοιχείο 1 της διακριτοποιημένης πλάκας

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (6.5.4)$$

και, από τις Εξισώσεις (6.2.10),

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_j - y_m = 200 - 200 = 0 \\ \beta_j &= y_m - y_i = 200 - 0 = 200 \\ \beta_m &= y_i - y_j = 0 - 200 = -200 \\ \gamma_i &= x_m - x_j = 0 - 400 = -400 \\ \gamma_j &= x_i - x_m = 0 - 0 = 0 \\ \gamma_m &= x_j - x_i = 400 - 0 = 400 \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6.5.5) στην Εξίσωση (6.5.4), έχουμε

$$[B] = \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 4 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{m}} \quad (6.5.6)$$

Για επίπεδη τάση, το μητρώο  $[D]$  εκφράζεται βολικά εδώ ως

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.5.7)$$

Με  $\nu = 0.3$  και  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}$ , έχουμε

$$[D] = \frac{210(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \text{ N/m} \quad (6.5.8)$$

Τότε

$$[B]^T [D] = \frac{(20 \times 10^{-3})(210 \times 10^9)}{(2 \times 4 \times 10^{-2})(0.91)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \quad (6.5.9)$$

Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.5.9) έχουμε

$$[B]^T [D] = \frac{(52.5)(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & -20 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \\ -10 & -3 & 7 \\ 6 & 20 & -3.5 \end{bmatrix} \quad (6.5.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.5.10) και (6.5.6) στην Εξίσωση (6.5.3), έχουμε το μητρώο δυσκαμψίας για το στοιχείο 1:

$$[k^{(1)}] = (0.04)(20 \times 10^{-3}) \frac{(52.5)(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & -20 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \\ -10 & -3 & 7 \\ 6 & 20 & -3.5 \end{bmatrix} \quad (6.5.11)$$

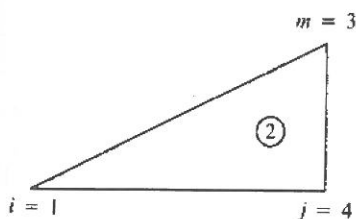
$$\times \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 4 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

Τέλος, η απλοποίηση της Εξίσωσης (6.5.11) δίνει

$$[k^{(1)}] = \frac{10.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.5.12)$$

όπου οι ετικέτες επάνω από τις στήλες δείχνουν την αριστερόστροφη σειρά κόμβων των βαθμών ελευθερίας στο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 1.

Στην Εικόνα 6-19 για το στοιχείο 2, έχουμε  $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ ,  $x_j = 400$  mm,  $y_j = 0$ ,  $x_m = 400$  mm, και  $y_m = 200$  mm. Στη συνέχεια, από τις Εξισώσεις (6.2.10), έχουμε



■ Εικόνα 6-19 Στοιχείο 2 της διακριτοποιημένης πλάκας

$$\begin{aligned}
 \beta_i &= y_j - y_m = 0 - 200 = -200 \\
 \beta_j &= y_m - y_i = 200 - 0 = 200 \\
 \beta_m &= y_i - y_j = 0 - 0 = 0 \\
 \gamma_i &= x_m - x_j = 400 - 400 = 0 \\
 \gamma_j &= x_i - x_m = 0 - 400 = -400 \\
 \gamma_m &= x_j - x_i = 400 - 0 = 400
 \end{aligned}
 \tag{6.5.13}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.5.13) στην Εξίσωση (6.5.4) έχουμε

$$[B] = \frac{20 \times 10^{-3}}{(2)(0.04)} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{m}}
 \tag{6.5.14}$$

Το μητρώο  $[D]$  δίνεται ξανά από την εξίσωση

$$[D] = \frac{210(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \text{N/m}
 \tag{6.5.15}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (6.5.14) και (6.5.15), έχουμε

$$[B]^T [D] = \frac{(2 \times 10^{-3})(210 \times 10^9)}{(2)(0.04)(0.91)} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}
 \tag{6.5.16}$$

Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.5.16), παίρνουμε

$$[B]^T [D] = \frac{(52.5)(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \\ 10 & 3 & -7 \\ -6 & -20 & 3.5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 20 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{6.5.17}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6.5.17) και (6.5.14) στην Εξίσωση (6.5.3), παίρνουμε το μητρώο δυσκαμψίας για το στοιχείο 2:

$$[k^{(2)}] = (20 \times 10^{-3})(0.04) \frac{(52.5)(10^9)}{0.91} \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \\ 10 & 3 & -7 \\ -6 & -20 & 3.5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 20 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{6.5.18}$$

$$\times \frac{20 \times 10^{-3}}{2(0.04)} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

Η Εξίσωση (6.5.18) απλοποιείται σε

$$[k^{(2)}] = \frac{10.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \\ 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.5.19)$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας στο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 2 εμφανίζονται επάνω από τις στήλες στην Εξίσωση (6.5.19). Ξαναγράφοντας τα μητρώα δυσκαμψίας στοιχείων, Εξισώσεις (6.5.12) και (6.5.19), αναπτυγμένα στην τάξη των αυξημένων βαθμών ελευθερίας κόμβων του συνολικού μητρώου  $[K]$  (όπου έχουμε κοινό παράγοντα τον αριθμό 5) και αναδιατεταγμένα σύμφωνα με τους αυξημένους βαθμούς ελευθερίας, παίρνουμε

Στοιχείο 1

$$[k^{(1)}] = \frac{52.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 28 & 0 & -28 & 14 & 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 12 & -80 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -20 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 14 & -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.5.20)$$

Στοιχείο 2

$$[k^{(2)}] = \frac{52.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -14 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 28 & 0 & -28 & 14 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.5.21)$$

Με υπέρθεση των μητρώων δυσκαμψίας στοιχείων, Εξισώσεις (6.5.20) και (6.5.21), τώρα που οι τάξεις των βαθμών ελευθερίας είναι ίδιες, έχουμε το συνολικό ολικό πλέγμα δυσκαμψίας:

$$[k] = \frac{52.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (6.5.22)$$

[Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να έχουμε εφαρμόσει τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας στις Εξισώσεις (6.5.12) και (6.5.19) για να πάρουμε την Εξίσωση (6.5.22).] Αν αντικαταστήσουμε το  $[K]$  στο  $\{F\} = [K]\{d\}$  της Εξίσωσης (6.5.2), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 14,000 \\ 0 \\ 14,000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{52.5 \times 10^9}{0.91} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.5.23)$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες στήριξης ή τις συνοριακές συνθήκες με την απαλοιφή των γραμμών και των στηλών που αντιστοιχούν σε γραμμές και στήλες του μητρώου μετατόπισης ίσες με μηδέν [συγκεκριμένα, τις γραμμές και τις στήλες 1–4 στην Εξίσωση (6.5.23)], έχουμε

$$\begin{Bmatrix} 14,000 \\ 0 \\ 14,000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{52.5 \times 10^6}{0.91} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 87 & 12 & -80 \\ -28 & 12 & 48 & -26 \\ 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.5.24)$$

Με εξ αριστερών πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της Εξίσωσης (6.5.24) με  $[K]^{-1}$ , έχουμε

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{0.91}{52.5 \times 10^6} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 87 & 12 & -80 \\ -28 & 12 & 48 & -26 \\ 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 14,000 \\ 0 \\ 14,000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5.25)$$

Λύνοντας ως προς τις μετατοπίσεις στην Εξίσωση (6.5.25), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{0.91}{3750} \begin{Bmatrix} 0.05024 \\ 0.00034 \\ 0.05470 \\ 0.00878 \end{Bmatrix} \quad (6.5.26)$$

Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.5.26), έχουμε τις τελικές μετατοπίσεις:



$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12.19 \\ 0.083 \\ 13.27 \\ 2.08 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \text{ m} \quad (6.5.27)$$

Συγκρίνοντας τη λύση πεπερασμένων στοιχείων με μια αναλυτική λύση, ως πρώτη προσέγγιση, έχουμε την αξονική μετατόπιση από τη σχέση

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(28,000)0.4}{(20 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-3})(210 \times 10^9)} = 13.33 \times 10^{-6} \text{ m}$$

για μια μονοδιάστατη ράβδο που υπόκειται σε εφελκυστική δύναμη. Επομένως, οι συνιστώσες μετατόπισης κατά  $x$  της Εξίσωσης (6.5.27) για τη διδιάστατη πλάκα φαίνεται να είναι λογικά σωστές, αν λάβουμε υπόψη το αραιό του πλέγματος και την κατευθυντική δυσκαμψία του μοντέλου. (Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό το θέμα δείτε την Ενότητα 7.5). Η μετατόπιση κατά  $y$  θα αναμενόταν να είναι προς τα κάτω στην κορυφή (κόμβος 3) και προς τα επάνω στη βάση (κόμβος 4) ως αποτέλεσμα του φαινομένου Poisson. Παρ' όλα αυτά, η κατευθυντική δυσκαμψία λόγω του αραιού πλέγματος ευθύνεται γι' αυτό το αναπάντεχα κακό αποτέλεσμα.

Προσδιορίζουμε τώρα τις τάσεις σε κάθε στοιχείο χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.2.36) :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (6.5.28)$$

Γενικά, για το στοιχείο 1, θα έχουμε τότε

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{2A}\right) \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (6.5.29)$$

Αντικαθιστώντας το  $[B]$  με αριθμητικές τιμές που δίνονται από την Εξίσωση (6.5.6)· το  $[D]$  από την Εξίσωση (6.5.8)· και το κατάλληλο τμήμα του  $\{d\}$ , από την Εξίσωση (6.5.27), έχουμε

$$\{\sigma\} = \frac{210(10^9)(10^{-6})}{0.91(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.19 \\ 0.083 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5.30)$$

Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.5.30), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4032 \\ 2110 \\ 16.75 \end{Bmatrix} \text{ kPa} \quad (6.5.31)$$

Γενικά, για το στοιχείο 2, έχουμε

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{2A} \right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_4 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_4 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_4 & \beta_4 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (6.5.32)$$

Αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές στην Εξίσωση (6.5.32), έχουμε

$$\{\sigma\} = \frac{210(10^9)(10^{-6})}{0.91(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13.27 \\ 2.08 \\ 12.19 \\ 0.083 \end{Bmatrix} \quad (6.5.33)$$

Απλοποιώντας την Εξίσωση (6.5.33), έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6964.5 \\ -7.5 \\ -16.1 \end{Bmatrix} \text{ kPa} \quad (6.5.34)$$

Οι κύριες τάσεις μπορούν τώρα να προσδιοριστούν από την Εξίσωση (6.1.2), και η κύρια γωνία που δημιουργείται από μία από τις κύριες τάσεις μπορεί να προσδιοριστεί από την Εξίσωση (6.1.3). (Η άλλη κύρια τάση θα σχηματίζει γωνία  $90^\circ$  με την πρώτη.) Προσδιορίζουμε αυτές τις κύριες τάσεις για το στοιχείο 2 (αυτές για το στοιχείο 1 θα είναι αντίστοιχες):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \\ \sigma_1 &= \frac{6964.5 + (-7.5)}{2} + \left[ \left( \frac{6964.5 - (-7.5)}{2} \right)^2 + (-16.1)^2 \right]^{1/2} \\ \sigma_1 &= 3478.5 + 3486.03 = 6964.53 \text{ kPa} \\ \sigma_2 &= \frac{6964.5 + (-7.5)}{2} - 3486.03 = -7.53 \text{ kPa} \end{aligned} \quad (6.5.35)$$

Η κύρια γωνία είναι τότε

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right]$$

ή

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2(-16.1)}{6964.5 - (-7.5)} \right] = 0^\circ \quad (6.5.36)$$

Λόγω της ομοιόμορφης τάσης των 7 MPa που ενεργεί μόνο στη διεύθυνση  $x$  στην ακμή της πλάκας, θα αναμέναμε η τάση  $\sigma_x (= \sigma_1)$  να πλησιάζει τα 7 MPa σε κάθε στοιχείο. Έτσι, τα αποτελέσματα από τις Εξισώσεις (6.5.31) και (6.5.34) για τη  $\sigma_x$  είναι αρκετά καλά. Θα αναμέναμε η τάση  $\sigma_x$  να είναι πολύ μικρή (τουλάχιστον κοντά στην ελεύθερη ακμή). Ο περιορισμός του στοιχείου 1 στους κόμβους 1 και 2 προκαλεί μια σχετικά μεγάλη τάση στοιχείου  $\sigma_y$ , ενώ ο περιορισμός του στοιχείου 2 σε έναν μόνο κόμβο προκαλεί μια πολύ μικρή τάση  $\sigma_y$ . Οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xy}$  παραμένουν κοντά στο μηδέν, όπως αναμενόταν. Αν ο αριθμός των στοιχείων είχε αυξηθεί, και είχαν χρησιμοποιηθεί μικρότερα στοιχεία κοντά στην ακμή της στήριξης, θα είχαμε ακόμη πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Παρ' όλα αυτά, μια πιο πυκνή διακριτοποίηση θα είχε ως αποτέλεσμα μια κουραστική «μη ηλεκτρονική» λύση και, έτσι, δεν χρησιμοποιήθηκε εδώ. Συνιστάται η χρήση ενός προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, για μια λεπτομερή λύση σε αυτό το πρόβλημα πλάκας και οπωσδήποτε για την επίλυση πιο πολύπλοκων προβλημάτων τάσης/παραμόρφωσης.

Η θεωρία μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης [4] (ονομάζεται επίσης *θεωρία von Mises* ή *θεωρία von Mises–Hencky*) για όλκιμα υλικά σε στατική φόρτιση προβλέπει ότι ένα υλικό θα αποχρήσει αν η τάση von Mises (που ονομάζεται επίσης *ισοδύναμη* ή *ενεργός τάση*) φθάσει την αντοχή διαρροής  $S_y$ , του υλικού. Η τάση von Mises όπως προκύπτει στην Αναφορά [4], για παράδειγμα, δίνεται συναρτήσει των τριών κύριων τάσεων από τη σχέση

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (6.5.37\alpha)$$

ή ισοδύναμα συναρτήσει των συνιστωσών  $x - y - z$

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (6.5.37\beta)$$

Έτσι, για να συμβεί διαρροή, η τάση von Mises θα πρέπει να γίνει ίση ή μεγαλύτερη από την αντοχή διαρροής του υλικού όπως δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{vm} \geq S_y \quad (6.5.38)$$

Από τις Εξισώσεις (6.5.37α ή 6.5.37β) μπορούμε να δούμε ότι η παραμόρφωση von Mises είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που μετράει την ένταση της συνολικής κατάστασης τάσης, καθώς περιλαμβάνει τις τρεις κύριες τάσεις ή τις τρεις ορθές τάσεις στη διεύθυνση  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , μαζί με τις διατμητικές τάσεις στα επίπεδα  $x$ ,  $y$ , και  $z$ . Άλλες τάσεις, όπως η μέγιστη κύρια, δεν παρέχουν τον πιο ακριβή τρόπο πρόβλεψης της αστοχίας.

Τα περισσότερα προγράμματα υπολογιστών ενσωματώνουν αυτή τη θεωρία αστοχίας και, ως προαιρετικό αποτέλεσμα, ο χρήστης μπορεί να ζητήσει μια γραφική παράσταση της τάσης von Mises σε όλο το μοντέλο του υλικού που αναλύεται. Αν η τιμή της τάσης von Mises είναι ίση ή μεγαλύτερη από την αντοχή διαρροής του υλικού που ελέγχεται, τότε μπορεί να επιλεγεί ένα άλλο υλικό με μεγαλύτερη αντοχή διαρροής ή να γίνουν άλλες αλλαγές στον σχεδιασμό.

Για ψαθυρά υλικά, όπως το γυαλί και ο χυτοσίδηρος, με διαφορετικές ιδιότητες σε θλίψη και εφελκυσμό, για την πρόβλεψη της αστοχίας συνιστάται η χρήση της θεωρίας Coulomb–Mohr. Για περισσότερα σχετικά με αυτή τη θεωρία συμβουλευτείτε την Αναφορά [4].

## 6.6 Επίπεδο ορθογώνιο στοιχείο (διγραμμικό ορθογώνιο, Q4)

Τώρα θα αναπτύξουμε το μητρώο δυσκαμψίας ενός ορθογώνιου επίπεδου στοιχείου. Θα αναφερθούμε αργότερα σε αυτό το στοιχείο στην ισοπαραμετρική διατύπωση ενός γενικού τετράπλευρου στοιχείου στην Ενότητα 10.2. Αυτό το στοιχείο ονομάζεται επίσης γραμμικό ορθογώνιο λόγω των

γραμμικών όρων κατά  $x$  και  $y$  για τις συναρτήσεις μετατόπισης  $x$  και  $y$  που φαίνονται στην Εξίσωση (6.6.2). Το σύμβολο Q4 αντιπροσωπεύει το στοιχείο ως τετράπλευρο με τέσσερις γωνιακούς κόμβους.

Δύο πλεονεκτήματα του ορθογώνιου στοιχείου σε σχέση με το τριγωνικό είναι η ευκολία της εισαγωγής δεδομένων και η απλούστερη ερμηνεία των τάσεων εξόδου. Ένα μειονέκτημα του ορθογώνιου στοιχείου είναι ότι το απλό ορθογώνιο γραμμικής μετατόπισης με τις ευθύγραμμες πλευρές του δεν προσεγγίζει επαρκώς τις πραγματικές συνοριακές συνθήκες στις ακμές.

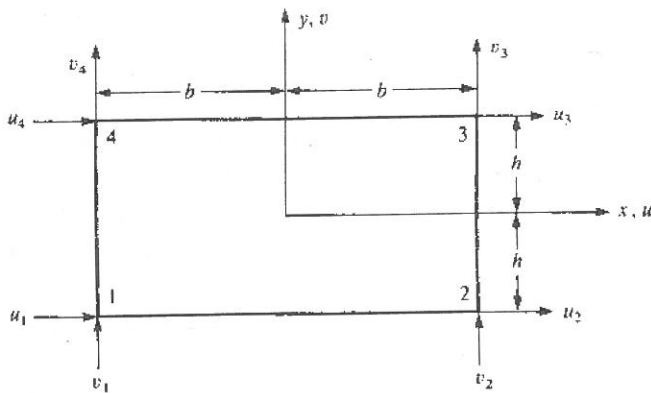
Θα ακολουθήσουμε τα συνηθισμένα βήματα που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1 για να καταλήξουμε στο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου και στις σχετικές εξισώσεις.

### Βήμα 1 Επιλέξτε τύπο στοιχείου

Θεωρήστε το ορθογώνιο στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 6-20 (όλες οι εσωτερικές γωνίες είναι  $90^\circ$ ) με γωνιακούς τους κόμβους 1-4 (και πάλι επισημαίνονται αριστερόστροφα) και διαστάσεις βάσης και ύψους  $2b$  και  $2h$ , αντίστοιχα.

Οι άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων δίνονται τώρα από τη σχέση

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.6.1)$$



■ Εικόνα 6-20 Βασικό ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων

### Βήμα 2 Επιλέξτε συναρτήσεις μετατόπισης

Για ένα συμβατό πεδίο μετατόπισης, οι συναρτήσεις μετατόπισης  $u$  και  $v$  του στοιχείου θα πρέπει να είναι γραμμικές κατά μήκος κάθε ακμής επειδή σε κάθε ακμή υπάρχουν μόνο δύο σημεία (οι γωνιακοί κόμβοι). Επιλέγουμε τις γραμμικές συναρτήσεις μετατόπισης

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Υπάρχουν συνολικά οκτώ γενικευμένοι βαθμοί ελευθερίας ( $a$ ) στην Εξίσωση (6.6.2) και συνολικά οκτώ ειδικοί βαθμοί ελευθερίας ( $u_1, v_1$ , στον κόμβο 1 έως  $u_4, v_4$  στον κόμβο 4) για το στοιχείο.

Μπορούμε να προχωρήσουμε με τον συνηθισμένο τρόπο για να απαλείψουμε τα  $a$  από την Εξίσωση (6.6.2) ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{4bh} [(b-x)(h-y)u_1 + (b+x)(h-y)u_2 \\ &\quad + (b+x)(h+y)u_3 + (b-x)(h+y)u_4] \\ v(x, y) &= \frac{1}{4bh} [(b-x)(h-y)v_1 + (b+x)(h-y)v_2 \\ &\quad + (b+x)(h+y)v_3 + (b-x)(h+y)v_4] \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Αυτές οι σχέσεις μετατόπισης, Εξισώσεις (6.6.3), μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα με βάση τις συναρτήσεις σχήματος και τις άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων ως

$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (6.6.4)$$

όπου οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(b-x)(h-y)}{4bh} & N_2 &= \frac{(b+x)(h-y)}{4bh} \\ N_3 &= \frac{(b+x)(h+y)}{4bh} & N_4 &= \frac{(b-x)(h+y)}{4bh} \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

και τα  $N_i$  είναι πάλι τέτοια ώστε  $N_1 = 1$  στον κόμβο 1 και  $N_i = 0$  σε όλους τους άλλους κόμβους, με παρόμοιες απαιτήσεις για τις άλλες συναρτήσεις σχήματος. Σε αναπτυγμένη μορφή, η Εξίσωση (6.6.4) γίνεται

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6.6.6)$$

### Βήμα 3 Ορίστε τις σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης και τάσης/παραμόρφωσης

Και πάλι οι παραμορφώσεις του στοιχείου για τη διδιάστατη τάση δίνονται από τη σχέση

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.6.7\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.6.2) στην Εξίσωση (6.6.7α), εκφράζουμε τις παραμορφώσεις συναρτήσει των  $a$  ως

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + a_4 y \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x \\ \gamma_{xy} &= (a_3 + a_6) + a_4 x + a_8 y \end{aligned} \quad (6.6.7\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.6.6) στην Εξίσωση (6.6.7α) και παίρνοντας τις παραγώγους των  $u$  και  $v$  όπως φαίνεται, μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμορφώσεις συναρτήσει των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων ως

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (6.6.8)$$

όπου

$$[B] = \frac{1}{4bh} \begin{bmatrix} -(h-y) & 0 & (h-y) & 0 \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) \\ -(b-x) & -(h-y) & -(b+x) & (h-y) \\ (h+y) & 0 & -(h+y) & 0 \\ 0 & (b+x) & 0 & (b-x) \\ (b+x) & (h+y) & (b-x) & -(h+y) \end{bmatrix} \quad (6.6.9)$$

Από τις Εξισώσεις (6.6.7β), (6.6.8), και (6.6.9), παρατηρούμε ότι η  $\varepsilon_x$  είναι συνάρτηση του  $y$ , η  $\varepsilon_z$  είναι συνάρτηση του  $x$ , και η  $\gamma_{xy}$  είναι συνάρτηση τόσο του  $x$  όσο και του  $y$ . Οι τάσεις δίνονται και πάλι από τους τύπους στην Εξίσωση (6.2.36), όπου το  $[B]$  είναι τώρα αυτό της Εξίσωσης (6.6.9) και το  $\{d\}$  είναι αυτό της Εξίσωσης (6.6.1).

#### Βήμα 4 Βρείτε το μητρώο δυσκαμψίας και τις εξισώσεις του στοιχείου

Το μητρώο δυσκαμψίας προκύπτει από την εξίσωση

$$[k] = \int_{-h}^h \int_{-b}^b [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (6.6.10)$$

με το  $[D]$  να δίνεται και πάλι από τις συνήθεις συνθήκες επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης, Εξίσωση (6.1.8) ή (6.1.10). Επειδή το μητρώο  $[B]$  είναι συνάρτηση των  $x$  και  $y$ , θα πρέπει να γίνει ολοκλήρωση της Εξίσωσης (6.6.10). Το μητρώο  $[k]$  για το ορθογώνιο στοιχείο είναι τώρα της τάξης  $8 \times 8$ . Ένας αριθμητικός υπολογισμός του  $[K]$  από την Εξίσωση (6.6.10) εμφανίζεται στην Εξίσωση (6.6.11) για  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $h = 50 \text{ mm}$ ,  $t = 25 \text{ mm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ , και  $\nu = 0.3$ . Αυτό το διπλό ολοκλήρωμα λύθηκε με το Mathcad [5].

$$[K] = \begin{bmatrix} 5.077e6 & 1.5e6 & -1.385e6 & -115,384 & -2.538e6 & -1.5e6 & -3.923e6 & 115,384 \\ 1.5e6 & 1.258e7 & 115,384 & 5.885e6 & -1.5e6 & -6.288e6 & -115,384 & -1.217e7 \\ -1.385e6 & 115,384 & 5.077e6 & -1.5e6 & -3.923e6 & -115,384 & -2.538e6 & 1.5e6 \\ -115,384 & 5.885e6 & -1.5e6 & 1.258e7 & 115,384 & -1.217e7 & 1.5e6 & -6.288e6 \\ -2.538e6 & -1.5e6 & -3.923e6 & 115,384 & 5.077e6 & 1.5e6 & -1.385e6 & -115,384 \\ -1.5e6 & -6.288e6 & -115,384 & -1.217e7 & 1.5e6 & 1.258e7 & 115,384 & 5.885e6 \\ -3.923e6 & -115,384 & -2.538e6 & 1.5e6 & -1.385e6 & 115,384 & 5.077e6 & -1.5e6 \\ 115,384 & -1.217e7 & 1.5e6 & -6.288e6 & -115,384 & 5.885e6 & -1.5e6 & 1.258e7 \end{bmatrix} \quad (6.6.11)$$

Το μητρώο των δυνάμεων στο στοιχείο προκύπτει από την Εξίσωση (6.2.46) ως

$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_S [N_s]^T \{T\} dS \quad (6.6.12)$$

όπου  $[N]$  είναι το ορθογώνιο μητρώο στην Εξίσωση (6.6.6), και τα  $N_1$  έως  $N_4$  δίνονται από τις Εξισώσεις (6.6.5). Οι συναρτήσεις για το στοιχείο δίνονται από τη σχέση

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (6.6.13)$$

## Βήμα 5 έως 7

Τα βήματα 5 έως 7, που περιλαμβάνουν τη σύνθεση του ολικού μητρώου δυσκαμψίας και των εξισώσεων, τον προσδιορισμό των άγνωστων μετατοπίσεων κόμβων, και τον υπολογισμό της τάσης, είναι ταυτόσημα με εκείνα στην Ενότητα 6.2 για το CST. Πάντως, οι τάσεις μέσα σε κάθε στοιχείο διαφέρουν τώρα και στη διεύθυνση  $x$  και στη διεύθυνση  $y$ .

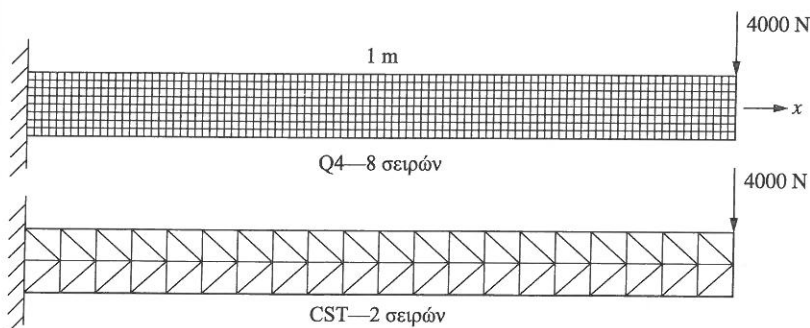
## Αριθμητική σύγκριση μοντέλων στοιχείων CST και Q4 και ελαττώματα στοιχείων

Στον Πίνακα 6-1 συγκρίνουμε την εκτροπή (βέλος κάμψης) του ελεύθερου άκρου και τη μέγιστη κύρια τάση για μια δοκό σε πρόβολο προσομοιωμένη με 2, 4, και 8 σειρές εξολοκλήρου τριγωνικών στοιχείων CST ή εξολοκλήρου ορθογωνικών στοιχείων Q4.

■ Πίνακας 6-1 Πίνακας που συγκρίνει τα βέλη κάμψης του ελεύθερου άκρου και τις μέγιστες κύριες τάσεις από μοντέλα στοιχείων συμβατών CST και Q4 (δύναμη άκρου  $P = 4000$  N, μήκος  $L = 1$  m,  $I = 1 \times 10^{-5}$  m<sup>4</sup>, πάχος = 0.12 m,  $E = 200$  GPa,  $G = 77.5$  GPa)

Επίπεδο στοιχείο/ Σειρές	Αριθμός κόμβων	Αριθμός βαθμών ελευθερίας	Μετατόπιση ελεύθερου άκρου, m	Τάση τανυστή, (0.05m από τοί- χωμα) $\sigma_x$ , MPa
Q4/2	60	120	$5.944 \times 10^{-4}$	17.34
Q4/4	200	400	$6.509 \times 10^{-4}$	18.71
Q4/8	720	1440	$6.661 \times 10^{-4}$	18.94
CST/2	60	120	$3.630 \times 10^{-4}$	7.10
CST/4	200	400	$5.537 \times 10^{-4}$	13.20
CST/8	720	1440	$6.385 \times 10^{-4}$	16.91
Κλασική θεωρία δοκού, $v_{\text{end}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5AG}$			$6.672 \times 10^{-4}$	19.00

Τυπικά μοντέλα Q4 και CST:



## Αποτελέσματα μετατόπισης

Από τα αποτελέσματα της μετατόπισης, παρατηρούμε ότι τα μοντέλα στοιχείων CST είναι πιο δύσκαμπτα από την πραγματική συμπεριφορά της δοκού, αφού οι εκτροπές προβλέπονται μικρότερες από τις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας δοκού. Παρατηρούμε επίσης ότι το μοντέλο CST συγκλίνει πολύ αργά προς τη λύση της κλασικής θεωρίας δοκού. Αυτό οφείλεται εν μέρει στο ότι το

μοντέλο προβλέπει μόνο σταθερή τάση μέσα σε κάθε στοιχείο για πρόβλημα κάμψης· η τάση στην πραγματικότητα μεταβάλλεται γραμμικά καθ' ύψος της δοκού. Αυτό το πρόβλημα διορθώνεται με τη χρήση του στοιχείου τριγώνου γραμμικής παραμόρφωσης (linear-strain triangle — LST) όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 8.

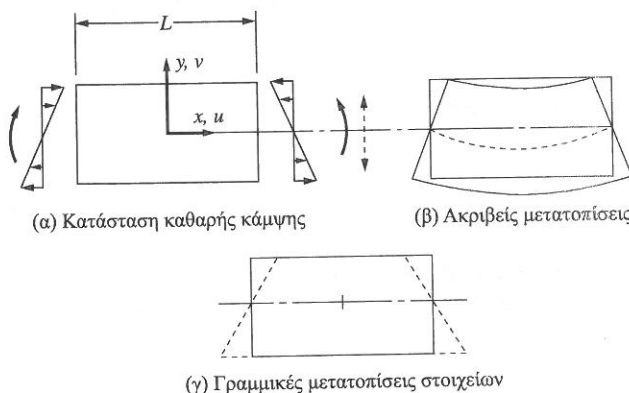
Πρόσθετες συγκρίσεις στοιχείων CST και LST θα βρείτε στην Ενότητα 8.3. Δείτε τους Πίνακες 8.1 και 8.2 και την Εικόνα 8–6.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το συμβατό με στοιχεία Q4 μοντέλο προβλέπει ακριβέστερη συμπεριφορά εκτροπής από το μοντέλο στοιχείων CST. Το μοντέλο στοιχείων Q4 δύο σειρών δίνει εκτροπές που προσεγγίζουν εκείνη που προβλέπεται από την κλασική εξίσωση βέλους κάμψης δοκού, ενώ το μοντέλο στοιχείων CST δύο σειρών είναι αρκετά ανακριβές στην πρόβλεψη της εκτροπής. Καθώς ο αριθμός των σειρών αυξάνεται σε τέσσερις και στη συνέχεια σε οκτώ, οι εκτροπές προβλέπονται με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια για τα μοντέλα στοιχείων CST και Q4. Το μοντέλο στοιχείων δοκού δύο κόμβων δίνει πανομοιότυπη εκτροπή με την κλασική εξίσωση ( $\delta = PL^3/3EI$ ) όπως αναμενόταν (δείτε την Ενότητα 4.5) και είναι το πιο κατάλληλο μοντέλο για το πρόβλημα αυτό όταν δεν σας απασχολούν, για παράδειγμα, οι συγκεντρώσεις τάσεων.

Όπως φαίνεται ακόμα στην Αναφορά [3] για μια δοκό σε καθαρή κάμψη, το CST έχει μια ψευδή διατμητική τάση και επομένως μια ψευδή διατμητική τάση σε τμήματα του μοντέλου που δεν πρέπει να έχουν διατμητική τάση ή διατμητική παραμόρφωση. Αυτή η ψευδής διατμητική παραμόρφωση απορροφά ενέργεια· επομένως, ένα μέρος της ενέργειας που θα πρέπει να πάει στην κάμψη χάνεται. Το CST είναι τότε υπερβολικά δύσκαμπτο σε κάμψη, και η παραμόρφωση που προκύπτει είναι μικρότερη απ' ό,τι θα έπρεπε να είναι. Αυτό το φαινόμενο υπερβολικής δυσκαμψίας που αναπτύσσεται σε μία ή περισσότερες καταστάσεις παραμόρφωσης περιγράφεται μερικές φορές ως *κλειδώμα διάτμησης* (shear locking) ή *παρασιτική διάτμηση* (parasitic shear).

Επιπλέον, σε προβλήματα όπου υπάρχουν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (θυμηθείτε ότι αυτό σημαίνει ότι είναι  $\epsilon_z = 0$ ) και ο λόγος του Poisson πλησιάζει την τιμή 0.5, ένα πλέγμα μπορεί πραγματικά να κλειδώσει, το οποίο σημαίνει ότι τότε το πλέγμα δεν μπορεί να παραμορφωθεί καθόλου.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση μίας μόνο σειράς στοιχείων Q4 με τη γραμμική μετατόπιση των άκρων τους δεν συνιστάται για να προβλέψει με ακρίβεια την κλίση της τάσης καθ' ύψος της δοκού. Αυτό φαίνεται στην Εικόνα 6–21, όπου για την κατάσταση καθαρής κάμψης (η οποία προσεγγίζεται από αυτό το παράδειγμα), η ακριβής μετατόπιση φαίνεται στην Εικόνα 6–21(β), ενώ η μετατόπιση του στοιχείου Q4, το οποίο δεν έχει δυνατότητα παραμόρφωσης σε καθαρή κάμψη, φαίνεται στην Εικόνα 6–21(γ).



■ Εικόνα 6–21 (α) Κατάσταση καθαρής κάμψης, (β) ακριβής μετατόπιση κάμψης, και (γ) μετατοπίσεις στοιχείων Q4 — γραμμικές μετατοπίσεις ακμών



## Αποτελέσματα τάσεων

Όπως είπαμε προηγουμένως, το στοιχείο CST έχει σταθερή παραμόρφωση και τάση στο εσωτερικό του, ενώ το στοιχείο Q4 της κάθετης παραμόρφωσης  $\epsilon_x$ , και επομένως της ορθής τάσης  $\sigma_x$ , είναι γραμμικό στη διεύθυνση  $y$ . [Δείτε επίσης την Εξίσωση (6.6.7β).] Επομένως, το CST δεν είναι σε θέση να προσομοιώσει τη συμπεριφορά σε κάμψη τόσο καλά όσο το στοιχείο Q4. Η εξίσωση της κλασικής θεωρίας/τάσης κάμψης δοκού προβλέπει μια γραμμική μεταβολή της τάσης καθ' ύψος της δοκού σύμφωνα με τη σχέση  $\sigma_x = M_y/I$  — που φαίνεται και στην Εικόνα 4.1. Όπως φαίνεται όταν συγκρίνουμε τις τάσεις τανυστή για κάθε μοντέλο, καθώς χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερες σειρές, οι τάσεις πλησιάζουν την κλασική τάση κάμψης των 19 MPa σε απόσταση 0.05 m από το τοίχωμα, ενώ το Q4 πλησιάζει την κλασική λύση πολύ πιο γρήγορα, όπως φαίνεται από τη σύγκριση των λύσεων δύο σειρών για το μοντέλο Q4 και CST.

Τέλος, το οκτώ κόμβων τετραγωνικό στοιχείο μετατόπισης ακμής (Q8) προβλέπει τη συμπεριφορά σε κάμψη καλύτερα από τα στοιχεία CST και Q4. Έτσι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν λιγότερα στοιχεία Q8 και να υπάρξει ταχύτερη σύγκλιση στη σωστή λύση με τη χρήση αυτού του στοιχείου. Για την ακρίβεια, η χρήση στοιχείων Q8 ακόμη και μίας σειράς δίνει λογικά αποτελέσματα σε κάμψη, όπως φαίνεται στην Αναφορά [3]. Επίσης, η Ενότητα 10.5 περιγράφει το στοιχείο Q8 και παρέχεται σύγκριση του Q8 με το στοιχείο Q4 για ένα μοντέλο δοκού σε πρόβολο στον Πίνακα 10.3.

Αυτή η σύντομη περιγραφή ορισμένων από τους περιορισμούς στη χρήση στοιχείων CST και Q4 δεν μας εμποδίζει να τα χρησιμοποιήσουμε σε προβλήματα του μοντέλου επίπεδης τάσης και επίπεδης παραμόρφωσης. Απλώς απαιτεί από εμάς να χρησιμοποιήσουμε πιο πυκνό πλέγμα αντί για ένα αραιό, ιδίως όταν συμβαίνει κάμψη και όπου γενικά θα προκύψουν μεγάλες κλίσεις τάσης. Επίσης, θα πρέπει να εξασφαλίζουμε ότι το πρόγραμμα του υπολογιστή μας μπορεί να χειριστεί λόγους του Poisson που πλησιάζουν την τιμή 0.5 (αν αυτό είναι επιθυμητό, όπως σε ελαστικά υλικά). Για συνήθη υλικά, όπως τα μέταλλα, ο λόγος του Poisson είναι περίπου 0.3, επομένως το κλείδωμα δεν πρέπει να μας ανησυχεί.

## ΣΥΝΟΨΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Διάνυσμα τάσης για διδιάστατη κατάσταση τάσης:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.1.1)$$

Κύριες τάσεις για διδιάστατη κατάσταση τάσης:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Κύρια γωνία:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.1.3)$$

Εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης για διδιάστατη κατάσταση τάσης:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.1.4)$$

Διάνυσμα παραμόρφωσης για διδιάστατη κατάσταση παραμόρφωσης:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.1.5)$$

Σχέση τάσης/παραμόρφωσης για διδιάστατη κατάσταση τάσης:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (6.1.7)$$

Μητρώο τάσης/παραμόρφωσης ή καταστατικό μητρώο για συνθήκη επίπεδης τάσης:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1.8)$$

Μητρώο τάσης/παραμόρφωσης για συνθήκη επίπεδης παραμόρφωσης:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1.10)$$

Συναρτήσεις μετατόπισης για τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Συναρτήσεις σχήματος για τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \\ N_m &= \frac{1}{2A}(\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_m - y_j x_m & \alpha_j &= y_i x_m - x_i y_m & \alpha_m &= x_i y_j - y_i x_j \\ \beta_i &= y_j - y_m & \beta_j &= y_m - y_i & \beta_m &= y_i - y_j \\ \gamma_i &= x_m - x_j & \gamma_j &= x_i - x_m & \gamma_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Μητρώο συνάρτησης σχήματος για τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (6.2.22)$$

Εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης σε μορφή μητρώου:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \\ \{d_m\} \end{Bmatrix} \quad (6.2.31)$$

όπου το μητρώο κλίσεων είναι

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad [B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad [B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (6.2.32)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{bmatrix} \quad (6.2.34)$$

Σχέση τάσης/παραμόρφωσης ως συνάρτηση του μητρώου μετατόπισης:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (6.2.36)$$

Συνολική δυναμική ενέργεια για διδιάστατη κατάσταση τάσης:

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (6.2.38)$$

όπου

η ενέργεια παραμόρφωσης είναι

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (6.2.39)$$

η δυναμική ενέργεια των δυνάμεων σώματος είναι

$$\Omega_b = - \iiint_V \{\psi\}^T \{X\} dV \quad (6.2.41)$$

η δυναμική ενέργεια των συγκεντρωμένων φορτίων είναι

$$\Omega_p = - \{d\}^T \{P\} \quad (6.2.42)$$

η δυναμική ενέργεια των επιφανειακών έλξεων είναι

$$\Omega_s = - \iint_S \{\psi_s\}^T \{T_s\} dS \quad (6.2.43)$$

Μητρώο δυσκαμψίας για στοιχείο CST:

$$[k] = tA[B]^T [D][B] \quad (6.2.52)$$

Ρητές δυνάμεις σώματος:

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bix} \\ f_{biy} \\ f_{bjx} \\ f_{bjy} \\ f_{bmx} \\ f_{bmy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{At}{3} \quad (6.3.6)$$

Ρητές επιφανειακές δυνάμεις για ομοιόμορφη επιφανειακή έλξη στη διεύθυνση  $x$  κατά μήκος της πλευράς 1–3:

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s1x} \\ f_{s1y} \\ f_{s2x} \\ f_{s2y} \\ f_{s3x} \\ f_{s3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pLt/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ pLt/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3.19)$$

Ρητή έκφραση για μητρώο δυσκαμψίας τριγώνου σταθερής παραμόρφωσης (CST) [δείτε την Εξίσωση (6.4.3)]:

Τάση von Mises:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (6.5.37a)$$

Αστοχία με βάση τη θεωρία ενέργειας μέγιστης παραμόρφωσης:

$$\sigma_{vm} \geq S_y \quad (6.5.38)$$

Συναρτήσεις μετατόπισης για διγραμμικό ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Συναρτήσεις σχήματος για ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(b-x)(h-y)}{4bh} & N_2 &= \frac{(b+x)(h-y)}{4bh} \\ N_3 &= \frac{(b+x)(h+y)}{4bh} & N_4 &= \frac{(b-x)(h+y)}{4bh} \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

Εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης για ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων συναρτήσει των  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + a_4y \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8x \\ \gamma_{xy} &= (a_3 + a_6) + a_4x + a_8y \end{aligned} \quad (6.6.7\beta)$$

Εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης σε μορφή μητρώου:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (6.6.8)$$

όπου το μητρώο κλίσης είναι

$$[B] = \frac{1}{4bh} \begin{bmatrix} -(h-y) & 0 & (h-y) & 0 \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) \\ -(b-x) & -(h-y) & -(b+x) & (h-y) \\ (h+y) & 0 & -(h+y) & 0 \\ 0 & (b+x) & 0 & (b-x) \\ (b+x) & (h+y) & (b-x) & -(h+y) \end{bmatrix} \quad (6.6.9)$$

Μητρώο δυσκαμψίας για ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων:

$$[k] = \int_{-h}^h \int_{-b}^b [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (6.6.10)$$

Μητρώο δυνάμεων για ορθογώνιο στοιχείο τεσσάρων κόμβων:

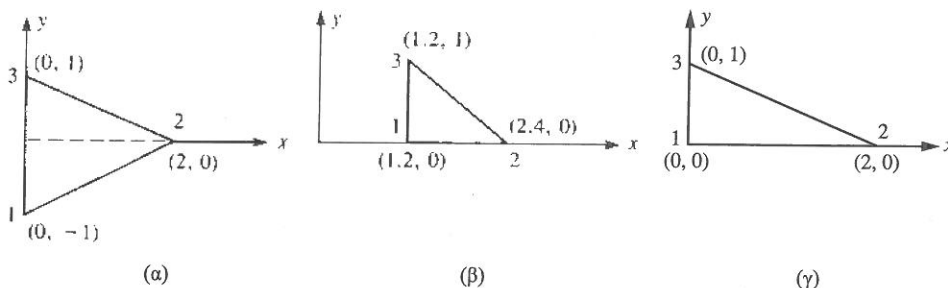
$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_S [N_S]^T \{T\} dS \quad (6.6.12)$$

### Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] Timoshenko, S., και Goodier, J., *Theory of Elasticity*, 3η έκδοση, McGraw-Hill, New York 1970.
- [2] Gere, J. M., και Goodno, B. J., *Mechanics of Materials*, 7η έκδοση, Cengage Learning, Mason, OH, 2009.
- [3] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., και Witt, R. J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4η έκδοση, Wiley, New York, 2002.
- [4] Shigley, J. E., Mischke, C. R., και Budynas, R. G., *Mechanical Engineering Design*, 7η έκδοση, McGraw-Hill, New York, 2004.
- [5] Mathcad 15.0, Parametric Technology Corp.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 6.1 Σχεδιάστε τις παραλλαγές των συναρτήσεων σχήματος  $N_j$  και  $N_m$ , που δίνονται από τις Εξισώσεις (6.2.18), επάνω από την επιφάνεια του τριγωνικού στοιχείου με κόμβους  $i$ ,  $j$ , και  $m$ . Ελέγξτε αν οπουδήποτε στο στοιχείο ισχύει  $N_i + N_j + N_m = 1$ .
- 6.2 Για ένα απλό τριγωνικό στοιχείο τριών κόμβων, δείξτε ρητά ότι η διαφορίση της Εξίσωσης (6.2.47) έχει όντως αποτέλεσμα την Εξίσωση (6.2.48). δηλαδή, αντικαταστήστε την έκφραση για το  $[B]$  και τη συνθήκη επίπεδης τάσης για το  $[D]$  στην Εξίσωση (6.2.47) και, στη συνέχεια, διαφορίστε το  $\pi_p$  ως προς κάθε βαθμό ελευθερίας κόμβου στην Εξίσωση (6.2.47) για να πάρετε την Εξίσωση (6.2.48).
- 6.3 Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας για τα στοιχεία που φαίνονται στην Εικόνα Π6-3. Οι συντεταγμένες είναι σε ίντσες (θα χρειαστεί να συμβουλευτείτε τον πίνακα μετατροπών μονάδων του βιβλίου). Υποθέστε συνθήκες επίπεδης τάσης. Έστω ότι  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.25$ , και πάχος  $t = 1$  cm.



■ Εικόνα Π6-3

- 6.4 Για τα στοιχεία στο Πρόβλημα 6.3, δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων

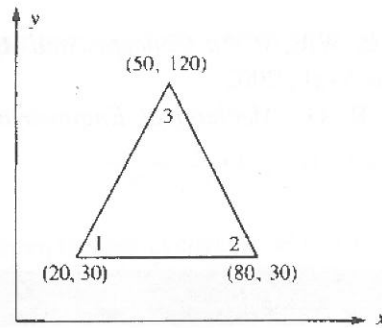
$$\begin{aligned} u_1 = 0.0 \text{ mm} & \quad v_1 = 0.0625 \text{ mm} & \quad u_2 = 0.03 \text{ mm} \\ v_2 = 0.0 \text{ mm} & \quad u_3 = 0.0 \text{ mm} & \quad v_3 = 0.0625 \text{ mm} \end{aligned}$$

Προσδιορίστε τις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_1$ , και  $\sigma_2$  στα στοιχεία, καθώς και την κύρια γωνία  $\theta_p$ . Χρησιμοποιήστε τις τιμές των  $E$ ,  $\nu$ , και  $t$  από το Πρόβλημα 6.3.

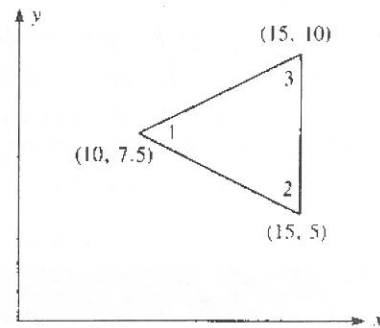
- 6.5 Προσδιορίστε την τάση von Mises για το Πρόβλημα 6.4.
- 6.6 Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας για τα στοιχεία που φαίνονται στην Εικόνα Π6-6. Οι συντεταγμένες δίνονται σε χιλιοστά. Υποθέστε συνθήκες επίπεδης τάσης. Έστω ότι  $E = 105 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ , και  $t = 10 \text{ cm}$ .
- 6.7 Για τα στοιχεία που δίνονται στο Πρόβλημα 6.6, δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων

$$u_1 = 2.0 \text{ mm} \quad v_1 = 1.0 \text{ mm} \quad u_2 = 0.5 \text{ mm}$$

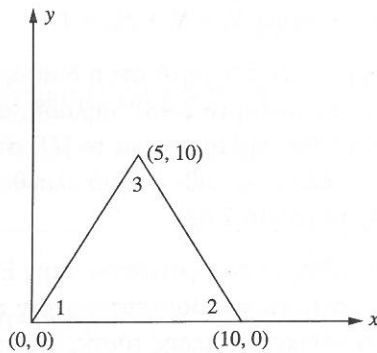
$$v_2 = 0.0 \text{ mm} \quad u_3 = 3.0 \text{ mm} \quad v_3 = 1.0 \text{ mm}$$



(α)



(β)



(γ)

■ Εικόνα Π6-6

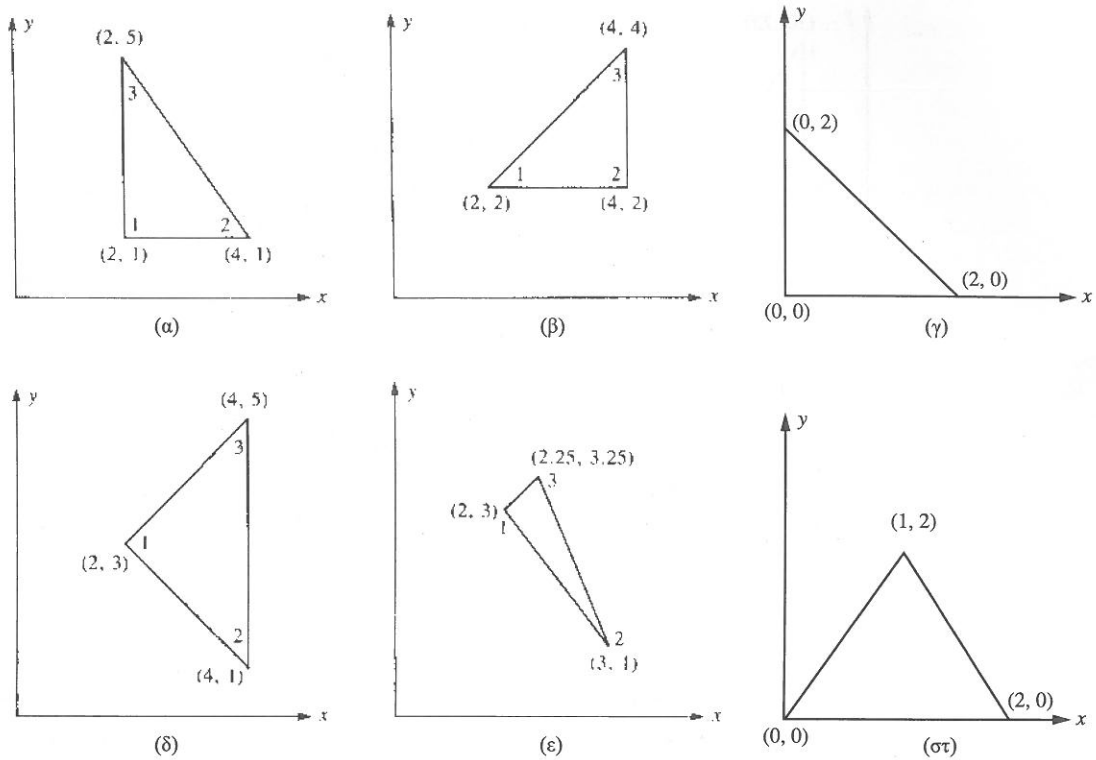
Προσδιορίστε τις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_1$ , και  $\sigma_2$  στα στοιχεία, καθώς και την κύρια γωνία  $\theta_p$ . Χρησιμοποιήστε τις τιμές των  $E$ ,  $\nu$ , και  $t$  από το Πρόβλημα 6.6.

- 6.8 Προσδιορίστε την τάση von Mises για το Πρόβλημα 6.7.
- 6.9 Για τα στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης που φαίνονται στην Εικόνα Π6-9, δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων

$$u_1 = 0.001 \text{ cm} \quad v_1 = 0.005 \text{ cm} \quad u_2 = 0.001 \text{ cm}$$

$$v_2 = 0.0025 \text{ cm} \quad u_3 = 0.0 \text{ cm} \quad v_3 = 0.0 \text{ cm}$$

Προσδιορίστε τις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_1$ , και  $\sigma_2$  στα στοιχεία, καθώς και την κύρια γωνία  $\theta_p$ . Έστω ότι  $E = 210 \text{ GPa}$  και  $\nu = 0.25$ , και χρησιμοποιήστε μοναδιαίο πάχος για επίπεδη παραμόρφωση. Όλες οι συντεταγμένες είναι σε εκατοστά.



■ Εικόνα Π6-9

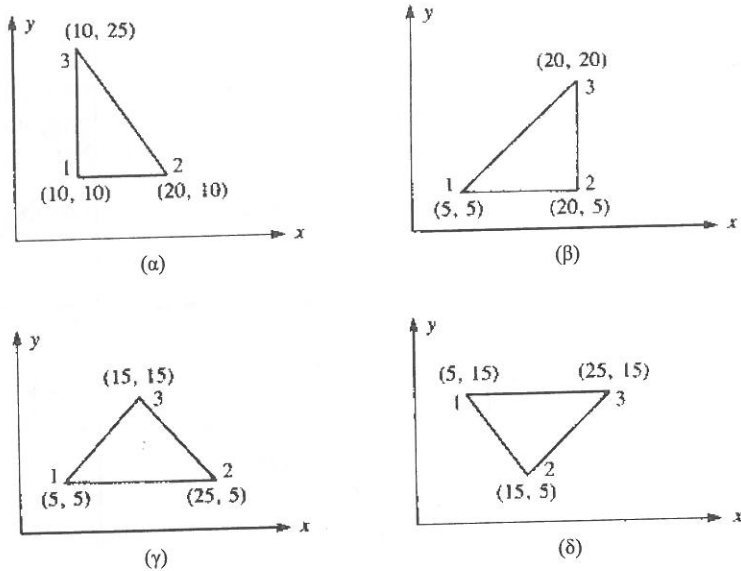
6.10 Για τα στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης που φαίνονται στην Εικόνα Π6-10, δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.005 \text{ mm} & v_1 &= 0.002 \text{ mm} & u_2 &= 0.0 \text{ mm} \\ v_2 &= 0.0 \text{ mm} & u_3 &= 0.005 \text{ mm} & v_3 &= 0.0 \text{ mm} \end{aligned}$$

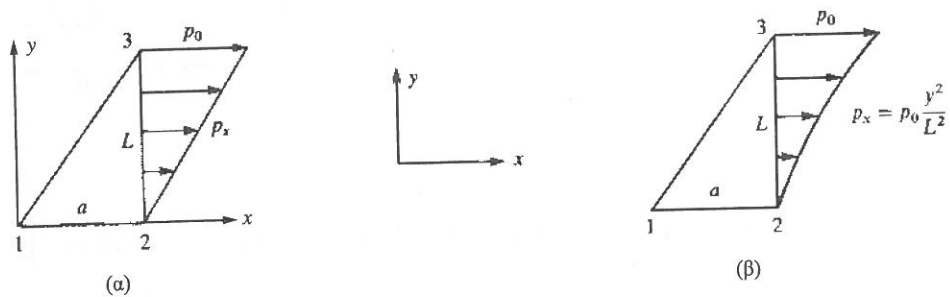
Προσδιορίστε τις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_1$ , και  $\sigma_2$  στα στοιχεία, καθώς και την κύρια γωνία  $\theta_p$ . Έστω ότι  $E = 105 \text{ GPa}$  και  $\nu = 0.3$ , και χρησιμοποιήστε μοναδιαίο πάχος για επίπεδη παραμόρφωση. Όλες οι συντεταγμένες είναι σε χιλιοστά.

6.11 Προσδιορίστε τις δυνάμεις στους κόμβους (1) για μια γραμμικά μεταβαλλόμενη πίεση  $p_x$  στο άκρο του τριγωνικού στοιχείου που φαίνεται στην Εικόνα Π6-11(α) και (2) για την τετραγωνικά μεταβαλλόμενη πίεση που φαίνεται στην Εικόνα Π6-11(β) υπολογίζοντας το επιφανειακό ολοκλήρωμα από την Εξίσωση (6.3.7). Υποθέστε ότι το πάχος του στοιχείου είναι ίσο με  $t$ .

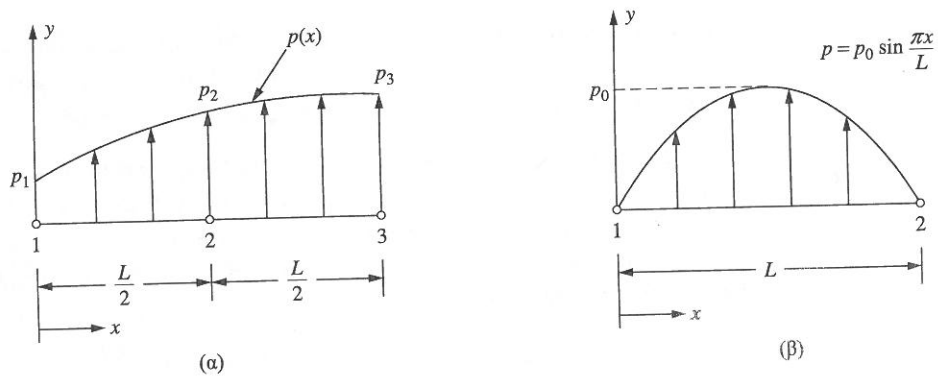
6.12 Προσδιορίστε τις δυνάμεις κόμβων (1) για την τετραγωνικά μεταβαλλόμενη πίεση που φαίνεται στην Εικόνα Π6-12(α) και (2) για την ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη πίεση που φαίνεται στην Εικόνα Π6-12(β) με τη μέθοδο ισοδύναμου έργου [χρησιμοποιήστε την έκφραση επιφανειακού ολοκληρώματος από την Εξίσωση (6.3.7)]. Υποθέστε ότι το πάχος του στοιχείου είναι ίσο με  $t$ .



■ Εικόνα Π6-10



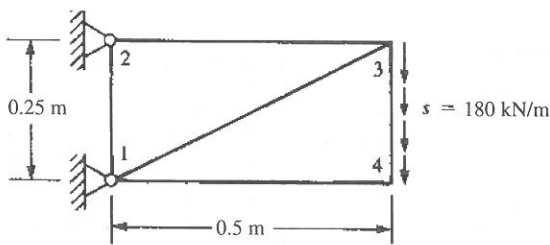
■ Εικόνα Π6-11



■ Εικόνα Π6-12

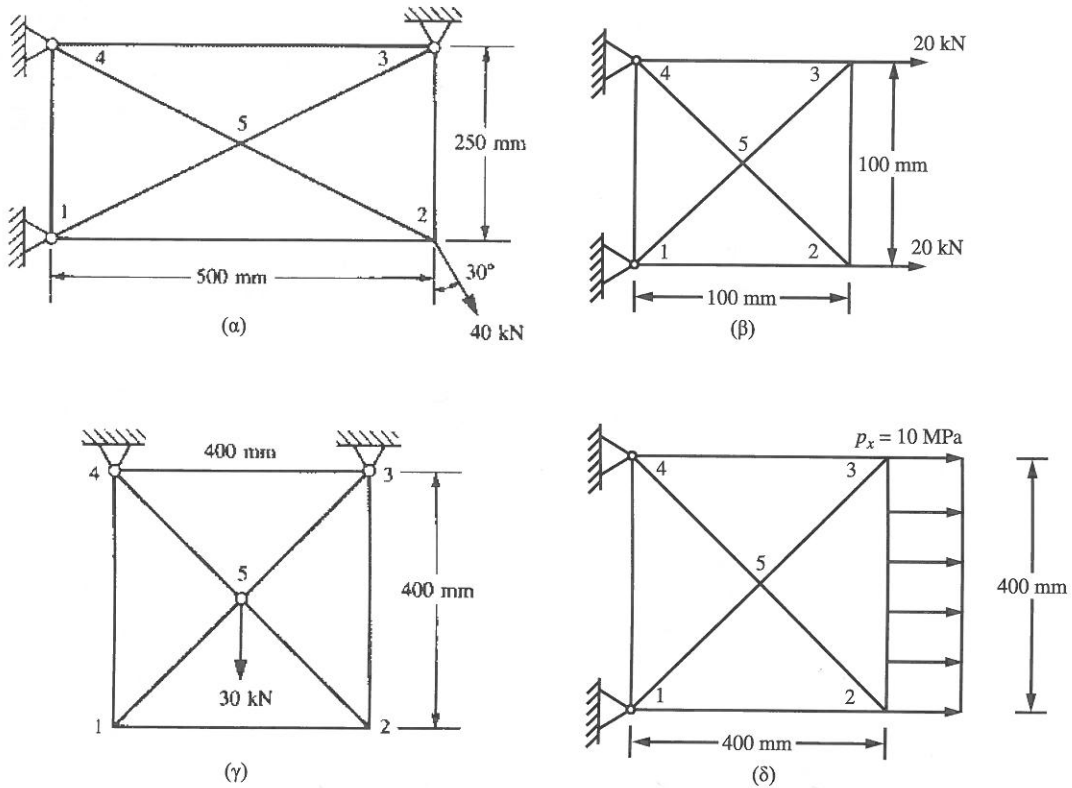
6.13 Προσδιορίστε τις μετατοπίσεις κόμβων και τις τάσεις στα στοιχεία, μαζί με τις κύριες τάσεις, για τη λεπτή πλάκα της Ενότητας 6.5 με ομοιόμορφο φορτίο διάτμησης (αντί για φορτίο εφελκυσμού) που ενεργεί στη δεξιά ακμή, όπως φαίνεται στην Εικόνα Π6-13. Χρησιμοποιήστε  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ , και  $t = 25 \text{ cm}$ . [Υπόδειξη: Για να λύσετε το πρόβλημα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μητρώο  $[K]$  που συνθέσαμε στην Ενότητα 6.5 και δίνεται από την Εξίσωση (6.5.22).]





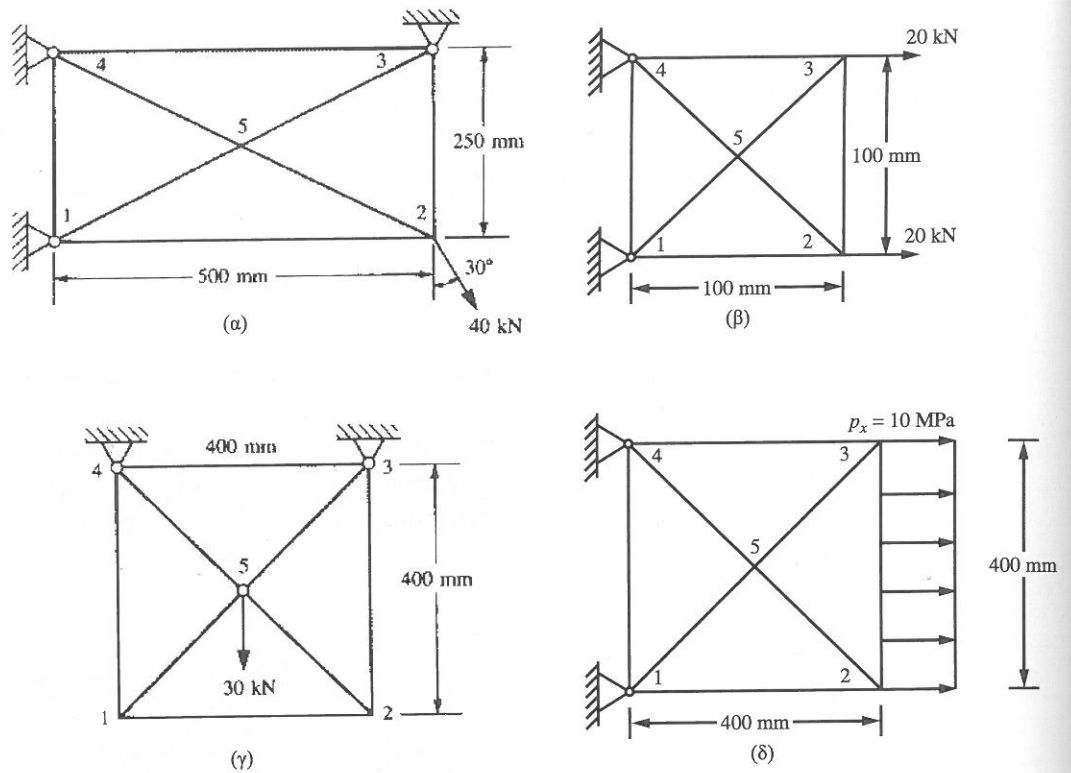
■ Εικόνα Π6-13

6.14 Προσδιορίστε τις μετατοπίσεις κόμβων και τις τάσεις στα στοιχεία, μαζί με τις κύριες τάσεις, λόγω των φορτίων που φαίνονται για τις λεπτές πλάκες στην Εικόνα Π6-14. Χρησιμοποιήστε  $E = 105 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ , και  $t = 5 \text{ cm}$ . Υποθέστε ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης τάσης. Οι συνιστώμενες διακριτοποιημένες πλάκες φαίνονται στις εικόνες. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα υπολογιστή για να λύσετε το πρόβλημα.



■ Εικόνα Π6-14

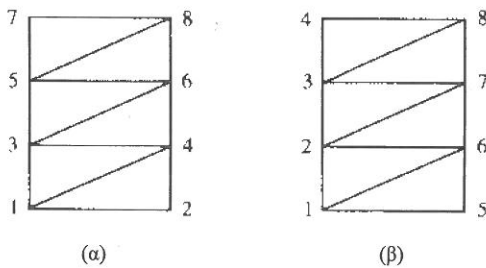
6.15 Προσδιορίστε τις μετατοπίσεις κόμβων και τις τάσεις στα στοιχεία, μαζί με τις κύριες τάσεις, λόγω των φορτίων που φαίνονται για τις λεπτές πλάκες στην Εικόνα Π6-15. Χρησιμοποιήστε  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ , και  $t = 5 \text{ cm}$ . Υποθέστε ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης τάσης. Οι συνιστώμενες διακριτοποιημένες πλάκες φαίνονται στις εικόνες. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα υπολογιστή για να λύσετε το πρόβλημα.



■ Εικόνα Π6-15

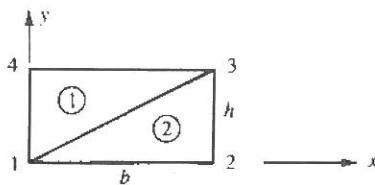
- 6.16 Υπολογίστε το μητρώο δυνάμεων σώματος για τις πλάκες που φαίνονται στις Εικόνες Π6-14(α) και (γ). Υποθέστε ότι η πυκνότητα κατά βάρος είναι  $154.2 \text{ kN/m}^3$ .
- 6.17 Γιατί το μητρώο τριγωνικής δυσκαμψίας που βρήκαμε στην Ενότητα 6.2 ονομάζεται τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης;
- 6.18 Πώς μεταβάλλονται οι τάσεις στο εσωτερικό του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης;
- 6.19 Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το στοιχείο επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης για να προσομοιώσετε τα επόμενα; Αν ναι, δείξτε ποια προσομοιώνονται καλύτερα με τη χρήση στοιχείων επίπεδης τάσης ή στοιχείων επίπεδης παραμόρφωσης:
- ένα δάπεδο κτιρίου επίπεδης πλάκας με κατακόρυφη φόρτιση κάθετη στην πλάκα
  - ένα ομοιόμορφο φράγμα σκυροδέματος που υπόκειται σε υδροστατική φόρτιση σε όλο το μήκος του
  - μια εφελκόμενη πλάκα με μια οπή που τη διατρέχει εγκάρσια
  - μια ράβδο σύνδεσης με φορτία στο επίπεδο της ράβδου
  - μια μάζα εδάφους που υπόκειται σε φόρτιση θεμελιολωρίδας
- στ. ένα διχαλωτό κλειδί που υπόκειται σε δύναμη στο επίπεδο του κλειδιού
- ζ. ένα διχαλωτό κλειδί που υπόκειται σε δυνάμεις συστροφής (οι δυνάμεις συστροφής ενεργούν έξω από το επίπεδο του κλειδιού)
- η. μια τριγωνική σύνδεση πλάκας με φορτία στο επίπεδο του τριγώνου
- θ. μια τριγωνική σύνδεση πλάκας με φορτία εκτός επιπέδου

- 6.20 Το στοιχείο επίπεδης τάσης επιτρέπει μόνο μετατοπίσεις εντός του επιπέδου, ενώ το στοιχείο πλαισίου ή δοκού ανθίσταται σε μετατοπίσεις και περιστροφές. Πώς μπορούμε να συνδυάσουμε τα στοιχεία επίπεδης τάσης και δοκού και, παρ' όλα αυτά, να διασφαλίσουμε τη συμβατότητα;
- 6.21 Για τις επίπεδες δομές που προσομοιώνονται με τριγωνικά στοιχεία και φαίνονται στην Εικόνα Π6-21, δείξτε ότι η αρίθμηση προς την κατεύθυνση με τους λιγότερους κόμβους, όπως στην Εικόνα Π6-21(α) (σε αντίθεση με την αρίθμηση προς την κατεύθυνση με τους περισσότερους κόμβους), οδηγεί σε μειωμένο εύρος ζώνης. Δείξτε το αυτό συμπληρώνοντας, με  $X$ , τα κατειλημμένα στοιχεία στο  $[K]$  για κάθε πλέγμα, όπως έγινε στο Παράρτημα Β.4. Συγκρίνετε τα εύρη ζώνης για κάθε περίπτωση.



■ Εικόνα Π6-21

- 6.22 Ακολουθήστε τα λεπτομερή βήματα για να υπολογίσετε την Εξίσωση (6.3.6).
- 6.23 Πώς θα χειριζόσαστε ένα γραμμικά μεταβαλλόμενο πάχος για ένα τρίγωνο τριών κόμβων;
- 6.24 Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 1 του μοντέλου στοιχείου δύο τριγώνων της ορθογώνιας πλάκας σε επίπεδη τάση, που φαίνεται στην Εικόνα Π6-24. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου 2.



■ Εικόνα Π6-24

- 6.25 Δείξτε ότι το άθροισμα  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$  είναι ίσο με 1 οπουδήποτε σε ένα ορθογώνιο στοιχείο, όπου τα  $N_1$  έως  $N_4$  ορίζονται από τις Εξισώσεις (6.6.5).
- 6.26 Για το ορθογώνιο στοιχείο της Εικόνας 6-20 στη σελίδα 378 δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ cm} & v_1 &= 0 \text{ cm} & u_2 &= 0.005 \text{ cm} \\ u_2 &= 0.0025 \text{ cm} & u_3 &= 0.0025 \text{ cm} & v_3 &= -0.0025 \text{ cm} \\ u_4 &= 0 \text{ cm} & v_4 &= 0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Για  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ , και  $\nu = 0.3$ , προσδιορίστε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις του στοιχείου στο κέντρο βάρους του και στους γωνιακούς κόμβους.