Τό δυνατό ἔργο τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι:

$$A_a = P_i\bar{\delta}_i + M_j\bar{\varphi}_j \quad (6.2.1)$$

ἐνῶ τό δυνατό ἔργο τῶν φορτίων διατομῆς εἶναι:

$$A_i = \int M\Delta d\bar{\varphi} + \int Q\Delta d\bar{h} + \int N\Delta d\bar{s} \quad (6.2.2)$$

ὅπου ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτείνεται σέ ὅλο τόν φορέα. Ἄν στόν φορέα ὑπάρχει ἡ ράβδος τ στήν ὁποία λόγῳ τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων ἀναπτύσσεται ἡ ἀξονική δύναμη S_τ καί ἡ μεταβολή τοῦ μήκους της l_τ λόγῳ τῆς δυνατῆς μετακίνησης εἶναι $\Delta\bar{l}_\tau$, τότε ἡ 6.2.2 γίνεται:

$$A_i = \int M\Delta d\bar{\varphi} + \int Q\Delta d\bar{h} + \int N\Delta d\bar{s} + S_\tau\Delta\bar{l}_\tau \quad (6.2.3)$$

Ἡ ἀρχή τῶν δυνατῶν ἔργων δηλώνει ὅτι τό δυνατό ἔργο τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων ἰσοῦται μέ τό δυνατό ἔργο τῶν φορτίων διατομῆς, δηλαδή:

$$A_a = A_i \rightsquigarrow P_i\bar{\delta}_i + M_j\bar{\varphi}_j = \int M\Delta d\bar{\varphi} + \int Q\Delta d\bar{h} + \int N\Delta d\bar{s} + S_\tau\Delta\bar{l}_\tau \quad (6.2.4)$$

Στή γενική περίπτωση τοῦ μικτοῦ φορέα στόν ὁποῖο ἐνεργοῦν τά φορτία $P_1, P_2, \ldots P_i$ καί οἱ ροπές-φορτία $M_1, M_2, \ldots M_j$ ἡ 6.2.4 λαμβάνει τήν μορφή:

$$\boxed{\Sigma P_i\bar{\delta}_i + \Sigma M_j\bar{\varphi}_j = \int M\Delta d\bar{\varphi} + \int Q\Delta d\bar{h} + \int N\Delta d\bar{s} + \Sigma S_\tau\Delta\bar{l}_\tau} \quad (6.2.5)$$

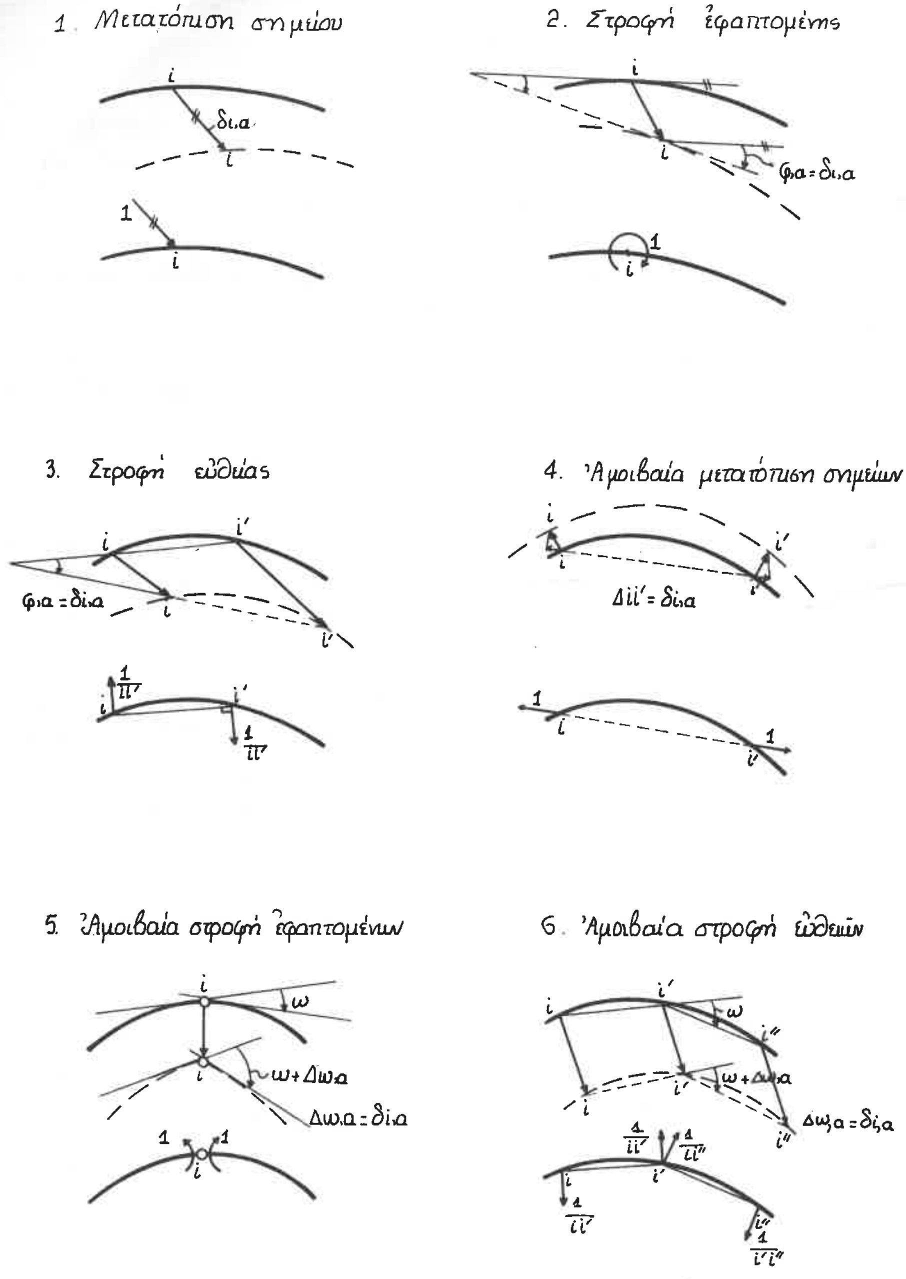
Μέ τή βοήθεια τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τή μετακίνηση $\delta_{i,a}$ (ὁ πρῶτος δείκτης ἀναφέρεται στή θέση καί ὁ δεύτερος στό αἴτιο) τοῦ φορέα συναρτήσει τῶν γνωστῶν γιά τό αἴτιο a (φόρτιση ἤ καταναγκασμός) ἐσωτερικῶν παραμορφώσεων $\Delta d\varphi_{,a}$, $\Delta dh_{,a}$, $\Delta ds_{,a}$ καί $\Delta l_{\tau,a}$.

Φορτίζουμε τόν ἀπαλλαγμένο ἀπό τό αἴτιο a φορέα μέ τήν βοηθητική μοναδιαία φόρτιση $\bar{K}_i = +\bar{1}$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐργικά ἀντιστοιχούμενη στήν μετακίνηση $\delta_{i,a}$ καί προσδιορίζουμε τά φορτία διατομῆς $\bar{M}_{,i}$, $\bar{Q}_{,i}$, $\bar{N}_{,i}$ τῶν δοκῶν καί τίς τάσεις $\bar{S}_{\tau,i}$ ὅλων τῶν ράβδων. Θεωροῦμε τή φόρτιση $\bar{K}_i = +1$ σάν τήν πραγματική φόρτιση τοῦ φορέα καί τίς μετακινήσεις πού ἔχει προκαλέσει τό αἴτιο a σάν δυνατές μετακινήσεις καί ἐφαρμόζουμε τήν 6.2.5:

$$\boxed{\bar{1}\cdot\delta_{i,a} = \int \bar{M}_{,i}\Delta d\varphi_{,a} + \int \bar{Q}_{,i}\Delta dh_{,a} + \int \bar{N}_{,i}\Delta ds_{,a} + \Sigma \bar{S}_{\tau,i}\Delta l_{\tau,a}} \quad (6.2.6)$$

Ἀπό τήν 6.2.6 ὑπολογίζεται ἡ $\delta_{i,a}$ πού ἄν προκύψει θετική σημαίνει ὅτι πραγματοποιεῖται κατά τήν ἔννοια τῆς θετικῆς βοηθητικῆς φόρτισης $\bar{K}_i$. Τό γινόμενο $\bar{1}\cdot\delta_{i,a}$ ἔχει διαστάσεις ἔργου ὁπότε ἀπό τήν μονάδα τοῦ $\bar{K}_i$, μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ καί ἡ μονάδα μέτρησης τοῦ $\delta_{i,a}$.

Στό σχῆμα 6.3 παριστάνονται οἱ θεμελιώδεις μετακινήσεις μέ τίς ἀντίστοιχες μοναδιαῖες βοηθητικές φορτίσεις.


1. Μετατόπιση σημείου
δi,a
2. Στροφή ἐφαπτομένης
φa=δi,a
3. Στροφή εὐθείας
φa=δi,a
4. Ἀμοιβαία μετατόπιση σημείων
Δii'=δi,a
5. Ἀμοιβαία στροφή ἐφαπτομένων
ω
ω+Δω,a
Δω,a=δi,a
6. Ἀμοιβαία στροφή εὐθειῶν
ω
ω+Δω,a
Δω,a=δi,a

Σχήμα 6.3

6.3 Οἱ μετακινήσεις ἀπό τήν φόρτιση.

Σέ ἕνα μικτό φορέα ὑπό τήν ἐπήρεια τῆς φόρτισης ρ ἀναπτύσσονται στίς δοκούς τά φορτία διατομῆς $M_{,p}, Q_{,p}, N_{,p}$ πού προκαλοῦν στό ἀπειροστό στοιχεῖο τίς παραμορφώσεις $\Delta d\varphi_{,p}, \Delta dh_{,p}, \Delta ds_{,p}$ καί στίς ράβδους οἱ ἀξονικές δυνάμεις $S_{\tau,p}$ πού προκαλοῦν σέ αὐτές τίς παραμορφώσεις $\Delta l_{\tau,p}$. Οἱ παραμορφώσεις συνδέονται μέ τά μεγέθη ἐντάσεως μέ τίς σχέσεις:

$$\Delta d\varphi_{,p} = \frac{M_{,p}}{EJ}\,ds\ ,\quad \Delta dh_{,p} = K_Q \frac{Q_{,p}}{GF}\,ds\ ,\quad \Delta ds_{,p} = \frac{N_{,p}}{EF}\,ds\ ,\quad \Delta l_{\tau,p} = \frac{S_{\tau,p}\,l_\tau}{E_\tau F_\tau} \qquad (6.3.1)$$

ὅπου E καί G τό μέτρο ἐλαστικότητας καί τό μέτρο ὀλισθήσεως ἀντίστοιχα τοῦ ὑλικοῦ τῶν δοκῶν, F τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς των καί J ἡ ροπή ἀδράνειας της ὡς πρός τόν οὐδέτερο ἄξονα, K_Q σταθερά ἐξαρτημένη ἀπό τό σχῆμα τῆς διατομῆς των, E_τ τό μέτρο ἐλαστικότητας τῆς ράβδου τ καί F_τ τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς της.

Ἀπό τίς 6.2.6, 6.3.1 προκύπτει:

$$\boxed{\bar{1}\cdot\delta_{i,p} = \int \bar{M}_{,i}\,M_{,p}\,\frac{ds}{EJ} + \int \bar{Q}_{,i}\,Q_{,p}\,K_Q\,\frac{ds}{GF} + \int \bar{N}_{,i}\,N_{,p}\,\frac{ds}{EF} + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i}\,S_{\tau,p}\,\frac{l_\tau}{E_\tau F_\tau}} \qquad (6.3.2)$$

Ἡ 6.3.2 μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ μορφή:

$$\boxed{\delta_{ip} = \delta_{ip,M} + \delta_{ip,Q} + \delta_{ip,N} + \delta_{ip,S}} \qquad (6.3.3)$$

ὅπου οἱ τέσσερεις ὅροι τοῦ δεξιοῦ σκέλους ἐκφράζουν τά μερίδια τῆς μετακίνησης δ_{ip} ἀπό τά μεγέθη M, Q, N καί S ἀντίστοιχα. Ἐπειδή κατά κανόνα τά $\delta_{ip,Q}$, $\delta_{ip,N}$ εἶναι ἀμελητέα μεγέθη σέ σχέση μέ τά $\delta_{ip,M}$, $\delta_{ip,S}$ μποροῦμε νά τά παραλείψουμε ὁπότε ἡ 6.3.2 λαμβάνει τή μορφή:

$$\boxed{\bar{1}\cdot\delta_{i,p} = \int \bar{M}_{,i}\,M_{,p}\,\frac{ds}{EJ} + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i}\,S_{\tau,p}\,\frac{l_\tau}{E_\tau F_\tau}} \qquad (6.3.4)$$

Τό ὁλοκλήρωμα τῆς 6.3.4, πού ἐκτείνεται σέ ὅλο τό μῆκος τοῦ φορέα, ἀναλύεται σέ ἀθροίσματα ὁλοκληρωμάτων καθένα ἀπό τά ὁποῖα ἐκτείνεται κατά μῆκος μιᾶς μόνης δοκοῦ τοῦ φορέα. Ἐπειδή στίς περισσότερες ἐφαρμογές κάθε δοκός τοῦ φορέα ἔχει σταθερή ροπή ἀδράνειας J, τό ἀντίστοιχο ὁλοκλήρωμα τῆς δοκοῦ μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\int \bar{M}_{,i}\,M_{,p}\,\frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int \bar{M}_{,i}\,M_{,p}\,ds = \frac{1}{EJ_c}\left(\frac{J_c}{J}\int \bar{M}_{,i}\,M_{,p}\,ds\right)$$

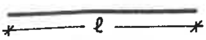
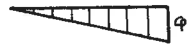
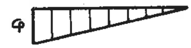
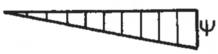
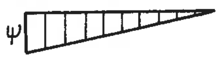
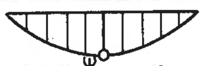
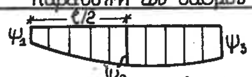
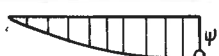
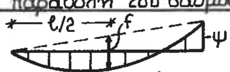
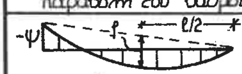
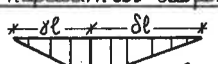
ὅπου J_c αὐθαίρετη ροπή ἀδράνειας, κοινή γιά ὅλες τίς δοκούς. Καταλήγουμε λοιπόν στό ὁλοκλήρωμα τοῦ γινομένου τῶν τεταγμένων τῶν δύο διαγραμμάτων $\bar{M}_{,i}$ καί $M_{,p}$ τῆς δοκοῦ. Οἱ τιμές τῶν ὁλοκληρωμάτων αὐτῶν ἔχουν συστηματοποιηθεῖ σέ πίνακες καί ἔτσι ἀποφεύγεται ἡ ἀναλυτική ὁλοκλήρωση. Στόν πίνακα 6.I δίνονται γιά συνήθεις μορφές διαγραμμάτων M_ψ καί M_φ οἱ τιμές τοῦ ὁλοκληρώματος $\int M_\psi M_\varphi dx$.

Ἄν καθένα ἀπό τά M_ψ καί M_φ προκύπτει ἀπό τήν ἐπαλληλία δύο διαγραμμάτων M' καί M'' πού περιλαμβάνονται στούς πίνακες, μπορεῖ γιά τό ὑπολογισμό τοῦ ὁλοκληρώματος νά ἐφαρμοστεῖ ὁ ἐπιμεριστικός κανόνας:

$$M_\psi M_\varphi = (M'_\psi + M''_\psi)(M'_\varphi + M''_\varphi) = M'_\psi M'_\varphi + M'_\psi M''_\varphi + M''_\psi M'_\varphi + M''_\psi M''_\varphi$$

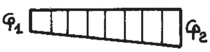
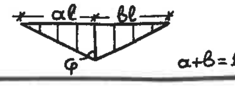
Τέλος ἄν τό διάγραμμα M_ψ εἶναι συμμετρικό καί τό M_φ ἀντισυμμετρικό τότε:

$$\int M_\psi M_\varphi\,dx = 0$$

Πίναμας 6.I	Τιμές των ολοκληρωμάτων		
			
	$\psi\varphi$	$\frac{1}{2}\psi\varphi$	$\frac{1}{2}\psi\varphi$
	$\frac{1}{2}\psi\varphi$	$\frac{1}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$
	$\frac{1}{2}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{3}\psi\varphi$
	$\frac{1}{2}\varphi(\psi_1+\psi_2)$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1+2\psi_2)$	$\frac{1}{6}\varphi(2\psi_1+\psi_2)$
	0	$-\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{2}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{3}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1+4\psi_2+\psi_3)$	$\frac{1}{6}\varphi(2\psi_2\ \psi_3)$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1+2\psi_2)$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{1}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{4}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{1}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi$	$\frac{1}{4}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{2}{3}\psi\varphi$	$\frac{5}{12}\psi\varphi$	$\frac{1}{4}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{2}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{4}\psi\varphi$	$\frac{5}{12}\psi\varphi$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{1}{6}\varphi(4f-3\psi)$	$\frac{1}{3}\varphi(f-\psi)$	$\frac{1}{6}\varphi(2f-\psi)$
 παραβολή 2ου βαθμού	$\frac{1}{6}\varphi(4f-3\psi)$	$\frac{1}{6}\varphi(2f-\psi)$	$\frac{1}{3}\varphi(f-\psi)$
	$\frac{1}{2}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1+\gamma)$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1+\delta)$

"ο" : οριζόντια εφαπτομένη

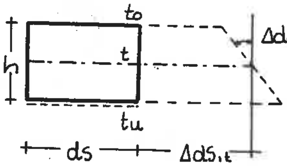
$\int M_\psi M_\varphi \, dx = \ell \cdot (\text{τιμή τοῦ πίνακα})$

		
$\frac{1}{2}\psi(\varphi_1+\varphi_2)$	0	$\frac{1}{2}\psi\varphi$
$\frac{1}{6}\psi(\varphi_1+2\varphi_2)$	$-\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1+\alpha)$
$\frac{1}{6}\psi(2\varphi_1+\varphi_2)$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1+\beta)$
$\frac{1}{6}(\psi_1(2\varphi_1+\varphi_2)+\psi_2(\varphi_1+2\varphi_2))$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1-\psi_2)$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1(1+\beta)+\psi_2(1+\alpha))$
$\frac{1}{6}\psi(\varphi_1-\varphi_2)$	$\frac{1}{3}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1-2\alpha)$
$\frac{1}{3}\psi(\varphi_1+\varphi_2)$	0	$\frac{1}{3}\psi\varphi(1+\alpha\beta)$
$\frac{1}{6}(\psi_1\varphi_1+2\psi_2(\varphi_1+\varphi_2)+\psi_3\varphi_2)$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1-\psi_3)$	$\frac{1}{6}\varphi(\psi_1\beta+2\psi_2+\psi_3\alpha-$ $-\alpha\beta(\psi_1-2\psi_2+\psi_3))$
$\frac{1}{12}\psi(\varphi_1+3\varphi_2)$	$-\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi(1+\alpha+\alpha^2)$
$\frac{1}{12}\psi(3\varphi_1+\varphi_2)$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi(1+\beta+\beta^2)$
$\frac{1}{12}\psi(3\varphi_1+5\varphi_2)$	$-\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi(5-\beta-\beta^2)$
$\frac{1}{12}\psi(5\varphi_1+3\varphi_2)$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{12}\psi\varphi(5-\alpha-\alpha^2)$
$\frac{1}{6}(2f(\varphi_1+\varphi_2)-\psi(\varphi_1+2\varphi_2))$	$\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\varphi(2f(1+\alpha\beta)-\psi(1+\alpha))$
$\frac{1}{6}(2f(\varphi_1+\varphi_2)-\psi(2\varphi_1+\varphi_2))$	$-\frac{1}{6}\psi\varphi$	$\frac{1}{6}\varphi(2f(1+\alpha\beta)-\psi(1+\beta))$
$\frac{1}{6}\psi(\varphi_1(1+\delta)+\varphi_2(1+\gamma))$	$\frac{1}{6}\psi\varphi(1-2\gamma)$	$\frac{\psi\varphi}{6\beta\gamma}(2\gamma-\gamma^2-\alpha^2)$ $\gamma \geq \alpha$

6.4. Οἱ καταναγκασμοί.

Καταναγκασμός ὀνομάζεται ὁποιοδήποτε αἴτιο πού εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν φόρτιση καί πού μπορεῖ νά προκαλέσει στόν φορέα παραμόρφωση. Στούς ἰσοστατικούς φορεῖς οἱ καταναγκασμοί δέν προκαλοῦν ἔνταση, δηλαδή δέν ἀναπτύσσονται φορτία διατομῆς. Οἱ καταναγκασμοί πού θά ἐξετάσουμε εἶναι ἡ ἀλλαγή θερμοκρασίας, οἱ διαφορές συναρμογῆς καί ἡ ὑποχώρηση τῶν στηρίξεων.

1. Ἡ ἀλλαγή θερμοκρασίας.



Σχῆμα 6.4

Ἡ ἀλλαγή τῆς θερμοκρασίας προκαλεῖ στό ἀπειροστό στοιχεῖο τίς παραμορφώσεις:

$$\Delta d\varphi_{,t} = \frac{a_t \Delta t}{h}\, ds \;,\; \Delta dh_{,t} = 0 \;,\; \Delta ds = a_t\, t\, ds \qquad (6.4.1)$$

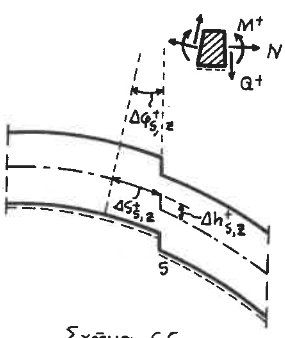
ὅπου a_t ὁ συντελεστής τῆς θερμικῆς διαστολῆς τοῦ ὑλικοῦ, t ἡ ἀλλαγή τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἄξονα καί $\Delta t = t_u - t_o$ ἡ αὔξηση τῆς θερμοκρασίας τῆς ἴνας ἀναφορᾶς σέ σχέση μέ τή θερμοκρασία τῆς ἀπέναντι ἴνας (σχ. 6.4). Ἡ ἀλλαγή τῆς θερμοκρασίας τῆς ράβδου τ κατά t_τ προκαλεῖ σέ αὐτή τήν παραμόρφωση:

$$\Delta \ell_{\tau,t} = a_t\, t_\tau\, \ell_\tau \qquad (6.4.2)$$

Ἀπό τίς 6.2.6, 6.4.1, 6.4.2 προκύπτει:

$$\boxed{\bar{1}\cdot \delta_{i,t} = \int \bar{M}_{,i}\, \frac{a_t \Delta t}{h}\, ds + \int \bar{N}_{,i}\, a_t\, t\, ds + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i}\, a_t\, t_\tau\, \ell_\tau} \qquad (6.4.3)$$

2. Οἱ διαφορές συναρμογῆς



Σχῆμα 6.5

Σέ μιά ὁρισμένη θέση s ὁ ἄξονας μιᾶς δοκοῦ τοῦ φορέα μπορεῖ νά ἔχει μῆκος μεγαλύτερο ἤ μικρότερο κατά $\Delta s_{s,z}$ ἀπό τό προβλεπόμενο ἤ νά ἐμφανίζει γόνατο γωνίας $\Delta\varphi_{s,z}$ ἤ ἅλμα ὕψους $\Delta h_{s,z}$ (σχ. 6.5) ἐνῶ ἡ ράβδος τ μπορεῖ νά ἔχει μῆκος μεγαλύτερο ἤ μικρότερο κατά $\Delta\ell_{\tau,z}$ ἀπό τό θεωρητικό. Τά μεγέθη $\Delta s_{s,z}$, $\Delta\varphi_{s,z}$, $\Delta h_{s,z}$ καί $\Delta\ell_{\tau,z}$ ὀνομάζονται διαφορές συναρμογῆς καί λαμβάνονται θετικά ἄν πραγματοποιοῦνται κατά τήν ἔννοια τῶν θετικῶν φορτίων διατομῆς. Γιά τίς καταναγκασμένες αὐτές παραμορφώσεις ἡ 6.2.6 λαμβάνει τή μορφή:

$$\boxed{\bar{1}\cdot \delta_{i,z} = \bar{M}_{s,i}\,\Delta\varphi_{s,z} + \bar{Q}_{s,i}\,\Delta h_{s,z} + \bar{N}_{s,i}\,\Delta s_{s,z} + \bar{S}_{\tau,i}\,\Delta\ell_{\tau,z}} \qquad (6.4.4)$$

Ἄν σέ πολλές θέσεις τοῦ φορέα ὑπάρχουν διαφορές συναρμογῆς ἡ 6.4.4 γίνεται:

$$\boxed{\bar{1}\cdot \delta_{i,z} = \sum_s \bar{M}_{s,i}\,\Delta\varphi_{s,z} + \sum_s \bar{Q}_{s,i}\,\Delta h_{s,z} + \sum_s \bar{N}_{s,i}\,\Delta s_{s,z} + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i}\,\Delta\ell_{\tau,z}} \qquad (6.4.5)$$

3. Ἡ ὑποχώρηση τῶν στηρίξεων.

Μέ τήν ὑποχώρηση τῆς στηρίξεως q κατά W_q τό ἀπειροστό στοιχεῖο δέν παραμορφώνεται, δηλαδή:

$$\Delta d\varphi_{,w} = \Delta dh_{,w} = \Delta ds_{,w} = \Delta \ell_{\tau,w} = 0$$

ὁπότε μέ ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων λαμβάνουμε:

$$\boxed{\bar{1} \cdot \delta_{i,w} = \bar{C}_{q,i} W_q} \qquad (6.4.6)$$

ὅπου $\bar{C}_{q,i}$ ἡ ἐργικά ἀνταποκρινόμενη στήν ὑποχώρηση W_q ἀντίδραση πού ἀναπτύσσεται στήν στήριξη q λόγω τῆς $\bar{V}_i = +\bar{1}$. Τό γινόμενο $\bar{C}_{q,i} W_q$ προσημαίνεται θετικά ὅταν $\bar{C}_{q,i}$ καί W_q ἔχουν ἀντίθετη φορά.

Ἄν ὑποχωρήσουν πολλές στηρίξεις τοῦ φορέα ἡ 6.4.6 λαμβάνει τήν μορφή:

$$\boxed{\bar{1} \cdot \delta_{i,w} = \sum_q \bar{C}_{q,i} W_q} \qquad (6.4.7)$$

Στόν συγκεντρωτικό πίνακα 6.II ὑπάρχει τό τυπολόγιο γιά τόν ὑπολογισμό μετακινήσεων στούς ἰσοστατικούς φορεῖς.

Μετακινήσεις ἰσοστατικῶν φορέων.

1. Λόγω ἐξωτερικῆς φόρτισης

$$\bar{1} \cdot \delta_{i,P} = \int \bar{M}_{,i} M_{,P} \frac{ds}{EJ} + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i} S_{\tau,P} \frac{\ell_\tau}{E_\tau F_\tau}$$

2. Λόγω ἀλλαγῆς θερμοκρασίας.

$$\bar{1} \cdot \delta_{i,t} = \int \bar{M}_{,i} \frac{a_t \Delta t}{h} ds + \int \bar{N}_{,i} a_t t \, ds + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i} a_t t_\tau \ell_\tau$$

3. Λόγω διαφορῶν συναρμογῆς.

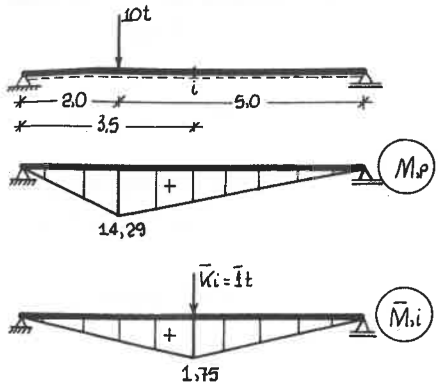
$$\bar{1} \cdot \delta_{i,z} = \sum_s \bar{M}_{s,i} \Delta\varphi_{s,z} + \sum_s \bar{Q}_{s,i} \Delta h_{s,z} + \sum_s \bar{N}_{s,i} \Delta s_{s,z} + \sum_\tau \bar{S}_{\tau,i} \Delta \ell_{\tau,z}$$

4. Λόγω ὑποχώρησης στηρίξεων

$$\bar{1} \cdot \delta_{i,w} = \sum_q \bar{C}_{q,i} W_q$$

Πίνακας 6.II

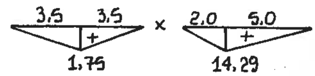
Παράδειγμα 31: Ζητεῖται ἡ βύθιση $\delta_{i,P}$ τῆς ἀμφιέρειστης δοκοῦ τοῦ σχ. 6.6.
Δίνεται: $EJ = 1,95\cdot10^4\ tm^2$



Σχῆμα 6.6

Γιά νά ὑπολογίσουμε τή βύθιση $\delta_{i,P}$ ἀπαιτεῖται πρῶτα τό διάγραμμα ροπῶν $M_{,P}$ λόγω τῆς ἐξωτερικῆς φόρτισης, πού εἶναι γνωστό. Θεωροῦμε μετά τήν ἐργική φόρτιση τῆς ζητούμενης βύθισης, πού εἶναι τό κατακόρυφο φορτίο $\bar{1}t$, ἐφαρμοσμένο στήν θέση i καί προσδιορίζουμε τό διάγραμμα ροπῶν $\bar{M}_{,i}$. Τό ὁλοκλήρωμα $\int \bar{M}_{,i} M_{,P}\, ds$ ὑπολογίζεται μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα I.

$\int \bar{M}_{,i} M_{,P}\, ds =$



$=$

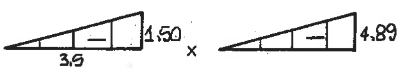
$$= 7.0\cdot\left(\frac{1.75\cdot 14.29}{6\cdot\frac{5.0}{7.0}\cdot\frac{3.5}{7.0}}\cdot\left(2\cdot\frac{3.5}{7.0}-\left(\frac{3.5}{7.0}\right)^2-\left(\frac{2.0}{7.0}\right)^2\right)\right)=$$

$$= 54,60\ (t^2m^3)\ ,\quad \bar{1}\cdot\delta_{i,P} = \frac{1}{EJ}\int \bar{M}_{,i} M_{,P}\, ds = \frac{54,60}{1,95\cdot10^4} \rightsquigarrow \delta_{i,P} = 2.80\cdot10^{-3}\ m = 2,80\ mm$$

Παράδειγμα 32: Ζητεῖται ἡ βύθιση $\delta_{G,P}$ τοῦ ἀρθρωτοῦ φορέα τοῦ σχ. 6.7.
Δίνονται: $E = 2,1\cdot10^6\ t/m^2$, $J_1 = 0,65\cdot10^{-2}\ m^4$, $J_2 = 1,3\cdot10^{-2}\ m^4$

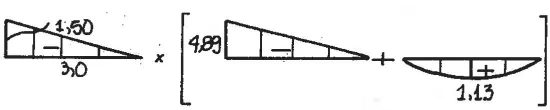
Τά διαγράμματα $M_{,P}$, $\bar{M}_{,i}$ προσδιορίζονται εὔκολα. Τό ὁλοκλήρωμα $\int \bar{M}_{,i} M_{,P}\, ds$ ὑπολογίζεται τμηματικά (AC, CG, GD, DB).

Στῦλος AC



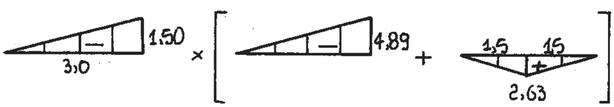
$$= 3,5\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot(-1,50)\cdot(-4,89)\right) = 8,56$$

Ζύγωμα CG

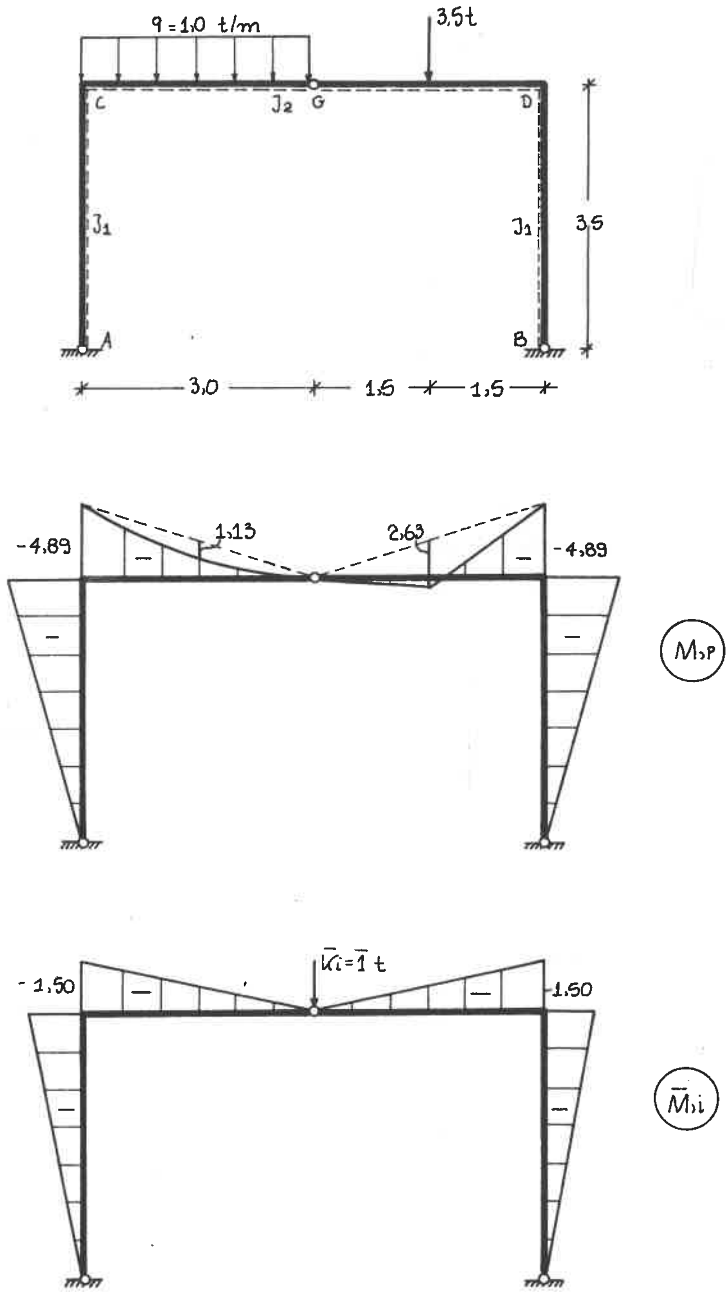


$$= 3,0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot(-1,50)\cdot(-4,89) + \tfrac{1}{3}\cdot(-1,50)\cdot 1,13\right) = 5,64$$

Ζύγωμα GD

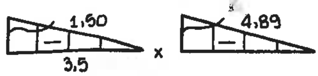


$$= 3,0\cdot\left[\tfrac{1}{3}\cdot(-1,50)\cdot(-4,89) + \tfrac{1}{6}\cdot(-1,50)\cdot 2,63\cdot\left(1+\tfrac{1,5}{3,0}\right)\right] = 4,38$$


q = 1,0 t/m
3,5t
C
J2
G
D
J1
J1
3,5
A
B
3,0
1,5
1,5
1,13
2,63
-4,89
-4,89
M,p
$\bar{K}_i = \bar{1}$ t
-1,50
1,50
$\bar{M}_i$

Σχήμα 6.7

Στύλος DB



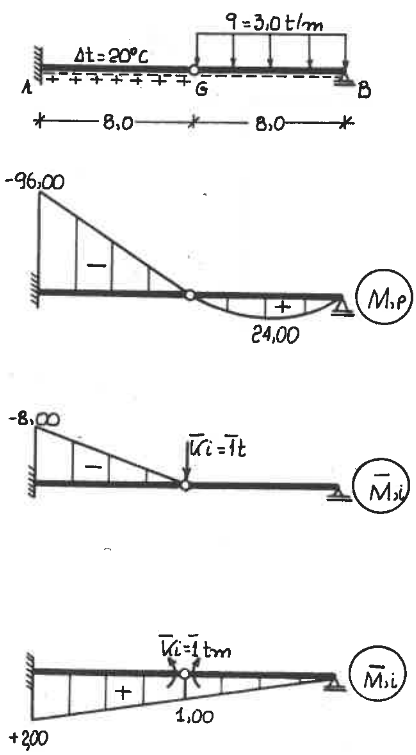
$$\times \quad = 3{,}5\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-1{,}50)\cdot(-4{,}89)\right] = 8{,}56$$

Επιλέγουμε $J_c = J_1 \rightsquigarrow \frac{J_c}{J_1} = 1,\ \frac{J_c}{J_2} = 0{,}5,\ EJ_c = 1{,}37\cdot 10^4\ tm^2$

$$\bar{1}\cdot\delta_{G,P} = \frac{1}{EJ}\int \bar{M}_{,i}\,M_{,P}\,ds \rightsquigarrow EJ_c\,\delta_{G,P} = \frac{J_c}{J_1}\cdot(8{,}56+8{,}56) + \frac{J_c}{J_2}\cdot(5{,}64+4{,}38) = 22{,}13\ tm^3 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \delta_{G,P} = 1{,}62\cdot 10^{-3}\ m = 1{,}62\ mm$$

<u>Παράδειγμα 33:</u> Ζητείται η βύθιση και η γωνία της αμοιβαίας στροφής των διατομών στην άρθρωση G της αρθρωτής δοκού του σχ. 6.8.
Δίνονται: $EJ = 2{,}1\cdot 10^4\ tm^2$, $a_t = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$, $h = 0{,}40\ m$



Σχήμα 6.8

Βύθιση u_G

$u_G = u_{G,P} + u_{G,t}$ (1)

$$\bar{1}\cdot u_{G,P} = \frac{1}{EJ}\int \bar{M}_{,i}\,M_{,P}\,ds \rightsquigarrow EJ\,u_{G,P} = \int \bar{M}_{,i}\,M_{,P}\,ds =$$

$$= 8{,}0\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-8{,}00)\cdot(-96{,}00)\right] = 2048\ tm^3$$

$$EJ\,u_{G,P} = 2048 \rightsquigarrow u_{G,P} = \frac{2048}{2{,}1\cdot 10^4} = 9{,}75\cdot 10^{-2}\ m \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow u_{G,P} = 9{,}75\ cm$ (2)

$$\bar{1}\cdot u_{G,t} = \int \bar{M}_{,i}\,\frac{a_t\,\Delta t}{h}\,ds \rightsquigarrow u_{G,t} = \frac{a_t\,\Delta t}{h}\int_{AG} \bar{M}_{,i}\,ds =$$

$$= \frac{1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot 20}{0{,}40}\cdot\left[\frac{(-8{,}00)\cdot 8{,}0}{2}\right] = -1{,}92\cdot 10^{-2}\ m \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow u_{G,t} = -1{,}92\ cm$ (3)

(1),(2),(3) $\rightsquigarrow u_G = 9{,}75 - 1{,}92 \rightsquigarrow u_G = 7{,}83\ cm$

Γωνία w_G

$w_G = w_{G,P} + w_{G,t}$ (4)

$$\bar{1}\cdot w_{G,P} = \frac{1}{EJ}\int \bar{M}_{,i}\,M_{,P}\,ds \rightsquigarrow EJ\,w_{G,P} = \int \bar{M}_{,i}\,M_{,P}\,ds =$$

$$= 8{,}0\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot(-96{,}00)\cdot(2\cdot 2{,}00 + 1{,}00)\right] + 8{,}0\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1{,}00\cdot 24{,}00\right] = -576\ tm^2$$

$$EJ\,w_{G,P} = -576 \rightsquigarrow w_{G,P} = -\frac{576}{2{,}1\cdot 10^4} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow w_{G,P} = -0{,}0274\ rad$ (5)

$$\bar{1}\cdot w_{G,t} = \int \bar{M}_{,i}\,\frac{a_t\,\Delta t}{h}\,ds \rightsquigarrow w_{G,t} = \frac{a_t\,\Delta t}{h}\int_{AG}\bar{M}_{,i}\,ds = \frac{1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot 20}{0{,}40}\left(\frac{(2{,}00+1{,}00)}{2}\cdot 8{,}0\right) \rightsquigarrow$$

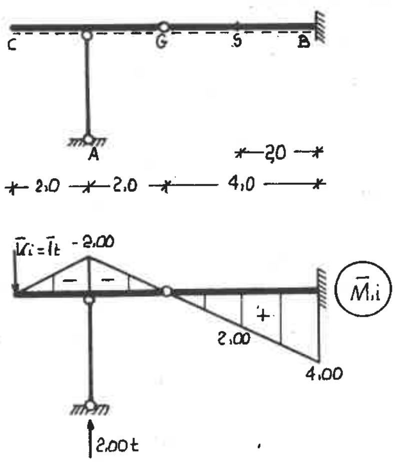
$\rightsquigarrow w_{G,t} = 0{,}0072$ rad (6)

(4),(5),(6) $\rightsquigarrow$ $w_G = -0{,}0274 + 0{,}0072 \rightsquigarrow w_G = -0{,}0202$ rad.

<u>Παράδειγμα 34:</u> Ζητεῖται ἡ βύθιση u_c τοῦ φορέα τοῦ σχ. 6.9 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. διαφορά συναρμογῆς $\Delta\varphi_S = 1°$
2. ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t = 20°C$ στό ζύγωμα GB.
3. ὑποχώρηση τῆς στήριξης A κατά $W_A = 3$ cm ↓

Δίνονται: $a_t = 10^{-5}$ grad^{-1} , $h = 0{,}40$ m



Σχῆμα 6.9

1. $\Delta\varphi_S = 1° = 0{,}0175$ rad

   $\bar{1}\cdot u_{c,z} = \bar{M}_{S,i}\cdot\Delta\varphi_S = 2.00\cdot 0{,}0175 = 0{,}035$ tm $\rightsquigarrow$

   $\rightsquigarrow u_{c,z} = 3{,}50$ cm

2. $\dfrac{a_t\,\Delta t}{h} = \dfrac{10^{-5}\cdot 20}{0{,}40} = 5\cdot 10^{-4}$ m^{-1}

   $\bar{1}\cdot u_{c,t} = \int \bar{M}_{,i}\,\dfrac{a_t\,\Delta t}{h}\,ds = \dfrac{a_t\,\Delta t}{h}\int_{GB}\bar{M}_{,i}\,ds =$

   $= 5\cdot 10^{-4}\cdot\left[\dfrac{4{,}00\cdot 4{,}0}{2}\right] = 4{,}00\cdot 10^{-3}$ tm $\rightsquigarrow$

   $\rightsquigarrow u_{c,t} = 4{,}00$ mm

3. $\bar{C}_{A,i} = 2{,}00$ t↑ , $W_A = 3$ cm↓

   $\bar{1}\cdot u_{c,w} = \bar{C}_{A,i}\cdot W_A = 2{,}00\cdot 3 = 6{,}00$ tcm $\rightsquigarrow$

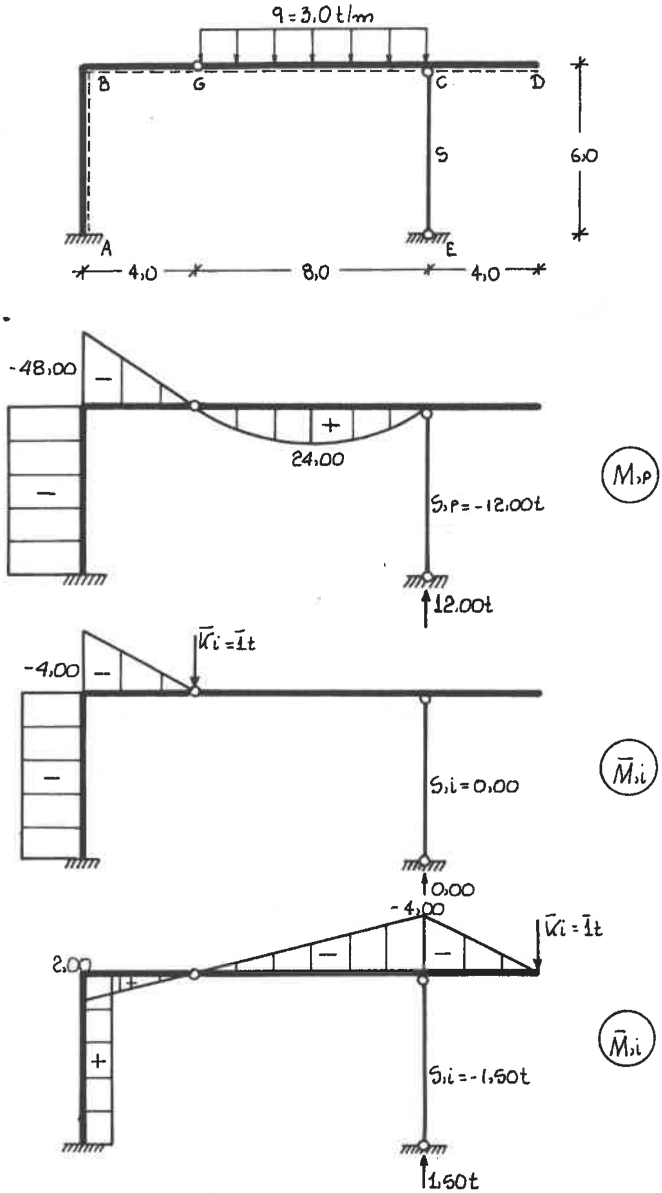
   $\rightsquigarrow u_{c,w} = 6{,}00$ cm

<u>Παράδειγμα 35:</u> Ζητοῦνται οἱ βυθίσεις u_G, u_D τοῦ φορέα τοῦ σχ. 6.10 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. ἐξωτερική φόρτιση
2. ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t = 30°C$ στό ζύγωμα GC.
3. διαφορά συναρμογῆς $\Delta\ell = 2$ cm στή ράβδο
4. ὑποχώρηση τῆς στήριξης E κατά $W_E = 1$ cm↓

Δίνονται: $EJ = 2{,}1\cdot 10^4$ tm^2 , $E_T F_T = 2{,}1\cdot 10^4$ t

$a_t = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ grad^{-1} , $h = 0{,}60$ m


q=3,0 t/m
B
G
C
D
S
6,0
A
E
4,0
8,0
4,0
-48,00
24,00
M,P
S,P=-12,00t
12,00t
-4,00
K̄i=1̄t
M̄,i
S,i=0,00
0,00
-4,00
2,00
K̄i=1̄t
M̄,i
S,i=-1,50t
1,50t

Σχήμα 6.10

$\frac{EJ}{E_T F_T} = \frac{2{,}1 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^4} = 1{,}00\, m^2$, $\frac{\alpha_t \Delta t}{h} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 30}{0{,}50} = 7{,}2 \cdot 10^{-4}\, m^{-1}$

Βύθισn u_G

1. $\bar{1} \cdot u_{G,P} = \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_{,i} M_{,P} ds + \bar{S}_{,i} S_{,P} \frac{\ell}{E_T F_T} \rightsquigarrow EJ\, u_{G,P} = \int \bar{M}_{,i} M_{,P} ds + \frac{EJ}{E_T F_T} \bar{S}_{,i} S_{,P} \ell =$

$\left[6{,}0 \cdot [(-4{,}00) \cdot (-48{,}00)] + 4{,}0 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot (-48{,}00)\right]\right] + 1{,}00\, [0{,}00 \cdot (-12{,}00) \cdot 6{,}0] =$

$= 1408\ tm^3 \rightarrow u_{G,P} = 0{,}067 m = 6{,}7 cm$

2. $\bar{1} \cdot u_{G,t} = \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \int_{GC} \bar{M}_{,i}\, ds = \emptyset$

3. $\bar{1} \cdot u_{G,z} = \bar{S}_{,i} \cdot \Delta \ell = \emptyset$

4. $\bar{1} \cdot u_{G,w} = \bar{C}_{E,i} \cdot W_E = \emptyset$

Βύθισn u_D

1. $EJ\, u_{D,P} = \left[6{,}0 \cdot 2{,}00 (-48{,}00) + 4{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}00 (-48{,}00) + 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot 24{,}00\right] +$

$+ 1{,}00 \cdot (-1{,}50) \cdot (-12{,}00) \cdot 6{,}0 = -960 + 108 \rightsquigarrow u_{D,P} = -0{,}046 + 0{,}005 = -0{,}041 m = -4{,}1 cm$

2. $u_{D,t} = 7{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot \left[\frac{(-4{,}00) \cdot 8{,}0}{2}\right] = -0{,}012 m = -1{,}2 cm$

3. $u_{D,z} = (-1{,}50) \cdot 2 = -3{,}00\, cm$

4. $u_{D,w} = 1{,}50 \cdot 1 = 1{,}50 cm$

Παράδειγμα 36: Ζητεῖται ἡ βύθισn u_G τῆς ἐνισχυμένης δοκοῦ τοῦ σχ. 6.11 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. ἐξωτερική φόρτιση
2. ὑποχώρηση τῆς στήριξης A κατά $W_A = 2cm \downarrow$
3. διαφορά συναρμογῆς $\Delta \ell_3 = -3cm$ στή ράβδο 3.

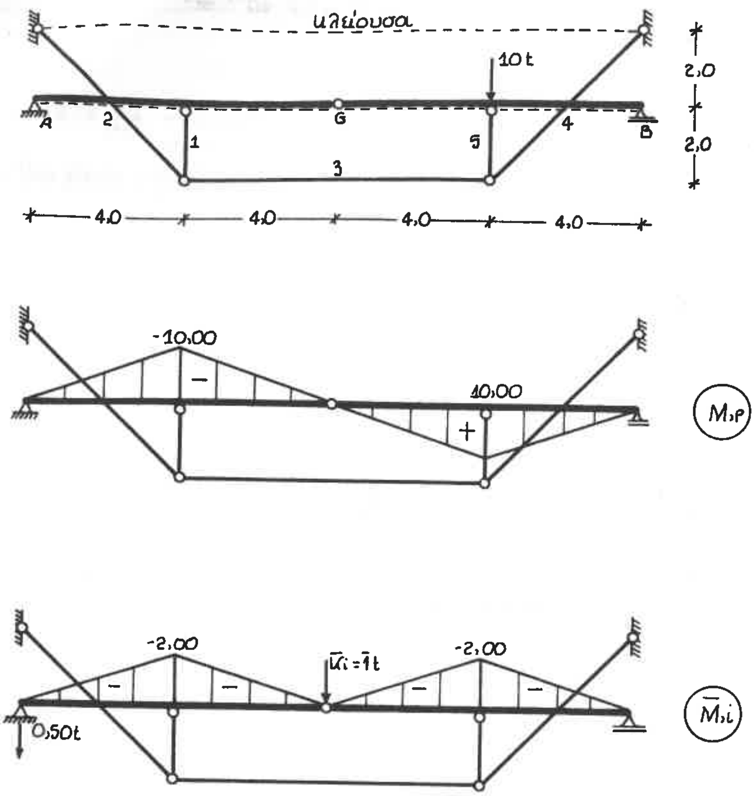
Δίνονται: $EJ = 2{,}1 \cdot 10^4\ tm^2$, $E_T F_T = 4{,}2 \cdot 10^4\ t$

1. $\bar{M}_{,i}$ συμμετρικό, $M_{,P}$ ἀντισυμμετρικό $\rightsquigarrow \int \bar{M}_{,i} M_{,P} ds = \emptyset \rightsquigarrow u_{G,P} = \frac{1}{E_T F_T} \Sigma \bar{S}_{T,i} S_{T,P} \ell_T =$

$= \frac{172{,}84}{4{,}2 \cdot 10^4} = 0{,}004 m = 4 mm$

2. $\bar{C}_{A,i} = 0{,}50\, t \downarrow$, $W_A = 2cm \downarrow \rightsquigarrow u_{G,w} = -(0{,}50 \cdot 2) = -1{,}00\, cm$

3. $u_{G,z} = 1{,}00 \cdot (-3) = -3{,}00\, cm$



Σχήμα 6.11

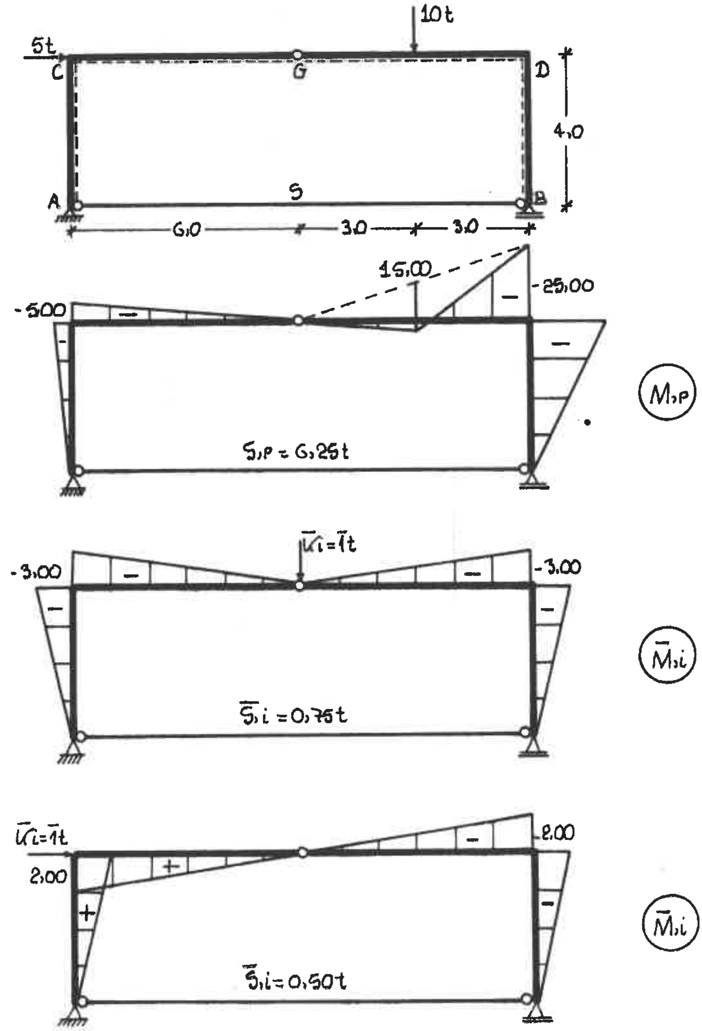
ράβδος	$S_{\tau,P}$	$\overline{S}_{\tau,i}$	l_τ	$S_{\tau,P} \cdot \overline{S}_{\tau,i} \cdot l_\tau$
1	-5,00	-1,00	2,00	10,00
2	7,07	1,41	5,66	56,42
3	5,00	1,00	8,00	40,00
4	7,07	1,41	5,66	56,42
5	-5,00	-1,00	2,00	10,00
				$\Sigma = 172,84$

Παράδειγμα 37: Ζητεῖται ἡ κατακόρυφη μετακίνηση τῆς ἄρθρωσης G καί ἡ ὁριζόντια τοῦ σημείου C τοῦ φορέα τοῦ σχ. 6.12 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. ἐξωτερική φόρτιση
2. ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t = 20°C$ στό ζύγωμα CD
3. διαφορά συναρμογῆς $\Delta l = -2cm$ στή ράβδο

Δίνονται: $EJ = 4{,}7 \cdot 10^3\ tm^2$, $E_Z F_Z = 1{,}05 \cdot 10^4\ t$

$\alpha_t = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$, $h = 0{,}30\ m$



Σχήμα 6.12

$\frac{EJ}{E_t F_t} = \frac{4,7\cdot 10^3}{1,05\cdot 10^4} = 0,45\ m^2$, $\frac{a_t \Delta t}{h} = \frac{1,2\cdot 10^{-5}\cdot 20}{0,30} = 8,00\cdot 10^{-4}\ m^{-1}$

1. $EJ\,\delta_{G,P} = \Big[4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3,00)\cdot(-5,00)+6,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3,00)\cdot(-5,00)+6,0\cdot\Big[\frac{1}{3}\cdot(-3,00)\cdot(-25,00)+$
$+\frac{1}{6}\cdot(-3,00)\cdot 15,00\cdot\left(1+\frac{3,0}{6,0}\right)\Big]+4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3,00)\cdot(-25,00)\Big]+0,45\cdot 0,75\cdot 6,25\cdot 12,0 =$
$= 232,50+25,31 \rightsquigarrow \delta_{G,P} = 4,95\cdot 10^{-2}+0,54\cdot 10^{-2} = 5,49\cdot 10^{-2}\ m = 5,49\ cm$

$EJ\,\delta_{C,P} = \Big[4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot 2,00\cdot(-5,00)+6,0\cdot\frac{1}{3}\cdot 2,00\cdot(-5,00)+6,0\cdot\Big[\frac{1}{3}\cdot(-2,00)\cdot(-25,00)+$
$+\frac{1}{6}\cdot(-2,00)\cdot 15,00\left(1+\frac{3,0}{6,0}\right)\Big]+4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2,00)\cdot(-25,00)\Big]+0,45\cdot 0,50\cdot 6,25\cdot 12,0 =$
$= 88,33+16,88 \rightsquigarrow \delta_{C,P} = 1,88\cdot 10^{-2}+0,36\cdot 10^{-2} = 2,24\cdot 10^{-2}\ m = 2,24\ cm$

2. $\delta_{G,t} = 8\cdot 10^{-4}\cdot\left[2\cdot\frac{(-3,00)\cdot 6,0}{2}\right] = -1,44\cdot 10^{-2}\ m = -1,44\ cm$

$\delta_{C,t} = \frac{a_t\Delta t}{h}\int_{CD}\bar{M}_i\,ds = \frac{a_t\Delta t}{h}\left[\int_{CG}\bar{M}_i\,ds+\int_{GD}\bar{M}_i\,ds\right] = \emptyset$

3. $\delta_{G,z} = 0,75\cdot(-2) = -1,50\ cm$

$\delta_{C,z} = 0,50\cdot(-2) = -1,00\ cm$

Παράδειγμα 38: Ζητεῖται ἡ βύθιση τῆς ἄρθρωσης G_2 καί ἡ γωνία τῆς ἀμοιβαίας στροφῆς τῶν διατομῶν στήν ἄρθρωση G_1 τοῦ φορέα τοῦ σχ.6.13 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. ὁμοιόμορφο φορτίο $q=2,0\ t/m$ στό ζύγωμα G_1G_2.
2. ὁμοιόμορφο φορτίο $q=2,0\ t/m$ στά ζυγώματα AC, DB
3. ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t=-15°C$ στό ζύγωμα AB.
4. ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $t=20°C$ στίς ράβδους

Δίνονται: $EJ = 6,4\cdot 10^3\ tm^2$, $J/F_t = 0,40\ m^2$
$a_t = 1,2\cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$, $h=0,50\ m$

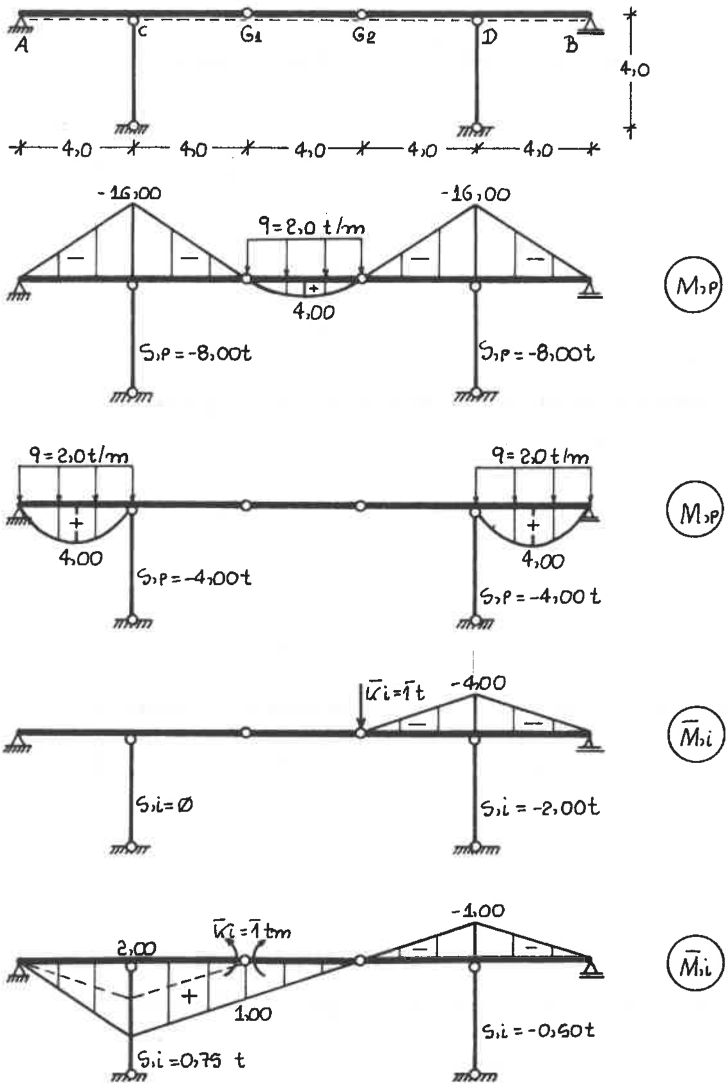
1. $EJ\,u_{G_2,P} = 2,0\cdot 4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4,00)\cdot(-16,00)+0,40\cdot(-2,00)\cdot(-8,00) = 170,67+25,60 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow u_{G_2,P} = 2,67\cdot 10^{-2}+0,40\cdot 10^{-2} = 3,07\cdot 10^{-2}\ m = 3,07\ cm$
$EJ\,\omega_{G_1,P} = 4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot 1,00\cdot(-16,00)+4,0\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,00\cdot(-16,00)+4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot 1,00\cdot 4,00+$
$+0,40\cdot 4,0\cdot\left[0,75\cdot(-8,00)+(-0,50)\cdot(-8,00)\right] = -48,00-3,20 \rightsquigarrow \omega_{G_1,P} = -7,50\cdot 10^{-3}-$
$-0,50\cdot 10^{-3} = -8,00\cdot 10^{-3}\ rad$

2. $EJ\,u_{G_2,P} = 4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4,00)\cdot 4,00+0,40\cdot(-2,00)\cdot(-4,00) = -21,33+12,80 = -0,33\cdot 10^{-2}+$
$+0,20\cdot 10^{-2} = -0,13\cdot 10^{-2}\ m = -1,3\ mm$
$EJ\,\omega_{G_1,P} = 4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot 2,00\cdot 4,00+4,0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1,00)\cdot 4,00+0,40\cdot 4,0\cdot\left[0,75\cdot(-4,00)+(-0,50)\cdot(-4,00)\right] =$
$= 5,33-1,60 \rightsquigarrow \omega_{G_1,P} = 0,83\cdot 10^{-3}-0,25\cdot 10^{-3} = 0,58\cdot 10^{-3}\ rad$

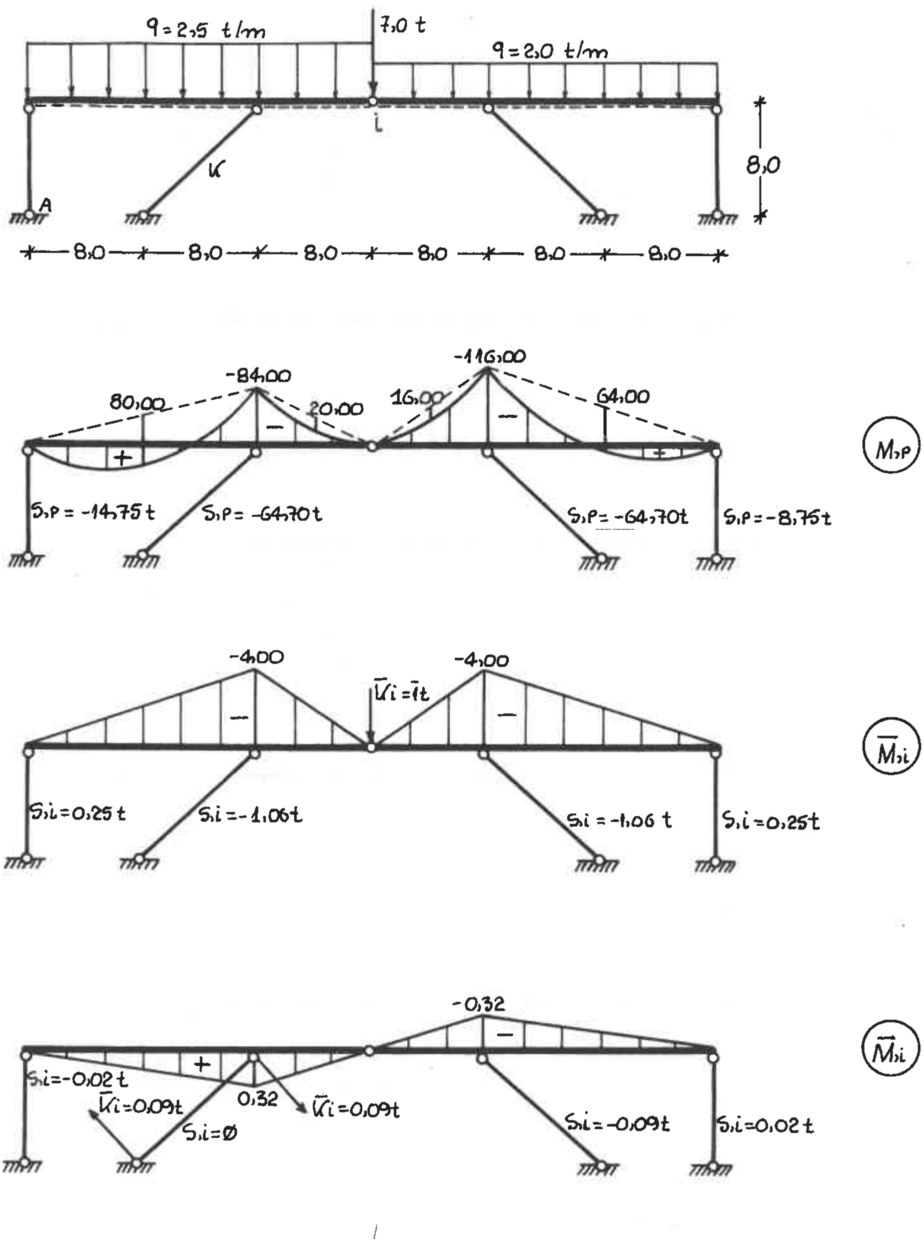
3. $u_{G_2,t} = \frac{1,2\cdot 10^{-5}\cdot(-15)}{0,50}\cdot\left[\frac{(-4,00)\cdot 8,0}{2}\right] = 0,58\cdot 10^{-2}\ m = 5,8\ mm$
$\omega_{G_1,t} = \frac{1,2\cdot 10^{-5}\cdot(-15)}{0,50}\cdot\left[\frac{2,00\cdot 12,0}{2}+\frac{(-1,00)\cdot 8,0}{2}\right] = -2,88\cdot 10^{-3}\ rad$

4. $u_{G_2,t_2} = (-2{,}00) \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 4{,}0 = -1{,}9 \cdot 10^{-3}\ m = -1{,}9\ mm$

$\omega_{G_1,t_2} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 4{,}0\,(0{,}75 - 0{,}50) = 0{,}24 \cdot 10^{-3}\ rad$



Σχημα 6.13


q = 2,5 t/m
7,0 t
q = 2,0 t/m
A
i
K
8,0
8,0 8,0 8,0 8,0 8,0 8,0
-84,00
-116,00
80,00
20,00
16,00
64,00
S,p = -14,75 t
S,p = -64,70 t
S,p = -64,70t
S,p = -8,75t
M,p
-4,00
-4,00
V̄i = 1t
S,i = 0,25 t
S,i = -1,06t
S,i = -1,06 t
S,i = 0,25t
M̄,i
-0,32
S,i = -0,02 t
V̄i = 0,09t
0,32
V̄i = 0,09t
S,i = Ø
S,i = -0,09t
S,i = 0,02 t
M̄,i

Σχήμα 6.14

<u>Παράδειγμα 39</u>: Ζητεῖται ἡ κατακόρυφη μετακίνηση τοῦ σημείου i καί ἡ στροφή τῆς ράβδου k τοῦ φορέα τοῦ σχ. 6.14 γιά τά ἀκόλουθα αἴτια:

1. ἐξωτερική φόρτιση
2. ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t = 35°\,C$ στό ζύγωμα
3. ὑποχώρηση τῆς στήριξης A κατά $W_A = 10\,cm$
4. ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $t = 55°\,C$ στίς ράβδους
5. διαφορά συναρμογῆς $\Delta \ell = 2\,cm$ στήν ράβδο k

Δίνονται: $EJ = 3{,}59 \cdot 10^4\ tm^2$, $E_t F_t = 3{,}15 \cdot 10^4\ t$

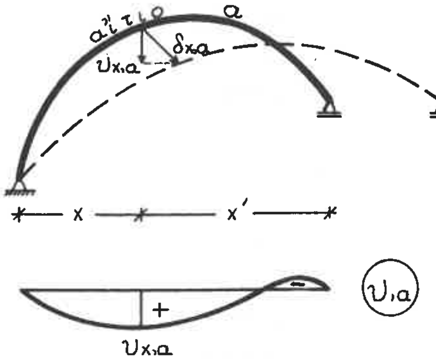
$\alpha_t = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$, $h = 0{,}80\,m$

$$\frac{EJ}{E_t F_t} = \frac{3{,}59 \cdot 10^4}{3{,}15 \cdot 10^4} = 1{,}14\ m^2 \quad , \quad \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 35}{0{,}80} = 5{,}25 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}$$

1. $EJ\,u_{i,P} = 16{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot (80{,}00-84{,}00) + 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot (20{,}00-84{,}00) +$
$+ 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot (16{,}00-116{,}00) + 16{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot (64{,}00-116{,}00) +$
$+ 1{,}14 \cdot [0{,}25 \cdot (-14{,}75) \cdot 8{,}0 + (-1{,}06) \cdot (-64{,}70) \cdot 11{,}31 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot (-8{,}75) \cdot 8{,}0] =$
$= 2944{,}00 + 1714{,}93 \rightsquigarrow u_{i,P} = 8{,}20 \cdot 10^{-2} + 4{,}78 \cdot 10^{-2} = 12{,}98 \cdot 10^{-2}\ m = 12{,}98\ cm$
$EJ\,\omega_{k,P} = 16{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}32 \cdot (80{,}00-84{,}00) + 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}32 \cdot (20{,}00-84{,}00) +$
$+ 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-0{,}32) \cdot (16{,}00-116{,}00) + 16{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-0{,}32) \cdot (64{,}00-116{,}00) +$
$+ 1{,}14 \cdot [(-0{,}02) \cdot (-14{,}75) \cdot 8{,}0 + (-0{,}09) \cdot (-64{,}70) \cdot 11{,}31 + 0{,}02 \cdot (-8{,}75) \cdot 8{,}0] =$
$= 112{,}64 + 76{,}17 \rightsquigarrow \omega_{k,P} = 0{,}31 \cdot 10^{-2} + 0{,}21 \cdot 10^{-2} = 0{,}52 \cdot 10^{-2}\ rad$
2. $u_{i,t} = 5{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot \left[2 \cdot \frac{(-4{,}00) \cdot 24{,}0}{2}\right] = -5{,}04 \cdot 10^{-2}\,m = -5{,}04\,cm$
$\omega_{k,t} = \emptyset$ (τό διάγραμμα $\bar{M}_i$ εἶναι ἀντισυμμετρικό)
3. $u_{i,w} = -(0{,}25 \cdot 10) = -2{,}50\ cm$
$\omega_{k,w} = 0{,}02 \cdot (10 \cdot 10^{-2}) = 0{,}20 \cdot 10^{-2}\ rad$
4. $u_{i,tz} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot [0{,}25 \cdot 8{,}0 \cdot 2 + (-1{,}06) \cdot 11{,}31 \cdot 2] = -1{,}32 \cdot 10^{-2}\,m = -1{,}32\ cm$
$\omega_{k,tz} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot [(-0{,}02) \cdot 8{,}0 + (-0{,}09) \cdot 11{,}31 + 0{,}02 \cdot 8{,}0] = -0{,}07 \cdot 10^{-2}\ rad$
5. $u_{i,z} = (-1{,}06) \cdot 2 = -2{,}12\ cm$
$\omega_{k,z} = \emptyset$ $(S_{k,i} = \emptyset)$

7. Η ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

7.1 Τὰ ἐλαστικὰ φορτία



Σχῆμα 7,1

Ἐλαστικὴ γραμμὴ υ,a ὀνομάζουμε τὴ γραμμὴ τῶν κατακόρυφων μετακινήσεων τῶν σημείων τοῦ ἄξονα τοῦ φορέα ποὺ παραμορφώνεται κάτω ἀπὸ τὴν ἐπιρροὴ τοῦ αἴτιου α (σχ. 7.1).

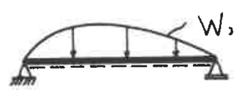
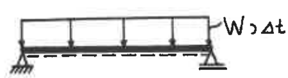
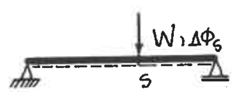
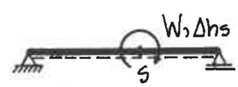
Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς υ,a γίνεται μὲ τὴ μέθοδο τῶν ἐλαστικῶν φορτίων ποὺ βασίζεται στὴν πρόταση τοῦ Mohr, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία:

Γιὰ νὰ εὑρεθεῖ ἡ ἐλαστικὴ γραμμὴ υ,a μιᾶς ἀμφιέρειστης δοκοῦ, αὐτὴ πρέπει νὰ φορτιστεῖ μὲ τὸ ἐλαστικὸ φορτίο W,a. Τότε ἡ μὲν γραμμὴ τῶν τεμνουσῶν δυνάμεων $Q(W,a)$ ἔχει σὲ κάθε σημεῖο τεταγμένη ἴση μὲ τὴ γωνία κλίσεως φ,a τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς υ,a, ἡ δὲ γραμμὴ τῶν ροπῶν κάμψης $M(W,a)$ συμπίπτει μὲ τὴ ζητούμενη ἐλαστικὴ γραμμὴ υ,a, δηλαδή:

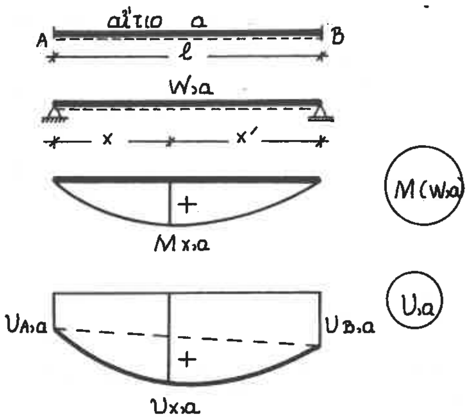
$$\varphi,a = Q(W,a) \quad , \quad \upsilon,a = M(W,a) \qquad (7.1.1)$$

Στὸν πίνακα 7.Ι δίνονται τὰ ἐλαστικὰ φορτία γιὰ διάφορες περιπτώσεις τοῦ αἰτίου α

Ἐλαστικὰ φορτία ἰσοστατικῶν φορέων

1 Ἐξωτερικὴ φόρτιση (p)		$W,p = \dfrac{M,p}{EJ}$
2. Ἀλλαγὴ θερμοκρασίας (Δt)		$W,\Delta t = \dfrac{a_t \Delta t}{h}$
3. Διαφορὲς συναρμογῆς		
a. σφῆνα (ΔΦs)		$W,\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_s$
b. ἅλμα (Δhs)		$W,\Delta h_s = \Delta h_s$
4. Ὑποχώρηση στηρίξεως (W)		$W,w = \emptyset$

Πίνακας 7.Ι



Σχήμα 7.2

Ἄν σέ μία δοκό πού ἀνήκει σέ ἕνα ὁποιοδήποτε φορέα εἶναι γνωστές οἱ βυθίσεις $\upsilon_{A,a}$ καί $\upsilon_{B,a}$ στά ἄκρα ἑνός τμήματός της AB μήκους ℓ τότε ἡ ἐλαστική γραμμή $\upsilon_{,a}$ τοῦ τμήματος AB προκύπτει ἄν μέ ἀφετηρία τήν κλείουσα (εὐθεία γραμμή πού ἐμφανίζει στά ἄκρα τοῦ διαστήματος ℓ τεταγμένες $\upsilon_{A,a}$ καί $\upsilon_{B,a}$) σχεδιάσουμε τήν ἐλαστική γραμμή τῆς ὑποκατάστατης ἀμφιέρειστης δοκοῦ δηλαδή τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης της $M(W_{,a})$:

$$\upsilon_{x,a} = \upsilon_{A,a}\frac{x'}{\ell} + \upsilon_{B,a}\frac{x}{\ell} + M_{x,a} \sim$$

$$\sim \boxed{\begin{gathered}\upsilon_{,a} = \upsilon_{A,a}\,\xi' + \upsilon_{B,a}\,\xi + \upsilon_{,M}\\ \xi = \frac{x}{\ell}\ ,\ \xi' = \frac{x'}{\ell}\end{gathered}} \qquad (7.1.2)$$

Εἰδικά γιά τήν ἐξωτερική φόρτιση ἰσχύει:

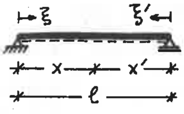
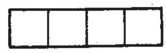
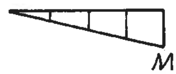
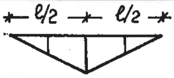
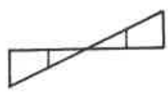
$$W_{,P} = \frac{M_{,P}}{EJ} = -\frac{d^2 M(W_{,P})}{dx^2} = -\frac{d^2 \upsilon_{,P}}{dx^2} \sim \qquad \boxed{\frac{d^2 \upsilon_{,P}}{dx^2} = -\frac{M_{,P}}{EJ}} \qquad (7.1.3)$$

Ἀπ' τήν 7.1.3 συμπεραίνουμε ὅτι:

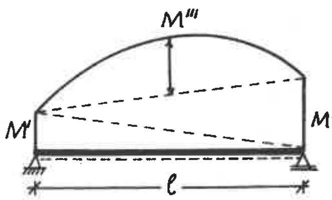
1. ὅπου $M_{,P}=0$, ἡ ἐλαστική γραμμή $\upsilon_{,P}$ θά παρουσιάζει σημεῖο καμπῆς.
2. ὅπου $M_{,P}<0$, ἡ ἐλαστική γραμμή $\upsilon_{,P}$ θά στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω[⌒].
3. ὅπου $M_{,P}>0$, ἡ ἐλαστική γραμμή $\upsilon_{,P}$ θά στρέφει τά κοῖλα πρός τά πάνω[⌣].

7.2 Οἱ συναρτήσεις ω.

Ὁ ὑπολογισμός τῶν τεταγμένων τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς $\upsilon_{,M}$ ἀμφιέρειστης δοκοῦ, πού τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης της $M_{,P}$ εἶναι ὀρθογώνιο, τριγωνικό, παραβολικό ἤ ἄλλου συνήθους σχήματος, μπορεῖ νά γίνει μέ τή βοήθεια τῶν συναρτήσεων ω.
Γενικά ἕνα ὁποιοδήποτε διάγραμμα ροπῶν κάμψης $M_{,P}$ μέ μέγιστη τεταγμένη M δίνει βυθίσεις $\upsilon_{,M}$, πού ὑπολογίζονται βάσει τοῦ τύπου: $\upsilon_{,M} = \frac{\ell^2 M}{kEJ}\,\omega$ (7.2.1)
ὅπου k ἕνας σταθερός συντελεστής πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν μορφή τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν κάμψης. Ὁ ἀδιάστατος ω εἶναι μία συνάρτηση τοῦ λόγου x/ℓ πού ἐξαρτᾶται καί αὐτή μόνο ἀπό τή μορφή τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν κάμψης.
Στόν πίνακα 7.II δίνεται ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς $\upsilon_{,M}$ ἀμφιέρειστης δοκοῦ γιά διάφορες μορφές τοῦ διαγράμματος τῶν ροπῶν κάμψης $M_{,P}$.
Μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα 7.II καί τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας μποροῦν νά ἀντιμετωπιστοῦν καί πιό σύνθετες περιπτώσεις. Τό ἀσύμμετρο παραβολικό π.χ. διάγραμμα ροπῶν κάμψης τοῦ σχήματος 7.3 ἀναλύεται σέ δύο τριγωνικά καί σέ ἕνα συμμετρικό

 $\xi=\frac{x}{\ell}$, $\xi'=\frac{x'}{\ell}$	 M	 M	 M
	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{2EJ}\omega_R$	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{6EJ}\omega_D$	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{6EJ}\omega_D'$
	$\omega_R=\xi-\xi^2$	$\omega_D=\xi-\xi^3$	$\omega_D'=\xi'-\xi'^3$
 M	-M  M	παραβολή 2ου βαθμού  M	παραβολή 2ου βαθμού  M
$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{12EJ}\omega_\Delta$	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{6EJ}\omega_T$	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{3EJ}\omega_{P1}$	$U_{,M}=\frac{\ell^2 M}{12EJ}\omega_{P2}$
$\omega_\Delta=3\xi-4\xi^3$	$\omega_T=\xi-3\xi^2+2\xi^3$	$\omega_{P1}=\xi-2\xi^3+\xi^4$	$\omega_{P2}=\xi-\xi^4$

Πίνακας 7.II



Σχήμα 7.3

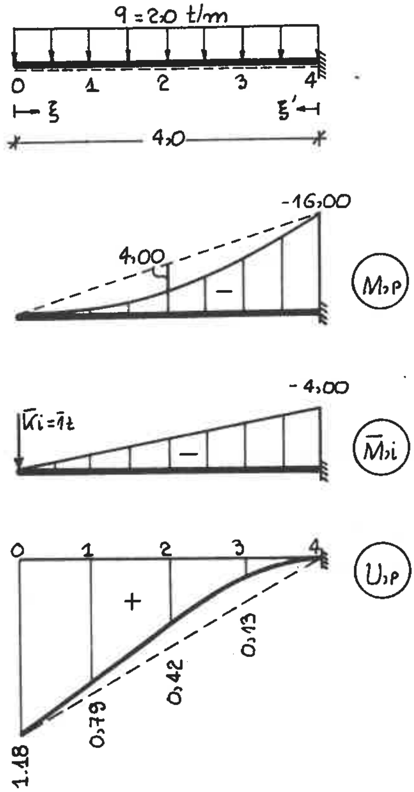
παραβολικό, όπότε ή έξίσωση τής έλαστικής γραμμής λαμβάνει τή μορφή:

$$U_{,M}=\frac{\ell^2 M'}{6EJ}\omega_D'+\frac{\ell^2 M''}{6EJ}\omega_D+\frac{\ell^2 M'''}{3EJ}\omega_{P1} \sim$$

$$\sim U_{,M}=\frac{\ell^2}{6EJ}(M'\omega_D'+M''\omega_D+2M'''\omega_{P1})$$

<u>Παράδειγμα 40</u>: Ζητεΐται ή έλαστική γραμμή $U_{,P}$ τοΰ προβόλου τοΰ σχ. 7.4
Δίνεται: $EJ = 5{,}42\cdot 10^3\ tm^2$

1. Σχεδιάζουμε τό διάγραμμα τών ροπών κάμψης $M_{,P}$.
2. Ύπολογίζουμε τίς βυθίσεις στά χαρακτηριστικά σημεΐα 0 καί 4.
   $EJ\,U_{0,P} = 4{,}0\cdot\frac{1}{4}\cdot(-4{,}00)\cdot(-16{,}00) = 64{,}00\ tm^3 \sim U_{0,P} = 1{,}18\cdot 10^{-2} m = 1{,}18\ cm$
   $U_{4,P} = \emptyset$
3. Μέ τίς βυθίσεις $U_{0,P}$ καί $U_{4,P}$ καθορίζεται ή κλείουσα τής έλαστικής γραμμής U_{P0} πού έμφανίζει τεταγμένες $U_{0,P}\xi' + U_{4,P}\xi$ στή περιοχή 0÷4. Σέ αύτές πρέπει νά προ-



Σχῆμα 7.4

στεθοῦν καί οἱ τεταγμένες τῶν ροπῶν κάμψης τῆς ὑποκατάστατης ἀμφιέρειστης πού φορτίζεται μέ τό ἐλαστικό φορτίο $W_{,P} = \frac{M_{,P}}{EJ}$

$$U_{,P} = U_{0,P}\,\xi' + U_{4,P}\,\xi + U_{,M} = 1{,}18 \cdot 10^{-2} \cdot \xi' + 0 \cdot \xi +$$

$$+ \frac{(4{,}0^2) \cdot (-16{,}00)}{12 \cdot (5{,}42 \cdot 10^3)} \cdot \omega_{P2} \rightsquigarrow U_{,P} = 1{,}18 \cdot \xi' - 0{,}39 \cdot \omega_{P2}$$

(cm)

Οἱ περαιτέρω ὑπολογισμοί γίνονται στόν πίνακα 40.1

i	ξ	ξ'	$1{,}18 \cdot \xi'$	ω_{P2}	$0{,}39 \cdot \omega_{P2}$	$U_{i,P}$ (cm)
0	0	1,00	1,18	0	0	1,18
1	0,25	0,75	0,89	0,25	0,10	0,79
2	0,50	0,50	0,59	0,44	0,17	0,42
3	0,75	0,25	0,30	0,43	0,17	0,13
4	100	0	0	0	0	0

Πίνακας 40.1

<u>Παράδειγμα 41</u>: Ζητεῖται ἡ ἐλαστική γραμμή $U_{,P}$ τῆς μονοπροέχουσας δοκοῦ τοῦ σχ. 7.5. Δίνεται: $EJ = 3{,}59 \cdot 10^4\ tm^2$

$U_{0,P} = U_{5,P} = \emptyset$

$$EJ\,U_{9,P} = 22{,}0 \cdot \frac{(-8{,}00) \cdot (-8{,}00)}{6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}64} \left[2 \cdot 0{,}64 - 0{,}64^2 - 0{,}64^2\right] = 469{,}33\ tm^3 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow U_{9,P} = 1{,}31 \cdot 10^{-2}\,m = 1{,}31\ cm$$

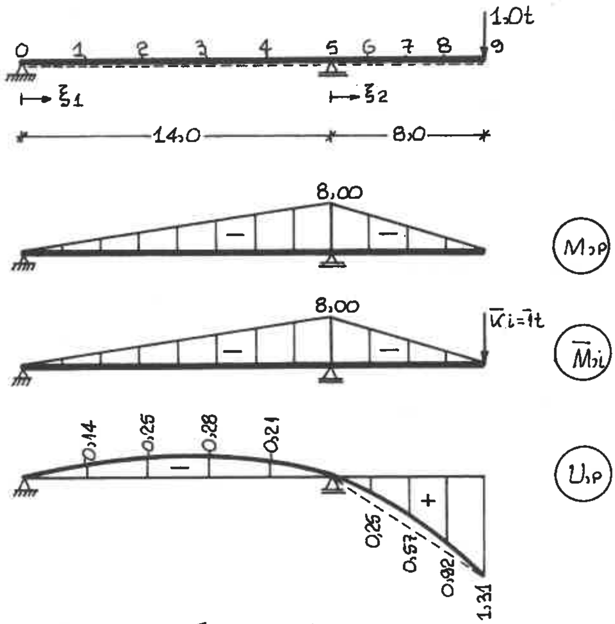
<u>Περιοχή 0÷5</u>

$$U_{i,P} = U_{0,P}\,\xi_1' + U_{5,P}\,\xi_1 + U_{i,M} = \frac{(14{,}0^2)\cdot(-8{,}00)}{6\cdot 3{,}59\cdot 10^4}\cdot \omega_D \sim U_{i,P} = -0{,}73\cdot \omega_D \ (cm)$$

<u>Περιοχή 5÷9</u>

$$U_{i,P} = U_{5,P}\,\xi_2' + U_{9,P}\,\xi_2 + U_{i,M} = 1{,}31\cdot 10^{-2}\cdot \xi_2 + \frac{(8{,}0^2)\cdot(-8{,}00)}{6\cdot 3{,}59\cdot 10^4}\cdot \omega_D' \sim$$

$$\sim U_{i,P} = 1{,}31\cdot \xi_2 - 0{,}24\cdot \omega_D' \ (cm)$$

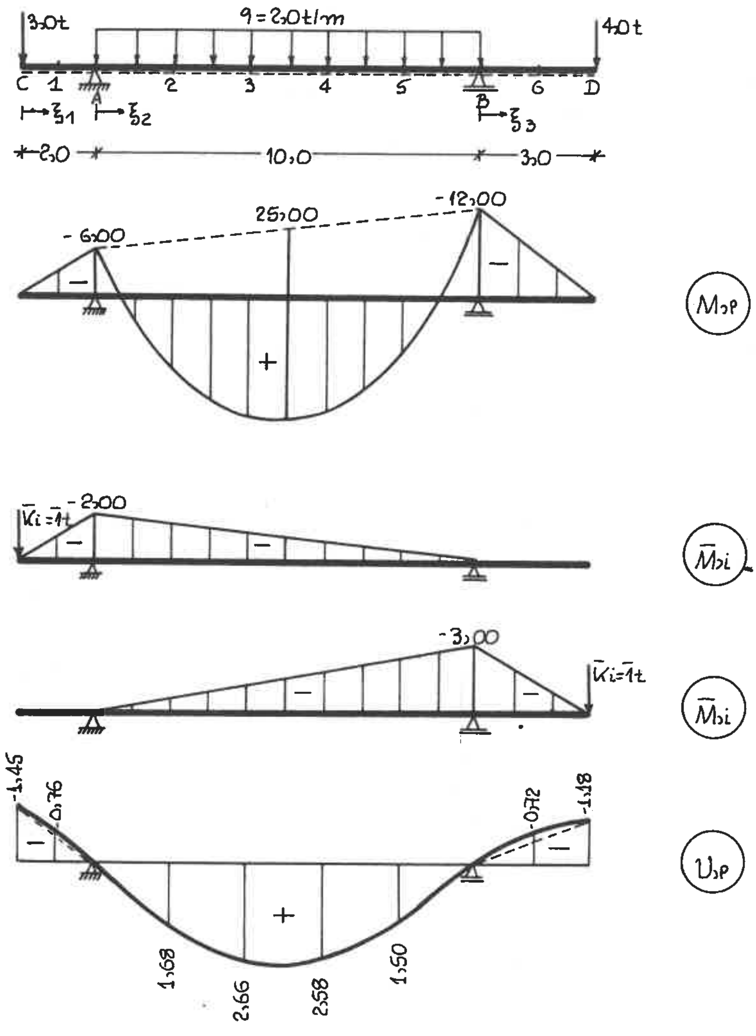


Σχήμα 7.5

i	ξ_1	ξ_1'	$1{,}31\cdot\xi_2$	ω_D	$-0{,}73\cdot\omega_D$	$U_{i,P}$ (cm)
0	0	1,00	−	0	0	0
1	0,20	0,80	−	0,19	−0,14	−0,14
2	0,40	0,60	−	0,34	−0,25	−0,25
3	0,60	0,40	−	0,38	−0,28	−0,28
4	0,80	0,20	−	0,29	−0,21	−0,21
5	1,00	0	0	0	0	0
i	ξ_2	ξ_2'	$1{,}31\cdot\xi_2$	ω_D'	$-0{,}24\cdot\omega_D'$	$U_{i,P}$ (cm)
6	0,25	0,75	0,33	0,33	−0,08	0,25
7	0,50	0,50	0,66	0,38	−0,09	0,57
8	0,75	0,25	0,98	0,23	−0,06	0,92
9	1,00	0	1,31	0	0	1,31

Πίνακας 41.1

Παράδειγμα 42: Ζητείται ή ἐλαστική γραμμή U_P τῆς ἀμφιπροέχουσας δοκοῦ τοῦ σχ. 7.6. Δίνεται: $EJ = 5{,}42\cdot 10^3\ tm^2$



Σχῆμα 7.6

$U_{A,P} = U_{B,P} = 0$

$EJ\,U_{C,P} = 2{,}0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2{,}00)\cdot(-6{,}00) + 10{,}0\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot(-2{,}00)\,\left(2\cdot(-6{,}00)+(-12{,}00)\right) + \frac{1}{3}\cdot(-2{,}00)\cdot 25{,}00\right) = -78{,}67\ tm^3 \rightsquigarrow U_{C,P} = -1{,}45\cdot 10^{-2}\,m = -1{,}45\ cm$

$EJ\,U_{D,P} = 10{,}0\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot(-3{,}00)\cdot\left[(-6{,}00)+2\cdot(-12{,}00)\right] + \frac{1}{3}\cdot(-3{,}00)\cdot 25{,}00\right] + 3{,}0\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3{,}00)\cdot(-12{,}00) = -64{,}00\ tm^3 \rightsquigarrow U_{D,P} = -1{,}18\cdot 10^{-2}\,m = -1{,}18\ cm$

Περιοχή $C \div A$

$U_{,P} = -1{,}45 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_1' + \frac{(2{,}0^2)\cdot(-6{,}00)}{6 \cdot 5{,}42 \cdot 10^3} \cdot \omega_D \rightsquigarrow U_{,P} = -1{,}45 \cdot \xi_1' - 0{,}07 \cdot \omega_D \quad (cm)$

Περιοχή $A \div B$

$U_{,P} = \frac{10{,}0^2}{6 \cdot 5{,}42 \cdot 10^3} \left[(-6{,}00)\cdot \omega_D' + (-12{,}00) \cdot \omega_D + 2 \cdot 25{,}00 \cdot \omega_{P1} \right] \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow U_{,P} = -1{,}85 \cdot \omega_D' - 3{,}69 \cdot \omega_D + 15{,}38 \cdot \omega_{P1} \quad (cm)$

Περιοχή $B \div D$

$U_{,P} = -1{,}18 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_3 + \frac{(3{,}0^2)\cdot(-12{,}00)}{6 \cdot 5{,}42 \cdot 10^3} \cdot \omega_D' \rightsquigarrow U_{,P} = -1{,}18 \cdot \xi_3 - 0{,}33 \cdot \omega_D' \quad (cm)$

i	ξ_1	ξ_1'	$-1{,}45\,\xi_1'$	ω_D	$-0{,}07\cdot\omega_D$	$U_{i,P}$ (cm)
C	0	1,00	-1,45	0	0	-1,45
1	0,50	0,50	-0,73	0,38	-0,03	-0,76
A	1,00	0	0	0	0	0

i	ξ_2	ξ_2'	ω_D'	$-1{,}85\cdot\omega_D'$	ω_D	$-3{,}69\cdot\omega_D$	ω_{P1}	$15{,}38\cdot\omega_{P1}$	$U_{i,P}$ (cm)
2	0,20	0,80	0,29	-0,54	0,19	-0,70	0,19	2,92	1,68
3	0,40	0,60	0,38	-0,70	0,34	-1,25	0,30	4,61	2,66
4	0,60	0,40	0,34	-0,63	0,38	-1,40	0,30	4,61	2,58
5	0,80	0,20	0,19	-0,35	0,29	-1,07	0,19	2,92	1,50
B	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0

i	ξ_3	ξ_3'	$-1{,}18\cdot\xi_3$	ω_D'	$-0{,}33\cdot\omega_D'$	$U_{i,P}$ (cm)
6	0,50	0,50	-0,59	0,38	-0,13	-0,72
D	1,00	0	-1,18	0	0	-1,18

Πίνακας 42.1

Παράδειγμα 43: Ζητεῖται ἡ ἐλαστική γραμμή τῆς ἀρθρωτῆς δοκοῦ τοῦ σχ. 7.7 γιά ὁμοιόμορφη ἀλλαγή θερμοκρασίας κατά $\Delta t = 20°C$.
Δίνονται: $a_t = 10^{-5}$ grad^{-1}, $h = 0{,}80m$

1. Ὑπολογίζουμε τίς βυθίσεις στά χαρακτηριστικά σημεῖα A, B, 6 καί C
2. Ὑπολογίζουμε τό ἐλαστικό φορτίο W_t: $W_t = \frac{a_t \Delta t}{h}$ $(A \div C)$
3. Σχεδιάζουμε τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης $M(W,t)$ στίς ἰσοστατικές ἀμφιέρειστες δοκούς AB, B6 καί 6C. Οἱ τεταγμένες τοῦ διαγράμματος $M(W,t)$ ὑπολογίζονται ἀπ' τόν τύπο: $\boxed{M(W,t) = U_{i,M} = \frac{\ell^2}{2} \cdot W_{,t} \cdot \omega_R \quad , \quad \omega_R = \xi - \xi^2}$

όπου l τό μήκος τῆς ὑποκατάστατης ἀμφιέρειστης δοκοῦ.

4. Ἡ ἐλαστική γραμμή $U_{,t}$ προκύπτει ἄν σέ καθέ ἕνα ἀπό τά τμήματα AB, BG καί GC σχεδιάσουμε μέ ἀφετηρία τή κλείουσα τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης $M(W_{,t})$ τῆς ἀντίστοιχης ὑποκατάστατης ἀμφιέρειστης δοκοῦ.

$\frac{a_t \Delta t}{h} = \frac{10^{-5} \cdot 20}{0{,}80} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\, m^{-1}$

$U_{A,t} = U_{B,t} = U_{C,t} = \emptyset$

$U_{G,t} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{(-4{,}00) \cdot 10{,}0}{2} \right) \rightsquigarrow U_{G,t} = -5{,}0 \cdot 10^{-3}\ m = -5{,}0\ mm$

$W_{,t} = \frac{a_t \Delta t}{h} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} m^{-1}$

<u>Περιοχή A÷B</u>

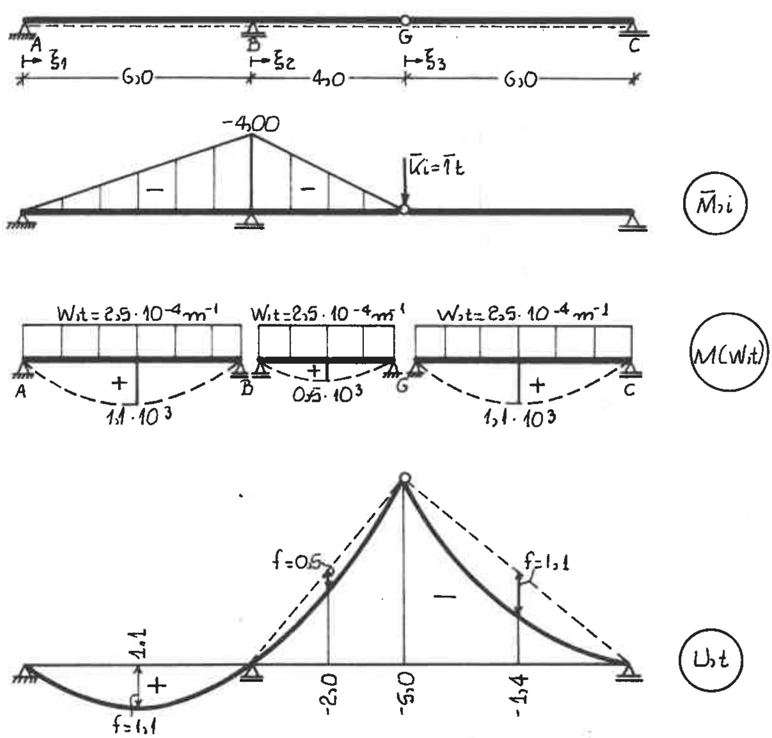
$U_{,t} = \frac{6{,}0^2}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega_R \rightsquigarrow U_{,t} = 4{,}5 \cdot \omega_R \quad (mm)$

<u>Περιοχή B÷G</u>

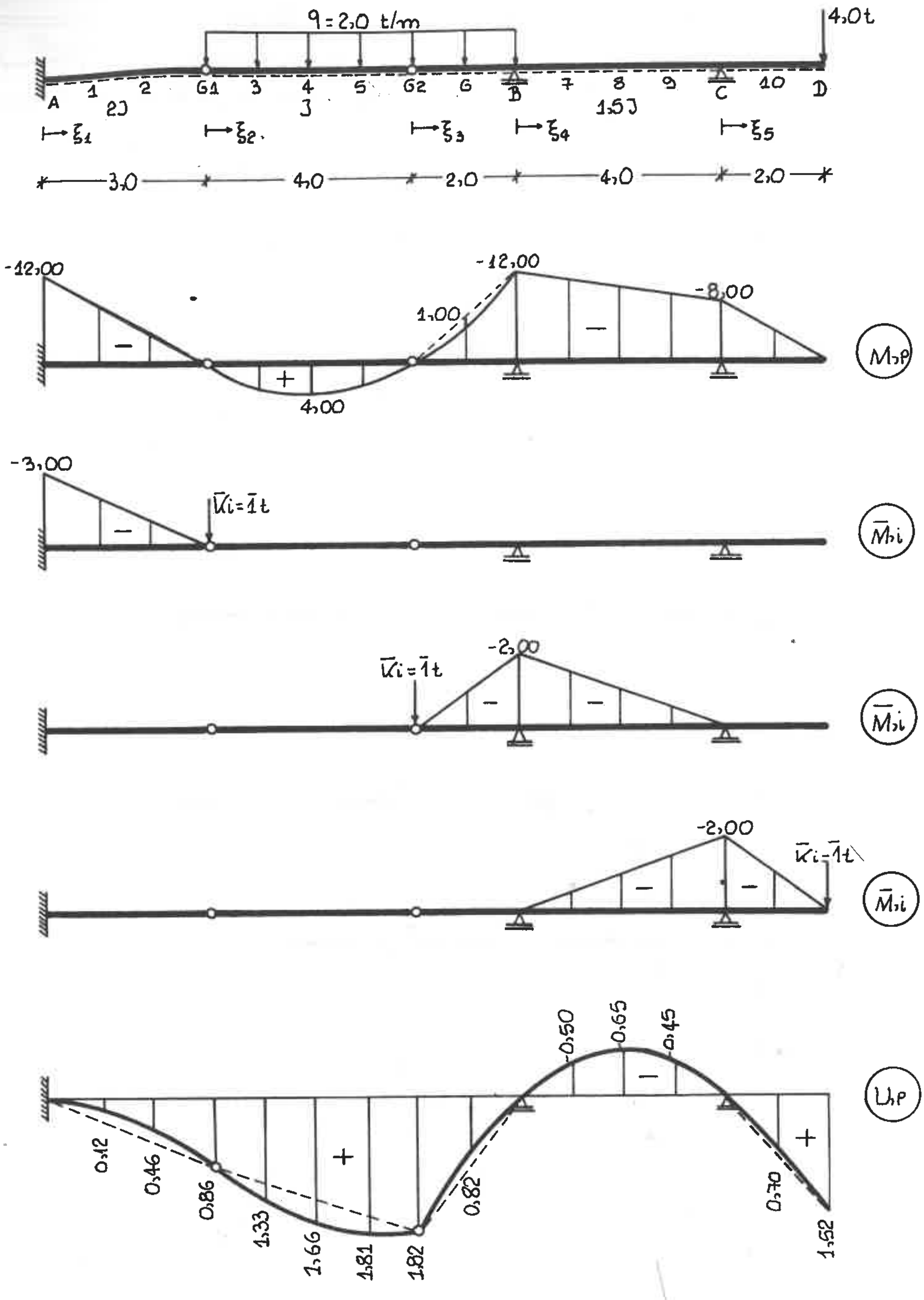
$U_{,t} = -5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \xi_2 + \frac{4{,}0^2}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega_R \rightsquigarrow U_{,t} = -5{,}0\, \xi_2 + 2{,}0 \cdot \omega_R \quad (mm)$

<u>Περιοχή G÷B</u>

$U_{,t} = -5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \xi_3' + \frac{6{,}0^2}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega_R \rightsquigarrow U_{,t} = -5{,}0\, \xi_3' + 4{,}5 \cdot \omega_R \quad (mm)$



Σχῆμα 7.7


q = 2,0 t/m
4,0t
A
1
2
G1
3
4
5
G2
6
B
7
8
9
C
10
D
2J
J
1,5J
ξ1
ξ2
ξ3
ξ4
ξ5
3,0
4,0
2,0
4,0
2,0
-12,00
-12,00
-8,00
1,00
4,00
M,P
-3,00
K̄i=1̄t
M̄,i
-2,00
K̄i=1̄t
M̄,i
-2,00
K̄i=1̄t
M̄,i
0,12
0,46
0,86
1,33
1,66
1,81
1,82
0,82
-0,50
-0,65
-0,45
0,70
1,52
U,P

Σχήμα 7.8

Παράδειγμα 44: Ζητείται ή ἐλαστική γραμμή $U_{,P}$ τῆς ἀρθρωτῆς δοκοῦ τοῦ σχ.7.8
Δίνεται: $EJ = 2100 \ tm^2$.

$EJ\, U_{G1,P} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3{,}00) \cdot (-12{,}00) = 18{,}00\, tm^3 \rightsquigarrow U_{G1,P} = 0{,}86 \cdot 10^{-2} m = 0{,}86\, cm$

$EJ\, U_{G2,P} = \frac{1}{1{,}5} \cdot \left[2{,}0 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-2{,}00) \cdot (-12{,}00) + \frac{1}{3} \cdot (-2{,}00) \cdot 1{,}00\right] + \right.$

$\left. + 4{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2{,}00) \cdot (2 \cdot (-12{,}00) + (-8{,}00))\right] = 38{,}22 \ tm^3 \rightsquigarrow U_{G2,P} = 1{,}82 \cdot 10^{-2} m = 1{,}82 cm$

$EJ\, U_{D,P} = \frac{1}{1{,}5} \cdot \left[4{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2{,}00) \cdot \left[(-12{,}00) + 2 \cdot (-8{,}00)\right] + 2{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2{,}00)(-8{,}00)\right] =$

$= 32{,}00 \ tm^3 \rightsquigarrow U_{D,P} = 1{,}52 \cdot 10^{-2} m = 1{,}52 \ cm$

$U_{A,P} = U_{B,P} = U_{C,P} = \emptyset$

Περιοχή $A \div G1$

$U_{,P} = 0{,}86 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_1 + \frac{(3{,}0^2) \cdot (-12{,}00)}{6 \cdot (2100 \cdot 2)} \cdot \omega_D' \rightsquigarrow U_{,P} = 0{,}86 \cdot \xi_1 - 0{,}43 \cdot \omega_D \quad (cm)$

Περιοχή $G1 \div G2$

$U_{,P} = 0{,}86 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_2' + 1{,}82 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_2 + \frac{(4{,}0^2) \cdot 4{,}00}{3 \cdot (2100 \cdot 1)} \cdot \omega_{P1} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow U_{,P} = 0{,}86 \cdot \xi_2' + 1{,}82 \cdot \xi_2 + 1{,}02 \cdot \omega_{P1} \ (cm)$

Περιοχή $G2 \div B$

$U_{,P} = 1{,}82 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_3' + \frac{2{,}0^2}{6 \cdot (2100 \cdot 1{,}5)} \cdot \left[(-12{,}00) \cdot \omega_D + 2 \cdot 1{,}00 \cdot \omega_{P1}\right] \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow U_{,P} = 1{,}82 \cdot \xi_3' - 0{,}25 \cdot \omega_D + 0{,}04 \cdot \omega_{P1} \quad (cm)$

Περιοχή $B \div C$

$U_{,P} = \frac{4{,}0^2}{6 \cdot (2100 \cdot 1{,}5)} \cdot \left[(-12{,}00) \cdot \omega_D' + (-8{,}00) \cdot \omega_D\right] \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow U_{,P} = -1{,}02 \cdot \omega_D' - 0{,}68 \cdot \omega_D \quad (cm)$

Περιοχή $C \div D$

$U_{,P} = 1{,}52 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_5 + \frac{(2{,}0^2) \cdot (-8{,}00)}{6 \cdot (2100 \cdot 1{,}5)} \cdot \omega_D' \rightsquigarrow U_{,P} = 1{,}52 \cdot \xi_5 - 0{,}17 \cdot \omega_D' \quad (cm)$

i	ξ_1	ξ_1'	$0{,}86 \cdot \xi_1$	ω_D'	$-0{,}43 \cdot \omega_D'$	$U_{i,P}$ (cm)
A	0	1,00	0	0	0	0
1	0,33	0,67	0,28	0,37	−0,16	0,12
2	0,67	0,33	0,58	0,29	−0,12	0,46
G1	1,00	0	0,86	0	0	0,86

i	ξ_2	ξ_2'	$0{,}86\cdot\xi_2'$	$1{,}82\cdot\xi_2$	ω_{P1}	$1{,}02\cdot\omega_{P1}$	$v_{i,P}$ (cm)
3	0,25	0,75	0,65	0,46	0,22	0,22	1,33
4	0,50	0,50	0,43	0,91	0,31	0,32	1,66
5	0,75	0,25	0,22	1,37	0,22	0,22	1,81
G_2	1,00	0	0	1,82	0	0	1,82

i	ξ_3	ξ_3'	$1{,}82\cdot\xi_3'$	ω_D	$-0{,}25\cdot\omega_D$	ω_{P1}	$0{,}04\cdot\omega_{P1}$	$v_{i,P}$ (cm)
G	0,50	0,50	0,91	0,38	-0,10	0,31	0,01	0,82
B	1,00	0	0	0	0	0	0	0

i	ξ_4	ξ_4'	ω_D'	$-1{,}02\cdot\omega_D'$	ω_D	$-0{,}68\cdot\omega_D$	$v_{i,P}$ (cm)
7	0,25	0,75	0,33	-0,34	0,23	-0,16	-0,50
8	0,50	0,50	0,38	-0,39	0,38	-0,26	-0,65
9	0,75	0,25	0,23	-0,23	0,33	-0,22	-0,45
C	1,00	0	0	0	0	0	0

i	ξ_5	ξ_5'	$1{,}52\cdot\xi_5$	ω_D'	$-0{,}17\cdot\omega_D'$	$v_{i,P}$ (cm)
10	0,50	0,50	0,76	0,38	-0,06	0,70
D	1,00	0	1,52	0	0	1,52

Πίνακας 44.1

<u>Παράδειγμα 45:</u> Ζητεῖται ἡ ἐλαστική γραμμή τοῦ φορέα τοῦ σχ. 7.9 γιά τήν διαφορά συναρμογῆς $\Delta l = -2$ cm στή ράβδο K.

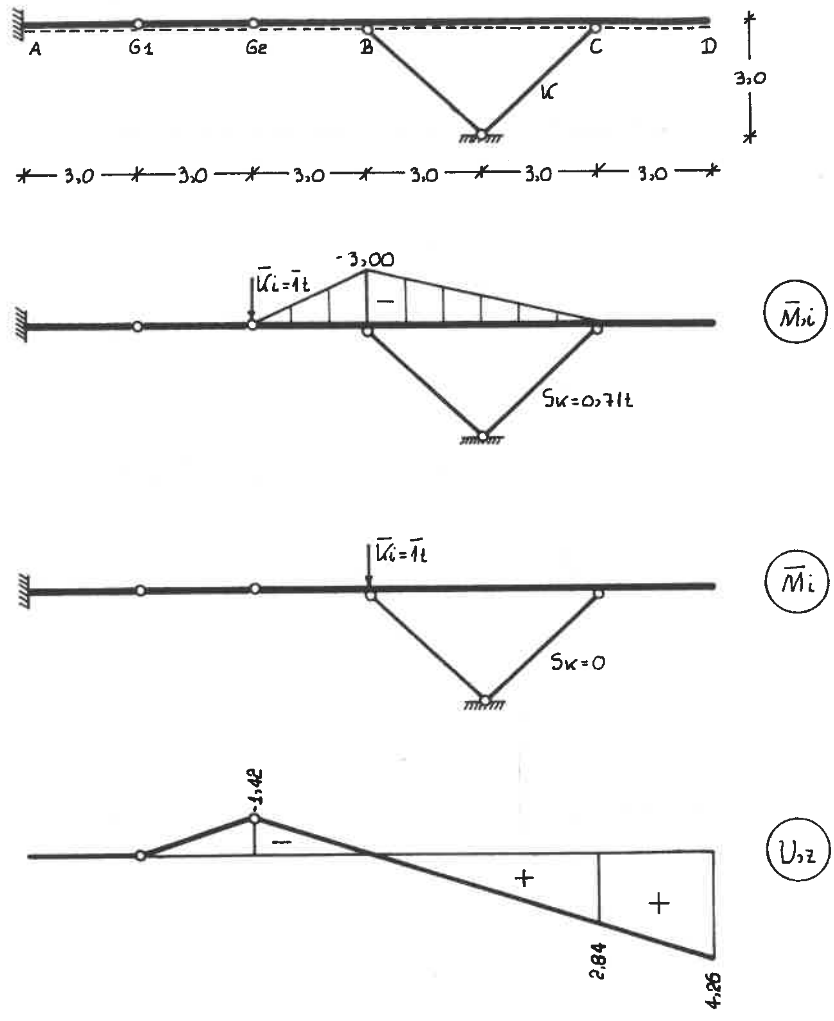
Ἐπειδή μέ τήν κατάλυση τῆς ράβδου K προκύπτει ἕνα μονοκίνητο σύστημα, ἡ διαφορά συναρμογῆς Δl_K προκαλεῖ στίς στηριζόμενες δοκούς G_1G_2 καί G_2D μόνο στροφή ἐνῶ δέν ἔχει καμμία ἐπιρροή στή στηρίζουσα AG_1 $(v_{A,z} = v_{G1,z} = 0)$. Συνεπῶς ἡ ἐλαστική γραμμή $v_{,z}$ εἶναι μία πολυγωνική γραμμή πού προσδιορίζεται ἀπό τήν βύθιση τῆς ἀρθρώσεως G_2 καί ἑνός σημείου, π.χ τοῦ D, τῆς δοκοῦ G_2D.

$$v_{G2,z} = 0{,}71\cdot(-2) = -1{,}42 \text{ cm}$$

$$v_{B,z} = \varnothing$$

$$\frac{v_{C,z}}{v_{G2,z}} = \frac{6{,}0}{3{,}0} \rightsquigarrow v_{C,z} = 2{,}84 \text{ cm}$$

$$\frac{v_{D,z}}{v_{G2,z}} = \frac{9{,}0}{3{,}0} \rightsquigarrow v_{D,z} = 4{,}26 \text{ cm}$$

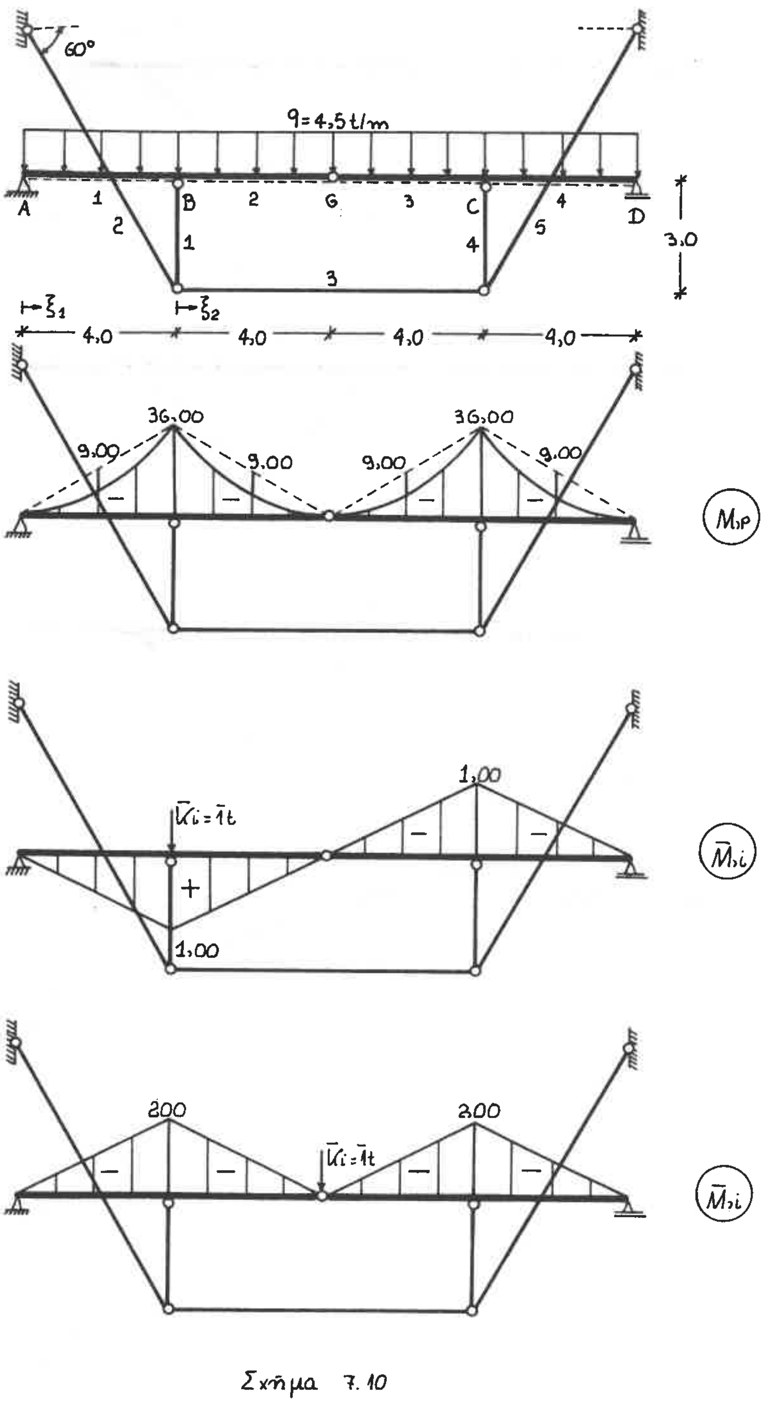


Σχῆμα 7.9

<u>Παράδειγμα 46:</u> Ζητεῖται ἡ ἐλαστικὴ γραμμὴ $v_{,P}$ τῆς ἐνισχυμένης δοκοῦ τοῦ σχ. 7.10

Δίνονται: $EJ = 2{,}1 \cdot 10^4 \ tm^2$, $EJ/E_T F_T = 0{,}29 \ m^2$

Ἡ ἐλαστικὴ γραμμὴ $v_{,P}$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν κατακόρυφο ἄξονα ποὺ περνάει ἀπὸ τὴν ἄρθρωση G (συμμετρικὸς φορέας μὲ συμμετρικὴ φόρτιση) καὶ ἑπομένως γιὰ τὸν προσδιορισμό της ἀπαιτοῦνται μόνο οἱ βυθίσεις $v_{B,P}$, $v_{G,P}$.



60°
q=4,5 t/m
A
B
G
C
D
1
2
3
4
5
3,0
ξ1
ξ2
4,0
4,0
4,0
4,0
36,00
36,00
9,00
9,00
9,00
9,00
M,P
K̄i=1t
1,00
1,00
M̄,i
200
2,00
K̄i=1t
M̄,i

Σχήμα 7.10

ράβδος	$S_{\tau,P}$	$S_{\tau,iB}$	$S_{\tau,iG}$	l_τ	$S_{\tau,P}\,S_{\tau,iB}\,l_\tau$	$S_{\tau,P}\,S_{\tau,iG}\,l_\tau$
1	-36,00	-0,50	-1,00	3,0	54,00	108,00
2	41,57	0,58	1,15	8,0	192,88	382,44
3	20,79	0,29	0,58	8,0	48,23	96,47
4	-36,00	-0,50	-1,00	3,0	54,00	108,00
5	41,57	0,58	1,15	8,0	192,88	382,44
					541,99	1077,35

Πίνακας 46.1

$EJ U_{B,P} = 0 + 0{,}29 \cdot 541{,}99 = 157{,}18\ tm^3 \rightarrow U_{B,P} = 0{,}75 \cdot 10^{-2}\ m = 0{,}75\ cm$

$EJ U_{G,P} = 4 \cdot \left[4{,}0 \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot (-2{,}00) \cdot \left((-36{,}00) + 9{,}00\right)\right]\right] + 0{,}29 \cdot 1077{,}35 = 288{,}00 + 312{,}43 \rightarrow$

$\rightarrow U_{G,P} = 1{,}37 \cdot 10^{-2} + 1{,}49 \cdot 10^{-2} = 2{,}86 \cdot 10^{-2}\ m = 2{,}86\ cm$

<u>Περιοχή A÷B</u>

$U_{,P} = 0{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_1 + \frac{4{,}0^2}{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^4} \cdot \left[(-36{,}00) \cdot \omega_D + 2 \cdot 9{,}00 \cdot \omega_{P1}\right] \rightarrow$

$\rightarrow U_{,P} = 0{,}75 \cdot \xi_1 - 0{,}46 \cdot \omega_D + 0{,}23 \cdot \omega_{P1} \quad (cm)$

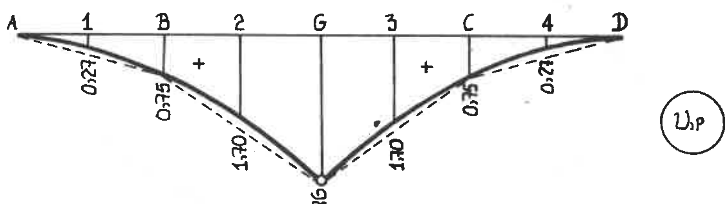
<u>Περιοχή B÷G</u>

$U_{,P} = 0{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_2' + 2{,}86 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_2 + \frac{4{,}0^2}{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^4} \cdot \left[(-36{,}00) \cdot \omega_D' + 2 \cdot 9{,}00 \cdot \omega_{P1}\right] \rightarrow$

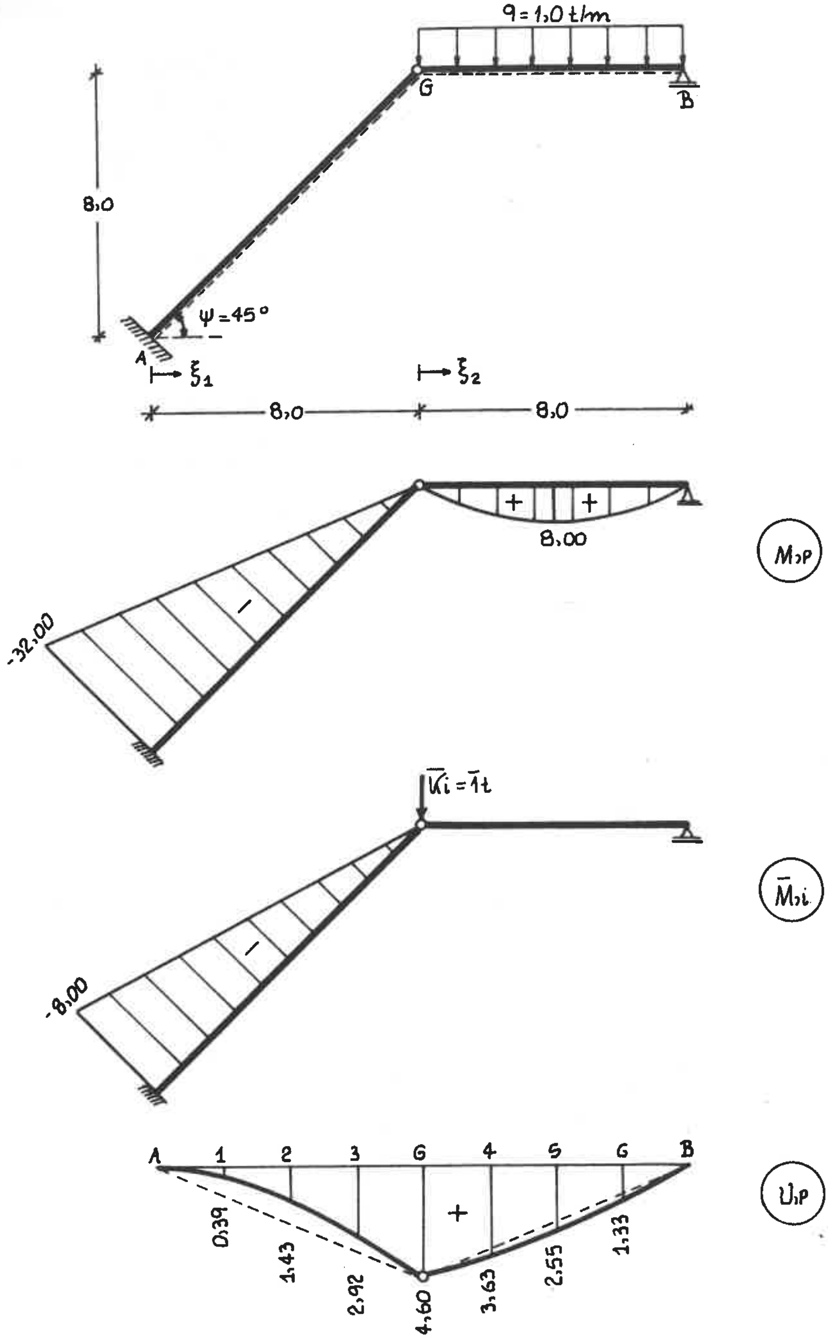
$\rightarrow U_{,P} = 0{,}75 \cdot \xi_2' + 2{,}86 \cdot \xi_2 - 0{,}46 \cdot \omega_D' + 0{,}23 \cdot \omega_{P1} \quad (cm)$

$U_{1,P} = 0{,}75 \cdot 0{,}50 - 0{,}46 \cdot 0{,}38 + 0{,}23 \cdot 0{,}31 = 0{,}27\ cm$

$U_{2,P} = 0{,}75 \cdot 0{,}50 + 2{,}86 \cdot 0{,}50 - 0{,}46 \cdot 0{,}38 + 0{,}23 \cdot 0{,}31 = 1{,}70\ cm$



Σχήμα 7.11



q = 1,0 t/m
G
B
8,0
ψ = 45°
A
ξ1
ξ2
8,0
8,0
+
+
8,00
M,P
-32,00
−
$\bar{V}$i = 1t
$\bar{M}$,i
-8,00
−
A
1
2
3
G
4
5
6
B
+
0,39
1,43
2,92
4,60
3,63
2,55
1,33
U,P

Σχημα 7.12

Παράδειγμα 47: Ζητεῖται ἡ ἐλαστική γραμμή $U_{,P}$ τοῦ φορέα τοῦ σχ. 7.12.
Δίνεται: $EJ = 2{,}1 \cdot 10^4$ tm^2

$$EJ\,U_{G,P} = \left(\frac{8{,}0}{\cos 45°}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-8{,}00) \cdot (-32{,}00) = 965{,}44 \ tm^3 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow U_{G,P} = 4{,}60 \cdot 10^{-2}\, m = 4{,}60\ cm$$

Περιοχή A÷G

Ἡ ἐξίσωση τῆς γραμμῆς τῶν καθέτων στή διεύθυνση AG μετακινήσεων τῆς ὑποκατάστατης ἀμφιέρειστης δοκοῦ AG, εἶναι: $U_{AG,M} = \frac{\ell_{AG}^2 M}{KEJ}\,\omega$ $\quad (K=6\ ,\ M=-32{,}00\ ,\ \omega=\omega_D')$
ἀπό τήν ὁποία προκύπτει ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς $U_{,M}$ στή περιοχή A÷G:

$$U_{,M} = U_{AG,M}\cos\psi = \left[\frac{(\ell/\cos\psi)^2 M}{KEJ}\,\omega\right]\cos\psi \rightsquigarrow \boxed{U_{,M} = \frac{\ell^2 M}{KEJ\cos\psi}\,\omega}$$

ὅπου ℓ ἡ ὁριζόντια προβολή τοῦ ℓ_{AG}.

$$U_{,P} = 4{,}60 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_1 + \frac{8{,}0^2 \cdot (-32{,}00)}{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^4 \cdot \cos 45°} \cdot \omega_D' \rightsquigarrow U_{,P} = 4{,}60 \cdot \xi_1 - 2{,}30 \cdot \omega_D' \quad (cm)$$

Περιοχή G÷B

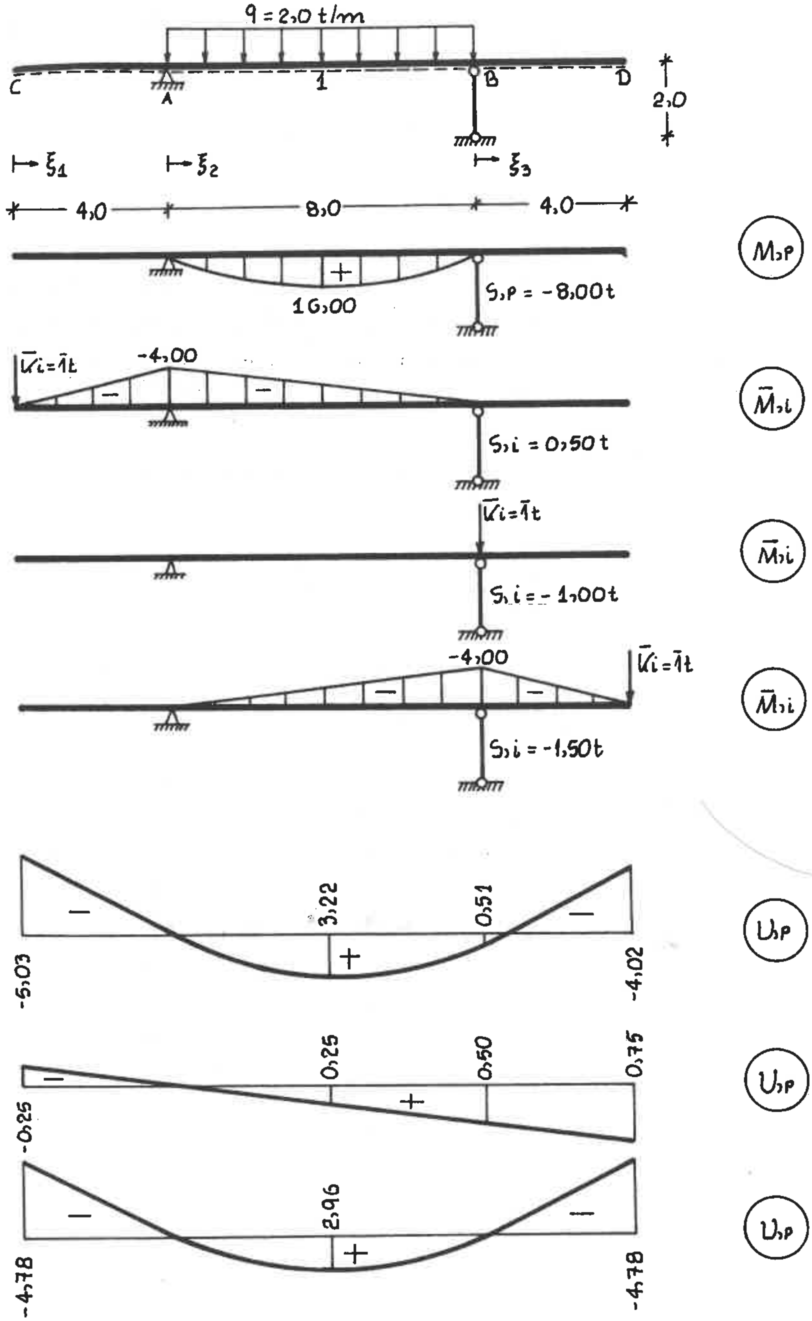
$$U_{,P} = 4{,}60 \cdot 10^{-2} \cdot \xi_2' + \frac{8{,}0^2 \cdot 8{,}00}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^4} \cdot \omega_{P1} \rightsquigarrow U_{,P} = 4{,}60 \cdot \xi_2' + 0{,}81 \cdot \omega_{P1} \quad (cm)$$

i	ξ_1	ξ_1'	$4{,}60 \cdot \xi_1$	ω_D'	$-2{,}30 \cdot \omega_D'$	$U_{i,P}$ (cm)
A	0	1,00	0	0	0	0
1	0,25	0,75	1,15	0,33	0,76	0,39
2	0,50	0,50	2,30	0,38	0,87	1,43
3	0,75	0,25	3,45	0,23	0,53	2,92
G	1,00	0	4,60	0	0	4,60
i	ξ_2	ξ_2'	$4{,}60 \cdot \xi_2'$	ω_{P1}	$0{,}81 \cdot \omega_{P1}$	$U_{i,P}$ (cm)
4	0,25	0,75	3,45	0,22	0,18	3,63
5	0,50	0,50	2,30	0,31	0,25	2,55
6	0,75	0,25	1,15	0,22	0,18	1,33
B	1,00	0	0	0	0	0

Πίνακας 47.1

Παράδειγμα 48: Ζητεῖται ἡ ἐλαστική γραμμή $U_{,P}$ τοῦ φορέα τοῦ σχ. 7.13 γιά τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1. $EJ = 3{,}57 \cdot 10^4$ tm^2 , $E_T F_T = 3{,}15 \cdot 10^4 t$
2. $J = J_\infty$ (δοκός ἀπειρουροπῆς ἀδράνειας) , $E_T F_T = 3{,}15 \cdot 10^4 t$
3. $EJ = 3{,}57 \cdot 10^4$ tm^2 , $F_T = F_\infty$ (ράβδος ἀπείρου ἐμβαδοῦ)



q = 2,0 t/m
C
A
1
B
D
2,0
ξ1
ξ2
ξ3
4,0
8,0
4,0
M,P
16,00
S,P = -8,00t
Vi=1t
-4,00
M,i
S,i = 0,50 t
Vi=1t
M,i
S,i = -1,00t
-4,00
Vi=1t
M,i
S,i = -1,50t
3,22
0,51
-5,03
-4,02
U,P
0,25
0,50
0,75
-0,25
U,P
2,96
-4,78
-4,78
U,P

Σχημα 7.13

$$v_{C,P} = \frac{1}{EJ} \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot 16{,}00 + \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot 0{,}50 \cdot (-8{,}00) \cdot 2{,}0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow v_{C,P} = -\frac{1}{EJ} \cdot 170{,}67 - \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot 8{,}00 \quad (m)$$

$$v_{B,P} = 0 + \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot (-1{,}00) \cdot (-8{,}00) \cdot 2{,}0 \rightsquigarrow v_{B,P} = \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot 16{,}00 \quad (m)$$

$$v_{D,P} = \frac{1}{EJ} \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-4{,}00) \cdot 16{,}00 + \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot (-1{,}50) \cdot (-8{,}00) \cdot 2{,}0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow v_{D,P} = -\frac{1}{EJ} \cdot 170{,}67 + \frac{1}{E_\tau F_\tau} \cdot 24{,}00 \quad (m)$$

<u>Περιοχή $C \div A$</u>

$$v_{,P} = v_{C,P} \cdot \xi_1'$$

<u>Περιοχή $A \div B$</u>

$$v_{,P} = v_{B,P} \cdot \xi_2 + \frac{8{,}0^2 \cdot 16{,}00}{3 \cdot EJ} \cdot \omega_{P1} \rightsquigarrow v_{,P} = v_{B,P} \cdot \xi_2 + \frac{1}{EJ} \cdot 341{,}33 \cdot \omega_{P1}$$

<u>Περιοχή $B \div D$</u>

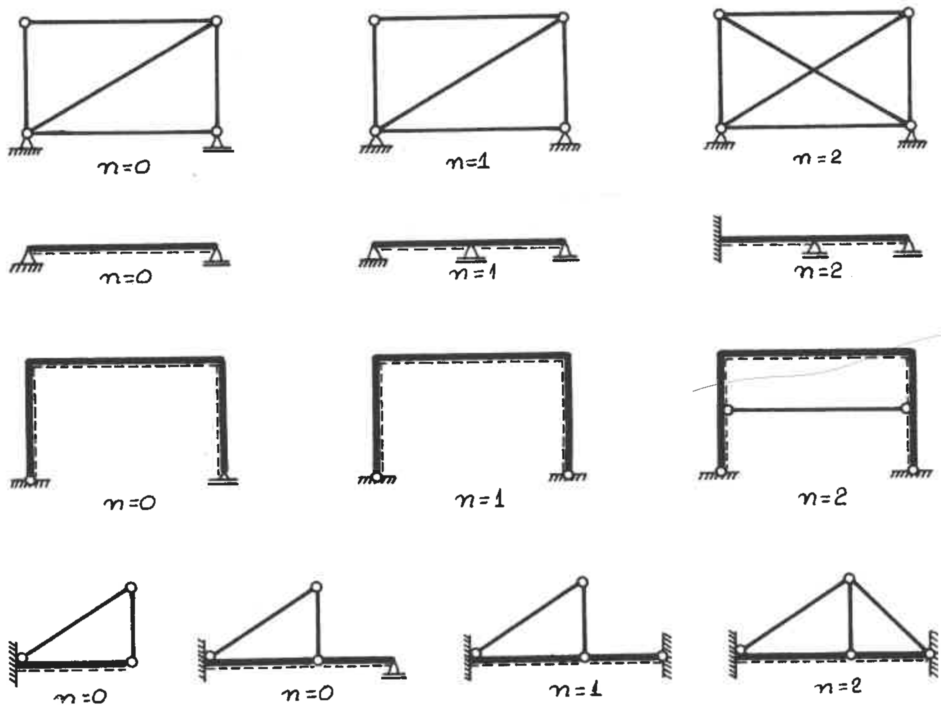
$$v_{,P} = v_{B,P} \cdot \xi_3' + v_{D,P} \cdot \xi_3$$

1. $EJ = 3{,}57 \cdot 10^4 \ tm^2$, $E_\tau F_\tau = 3{,}15 \cdot 10^4 \ t$
   $v_{C,P} = -5{,}03$ mm , $v_{B,P} = 0{,}51$ mm , $v_{D,P} = -4{,}02$ mm
   <u>$C \div A$</u>: $v_{,P} = -5{,}03 \cdot \xi_1'$ (mm)
   <u>$A \div B$</u>: $v_{,P} = 0{,}51 \cdot \xi_2 + 9{,}56 \cdot \omega_{P1}$ (mm) $\rightsquigarrow v_{1,P} = 3{,}22$ mm
   <u>$B \div D$</u>: $v_{,P} = 0{,}51 \cdot \xi_3' - 4{,}02 \cdot \xi_3$ (mm)
2. $J = J_\infty$, $E_\tau F_\tau = 3{,}15 \cdot 10^4 \ t$
   Ἐπειδή ἐδῶ μηδενίζεται ὁ ὅρος $\frac{1}{EJ}\int_{CD} \bar{M}_{,i} M_{,P} ds$, ἡ δοκός CD στρέφεται χωρίς νά παραμορφώνεται. Συνεπῶς ἡ ἐλαστική γραμμή $v_{,P}$ εἶναι μία εὐθεία γραμμή πού γιά τόν προσδιορισμό της ἀπαιτοῦνται οἱ βυθίσεις δύο σημείων τῆς δοκοῦ CD.
   $v_{C,P} = -0{,}25$ mm , $v_{A,P} = \emptyset$
3. $EJ = 3{,}57 \cdot 10^4 \ tm^2$, $F_\tau = F_\infty$
   $\frac{1}{E_\tau F_\tau} \bar{S}_{\tau,i} S_{\tau,P} \ell_\tau = \bar{S}_{\tau,i} \Delta\ell_{\tau,P} = S_{\tau,P} \Delta\ell_{\tau,i} = \emptyset$, $\Delta\ell_{\tau,\alpha} = \emptyset$.
   $v_{C,P} = -4{,}78$ mm , $v_{B,P} = \emptyset$, $v_{D,P} = -4{,}78$ mm
   <u>$C \div A$</u>: $v_{,P} = -4{,}78 \cdot \xi_1'$ (mm)
   <u>$A \div B$</u>: $v_{,P} = 9{,}56 \cdot \omega_{P1}$ (mm) $\rightsquigarrow v_{1,P} = 2{,}96$ mm
   <u>$B \div D$</u>: $v_{,P} = -4{,}78 \cdot \xi_3$ (mm)

8. ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

8.1. Ὁ βαθμός στατικῆς ἀοριστίας

Ὁ φορέας ὀνομάζεται ὑπερστατικός ἢ στατικῶς ἀόριστος ὅταν ἔχει περισσότερες ράβδους (ἐξωτερικές ἢ ἐσωτερικές) ἀπό αὐτές πού ἀπαιτοῦνται γιά τήν στερεή στήριξή του. Ὁ ἀριθμός n τῶν ἐπί πλέον ράβδων ὀνομάζεται βαθμός στατικῆς ἀοριστίας. Συνεπῶς σέ ἕνα ὑπερστατικό φορέα μέ βαθμό στατικῆς ἀοριστίας n ὑπάρχουν n στατικά ἀόριστα ἢ ὑπεράριθμα μεγέθη. Στή συνέχεια δίνονται μερικά παραδείγματα μόρφωσης καί ὑπολογισμοῦ τοῦ βαθμοῦ στατικῆς ἀοριστίας ὑπερστατικῶν φορέων.



Σχήμα 8.1

Γιά τήν ἐπίλυση ἑνός ὑπερστατικοῦ φορέα ἀπαιτοῦνται τόσες ἐξισώσεις ἐλαστικότητας ὅσα εἶναι τά ὑπεράριθμα μεγέθη. Οἱ δύο βασικές μέθοδοι ἐπίλυσης τῶν ὑπερστατικῶν φορέων εἶναι:

1. ἡ μέθοδος δυνάμεων
2. ἡ μέθοδος μετακινήσεων