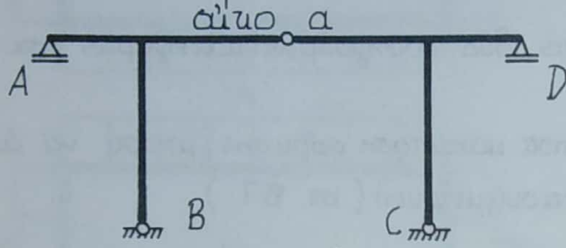
9. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

9.1. Τό ἰσοστατικό κύριο σύστημα

Ὁ ὑπερστατικός φορέας τοῦ σχ 9.1 ἔχει βαθμό στατικῆς ἀοριστίας $n=2$. Αὐτό ἔχει σάν ἀποτέλεσμα ὁ φορέας μας νά ἔχει δύο ὑπεράριθμα μεγέθη. Σάν τέτοια παίρνουμε τίς δύο ἀντιδράσεις στά A καί D πού τίς συμβολίζουμε μέ X_1, X_2 ἀντίστοιχα.



Σχήμα 9.1

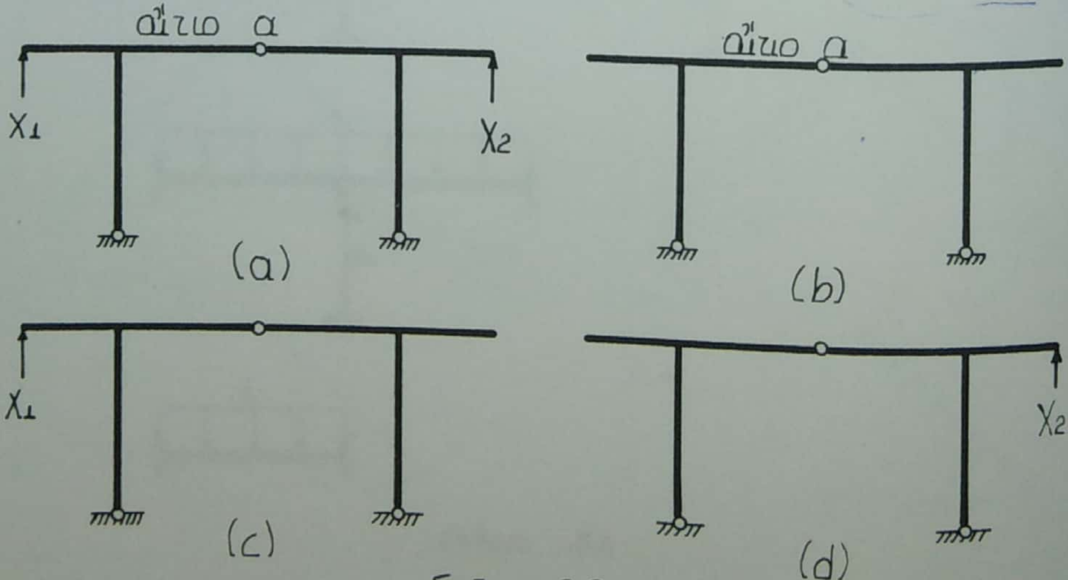
Ἕνα ὁποιοδήποτε μέγεθος ἔντασης ἤ παραμόρφωσης τοῦ ὑπερστατικοῦ μας φορέα $\dot{E}_{s,a}$ (Κάθε μέγεθος τοῦ ὑπερστατικοῦ φορέα συμβολίζεται μέ μία πάνω τελεία) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι προκύπτει ἀπό τήν ἐπαλληλία τῶν ἀκολούθων τριῶν καταστάσεων (σχ. 9.2b - 9.2d ἀντίστοιχα)

i. αἴτιο$=a$, $X_1=\emptyset$, $X_2=\emptyset$: $E_{s,a}$

ii [αἴτιο$=\emptyset$, $X_1=1$, $X_2=\emptyset$: $E_{s,1}$] * X_1

iii [αἴτιο$=\emptyset$, $X_1=\emptyset$, $X_2=1$: $E_{s,2}$] * X_2 ὅπου τά ἐντός παρενθέσεων X_1, X_2 ἀντιστοιχοῦν στίς πραγματικές τιμές τῶν ἀντιδράσεων στά A καί D τοῦ ὑπερστατικοῦ φορέα.

Ὁ φορέας τοῦ σχ. 9.2.a πού προκύπτει ἀπό τόν ἀρχικό ἀφοῦ τμηθοῦν οἱ ὑπεράριθμες ράβδοι καί στίς θέσεις τομῆς τεθοῦν



Σχήμα 9.2.

οί ἀντίστοιχες ἀντιδράσεις λέγεται κύριο ἰσοστατικό σύστημα.
Ἔτσι τό $\dot{E}_{s,a}$ ἄν ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ἡ πιό πάνω ἀνάλυση τοῦ φορέα θά δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{\dot{E}_{s,a} = E_{s,a} + E_{s,1}\cdot X_1 + E_{s,2}\cdot X_2} \qquad (9.1.1)$$

Τό αἴτιο α μπορεῖ νά εἶναι ἡ ἐξωτερική φόρτιση ἤ κάποιος καταναγκασμός z ἤ ἀκόμα ἕνας συνδυασμός τῶν δύο. Στήν περίπτωση πού ἔχουμε κάποιο καταναγκασμό z ἐάν τό $E_{s,z}$ εἶναι μέγεθος ἔντασης τότε $E_{s,z} = \emptyset$ γιατί οἱ καταναγκασμοί δέν προκαλοῦν ἔνταση στούς ἰσοστατικούς φορεῖς, ὁπότε:

$$\dot{E}_{s,z} = E_{s,1}\cdot X_1 + E_{s,2}\cdot X_2 \qquad (9.1.2)$$

κάτι πού σημαίνει ὅτι ἐκτός ἀπό τή φόρτιση οἱ ὑπερστατικοί φορεῖς μποροῦν νά ὑποστοῦν ἔνταση καί ἀπό τούς καταναγκασμούς.
Στίς θέσεις τώρα τῶν ὑπεραρίθμων μεγεθῶν X_1, X_2 ἀπαραίτητη προϋπόθεση γιά τήν ἰσοτιμία τοῦ κυρίου συστήματος μέ τό ἀρχικό ἐκτός ἀπό τήν προσαγωγή τῶν X_1, X_2, ἀπαιτεῖται καί ὁ μηδενισμός τῶν μετακινήσεων πού ἀπαγόρευαν οἱ δεσμικές ράβδοι ἀπό τήν τομή τῶν ὁποίων προέκυψαν οἱ $X_1 X_2$ θά πρέπει δηλαδή:

$$\boxed{\dot{\delta}_{1,a} = \dot{\delta}_{2,a} = \emptyset} \qquad (9.1.3)$$

Μέ βάση τώρα τήν 9.1.1 ἡ 9.1.3 μετατρέπεται στό σύστημα Σ

$$\left.\begin{aligned} \dot{\delta}_{1,a} &= \delta_{1,a} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = \emptyset \\ \dot{\delta}_{2,a} &= \delta_{2,a} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = \emptyset \end{aligned}\right\}\ \Sigma \qquad (9.1.4)$$

τό ὁποῖο ἀφοῦ λύσουμε παίρνουμε τίς τιμές τῶν ὑπεραρίθμων X_1, X_2, δηλαδή τῶν $\dot{A}$ καί $\dot{D}$ ἀντίστοιχα. Μέ γνωστά τώρα τά X_1, X_2 καί μέ τή βοήθεια τῆς σχέσης 9.1.1 μποροῦμε, νά ὑπολογίσουμε τά διαγράμματα M, Q, N ἤ ὁποιοδήποτε ἄλλο μέγεθος τοῦ ὑπερστατικοῦ φορέα π.χ

$$\dot{M}_{,a} = M_{,a} + M_{,1}\cdot X_1 + M_{,2}\cdot X_2 \qquad (9.1.5)$$

Ἡ ἴδια διαδικασία τώρα μπορεῖ νά ἀκολουθηθεῖ καί γιά ὑπερστατικούς φορεῖς μέ n>2. Αὐτό θά ἔχει σάν ἀποτέλεσμα τό ἀκόλουθο σύστημα:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot X_k + \delta_{i0} = \varnothing \qquad (i=1,\dots,n)} \qquad (9.1.6a)$$

ποὺ σέ μητρωϊκή μορφή γράφεται: $\underline{\Delta}\,\underline{X} + \underline{\delta} = \varnothing$ (9.1.6b)

Τό μητρώο Δ εἶναι συμμετρικό $[\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (9.1.7)$]$ καί θετικά ὡρισμένο. (συντελεστές κυρίας διαγωνίου πάντα μεγαλύτεροι ἀπό τό μηδέν καί $D(\Delta) \neq \varnothing$)

Ἐπίσης ἕνα ὁποιοδήποτε μέγεθος ἔντασης ἤ παραμόρφωσης $\dot{E}_{s,0}$ θά προκύπτει ἀπό τήν ἀντίστοιχη ἐπέκταση τῆς (9.1.1). δηλαδή:

$$\boxed{\dot{E}_{s,0} = E_{s,0} + \sum_{i=1}^{n} E_{s,i} X_i} \qquad (9.1.8)$$

9.2 Στάδια ἐπίλυσης ὑπερστατικῶν φορέων μέ τήν μέθοδο δυνάμεων.

i) Καθορισμός τοῦ βαθμοῦ στατικῆς ἀοριστίας τοῦ φορέα n

ii) Ἐκλογή ὑπεραρίθμων δυνάμεων X_i $(i=1,\dots,n)$ ὥστε τό κύριο σύστημα ποὺ θά προκύψει νά ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:
   a. Ἁπλή λύση
   b. Μή κινητό
   c. Ἡ λειτουργία του νά πλησιάζει αὐτή τοῦ ὑπερστατικοῦ φορέα.

iii) Ἐπίλυση κυρίου συστήματος λόγω:
   a. Ἐξωτερικοῦ αἰτίου
   b. $X_i = $ „1" $(i=1,\dots,n)$

iv) Ὑπολογισμός τῶν δ_{i0}, δ_{ik}, σύμφωνα μέ τόν πίνακα 9.I καί μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα 6.I.

Υπολογισμός μετακινήσεων $\delta_{i,k}$, $\delta_{i,a}$ γιά ισοστατικό κύριο σύστημα

1. $$\delta_{i,k} = \int M_{i,i} M_{i,k} \frac{ds}{EJ} + \sum_r S_{r,i} S_{r,k} \frac{l_r}{EF_r}$$

2. i. Λόγω εξωτερικής φόρτισης

$$\delta_{i,P} = \int M_{i,i} M_{i,P} \frac{ds}{EJ} + \sum_r S_{r,i} S_{r,P} \frac{l_r}{EF_r}$$

ii. Λόγω αλλαγής θερμοκρασίας

$$\delta_{i,\Delta t} = \int M_{i,i} \frac{a \Delta t}{h} ds + \sum_r S_{r,i}\, a t_r l_r$$

iii Λόγω διαφορών συναρμογής

$$\delta_{i,\Delta z} = \sum_s (M_{s,i} \Delta\phi_{s,z} + N_{s,i} \Delta S_{s,z} + Q_{s,i} \Delta h_{s,z}) + \sum_r S_{r,i} \Delta l_{r,z}$$

iv Λόγω υποχώρησης στηρίξεων.

γινόμενα αντίδρασης

$$\delta_{i,w} = \sum_q C_{q,i} W_q$$

Τά γινόμενα $C_{q,i} W_q$ προσημαίνονται σύμφωνα μέ τήν § 6.4.3

Πίνακας 9.Ι

v) Λύση τοῦ συστήματος

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} X_k + \delta_{i,a} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

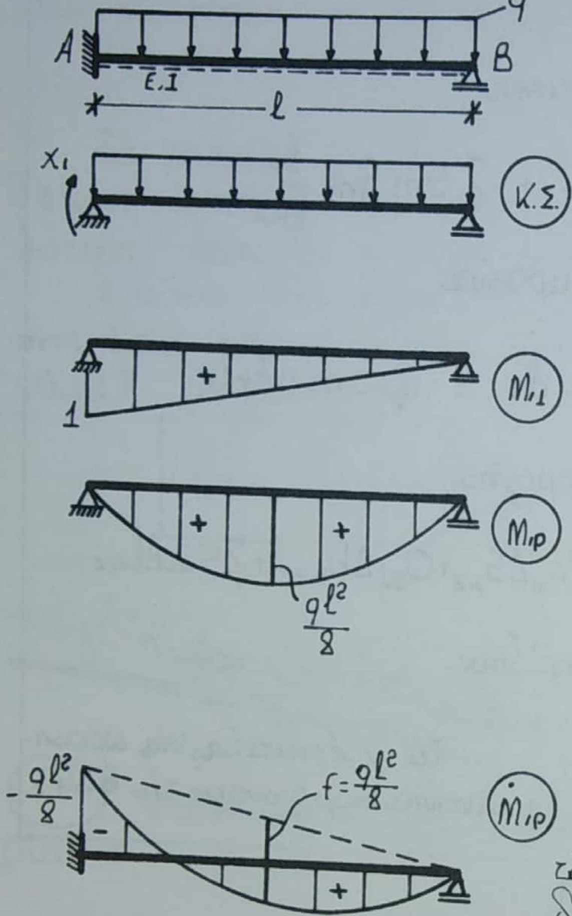
vi) Υπολογισμός έντασης φορέα μέ βάση τόν τύπο

$$\dot{E}_{s,a} = E_{s,a} + \sum_{i=1}^{n} E_{s,i} X_i$$

Εάν τό a είναι καταναγκασμός τότε $E_{s,a} = 0$

$$\delta_{i,w} = 0$$

Παράδειγμα 49. Ζητείται τό διάγραμμα $\dot{M}_{,P}$ τῆς μονόπακτης δοκοῦ, σταθερῆς διατομῆς γιά ἕνα συνεχές φορτίο q (Σχ. 9.3)



Ὁ φορέας εἶναι ὑπερστατικός μία φορά.

Σάν ὑπεράριθμο μέγεθος ἐκλέγεται ἡ M_A.

Τά διαγράμματα $M_{,1}$ καί $M_{,P}$ προκύπτουν πολύ εὔκολα σάν διαγράμματα ροπῶν ἀμφιέρειστης δοκοῦ.

Ὑπολογίζονται στή συνέχεια τά $\delta_{1,1}$ καί $\delta_{1,P}$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3}\, l \cdot 1^2 = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{1,P} = \frac{1}{EI}\, \frac{1}{3}\, l \cdot 1\, \frac{ql^2}{8} = \frac{q\,l^3}{24EI}$$

ὁπότε ἐπιλύω τήν ἐξίσωση

$$\delta_{1,P} + X_1 \delta_{11} = \dot{\delta}_{1,P} = 0 \rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{q\,l^2}{8}}$$

Ἔτσι μέ γνωστή τήν $M_A = X_1$ καί τήν $M_B = 0$ χαράσσεται εὔκολα τό διάγραμμα $\dot{M}_{,P}$.

Σχῆμα 9.3

Παράδειγμα 50. Ζητεῖται τό διάγραμμα $\dot{M}_{,P}$ τῆς ἀμφίπακτης δοκοῦ, σταθερῆς διατομῆς γιά ἕνα συνεχές φορτίο q. (Σχ. 9.4)

Ὁ φορέας ἔχει βαθμό ὑπερστατικότητας $n=3$.

Σάν ὑπεράριθμα μεγέθη ἐκλέγονται τά $M_A: X_1$, $M_B: X_2$ καί ἡ ὁριζόντια ἀντίδραση στό B : X_3.

Ἀπό αὐτά ἡ $X_3 = \varnothing$ ἐπειδή δέν ὑπάρχει ὁριζόντια φόρτιση ὁπότε ὁ φορέας λύνεται σάν νά ἔχει $n=2$

Ἔτσι ὑπολογίζονται πρῶτα τά $M_{,1}$, $M_{,2}$, $M_{,P}$ σάν διαγράμματα ροπών κάμψης αμφι-έρειστης δοκού γιά $X_1 = $"1", $X_2 = $"1". καί λόγω συνεχούς φορτίου q αντί-στοιχα. Στή συνέχεια δέ τά δ_{ik} καί δ_{iP}.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot 1^2 = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot l \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot 1 \cdot q\frac{l^2}{8} = \frac{q\,l^3}{24EI}$$

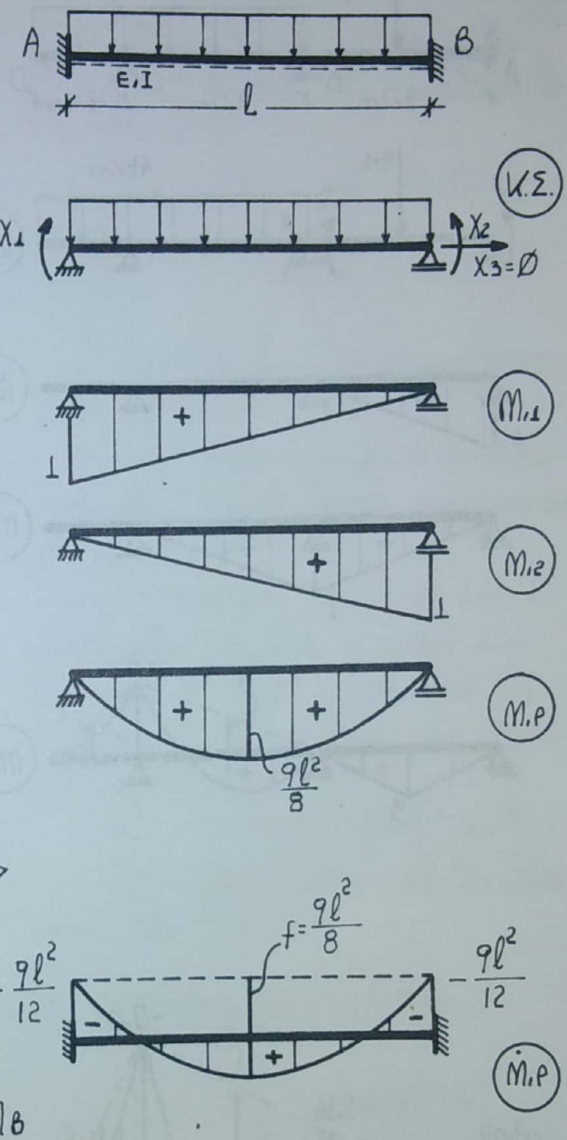
$$\delta_{2P} = \delta_{1P} = \frac{q l^3}{24EI}$$

Έπιλύεται ακολούθως τό σύ-στημα:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 = X_2 = -\frac{q l^2}{12}}$$

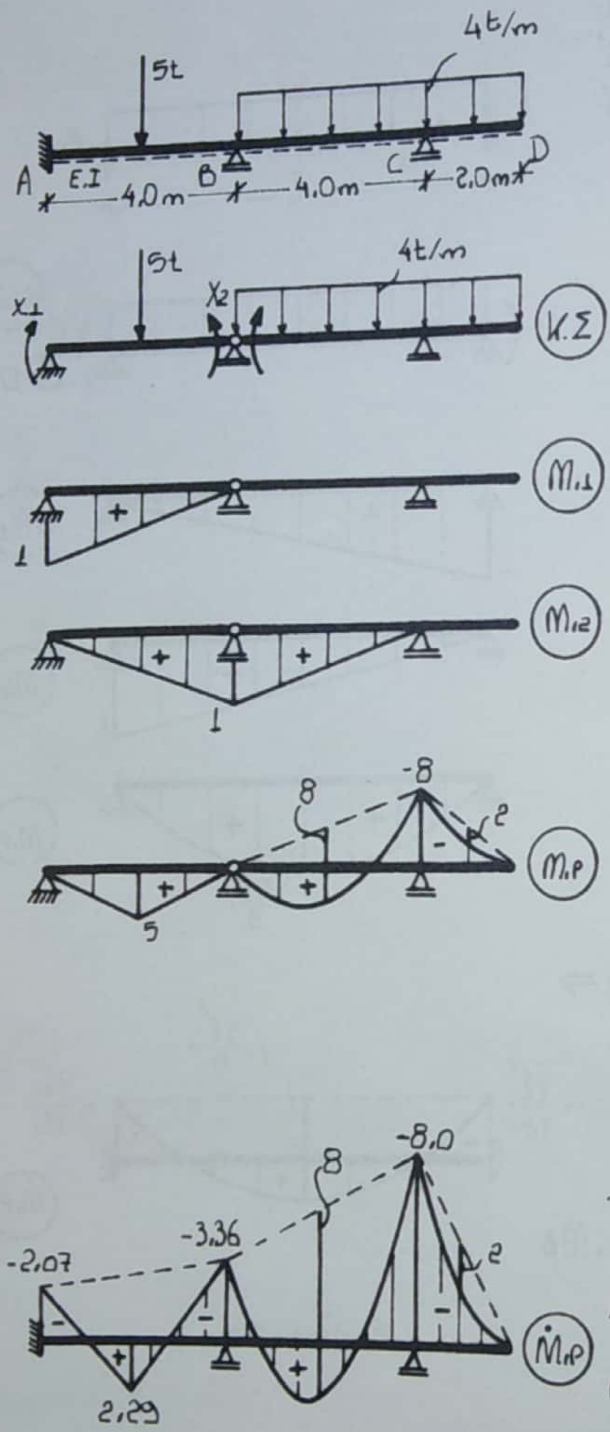
Όπότε μέ γνωστές τίς M_A, M_B χαράσσω εύκολα τό $\dot{M}_{.P}$



Σχήμα 9.4

Παράδειγμα 51. Νά ύπολογισθεί τό διάγραμμα M τού φο-ρέα τού σχ. 9.5. λόγω τής έξωτερικής φόρτισης.

Βαθμός ύπερστατικότητας φορέα $n=2$
Εκλέγονται σάν ύπεράριθμα μεγέθη τά $M_A : X_1$ καί $M_B : X_2$
Επιλύεται τό κύριο σύστημα ι) γιά $X_1 = 1$, ιι) γιά $X_2 = 1$, ιιι) γιά τήν έξωτερική φόρτιση καί λαμβάνω αντίστοιχα τά διαγράμματα M.1, M.2



Σχήμα 9.5

καί M,P.

Υπολογίζονται στή συνέχεια τά δ_{ik}, δ_{iP}

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{3}4\cdot 1^2 = 1{,}33 \ \text{tm}^2\cdot\text{rad}$$

$$EJ\delta_{12} = \frac{1}{6}4\cdot 1\cdot 1 = 0{,}67 \ \text{tm}^2\cdot\text{rad}$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{1}{3}8\cdot 1^2 = 2{,}67 \ \text{tm}^2\cdot\text{rad}$$

$$EJ\delta_{1P} = \frac{1}{6}4\cdot 1\cdot 5(1+0{,}5) = 5 \ \text{tm}^2\cdot\text{rad}$$

$$EJ\delta_{2P} = \frac{1}{6}4\cdot 1\cdot 5(1+0{,}5) + \frac{1}{6}4\cdot 1\cdot(2\cdot 8-8) =$$

$$= 10{,}33 \ \text{tm}^2\cdot\text{rad}$$

καί λύεται τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}33\,X_1 + 0{,}67\,X_2 + 5 = 0 \\ 0{,}67\,X_1 + 2{,}67\,X_2 + 10{,}33 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_1 = -2{,}07 \ \text{tm} \\ X_2 = -3{,}36 \ \text{tm} \end{array}}$$

Ἀκολούθως μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου $\dot{M}_{s,P} = M_{s,P} + X_1 M_{s,1} + X_2 M_{s,2}$ ὑπολογίζονται οἱ τιμές τῆς $\dot{M}_{,P}$ στά A, B, C καί κατασκευάζεται εὔκολα μετά τό $\dot{M}_{,P}$

$$\dot{M}_{A,P} = 0 + (-2{,}07)\cdot 1 + (-3{,}36)\cdot 0 =$$
$$= -2{,}07 \ \text{tm}$$

$$\dot{M}_{B,P} = 0 + (-2{,}07)\cdot 0 + (-3{,}36)\cdot 1 =$$
$$= -3{,}36 \ \text{tm}$$

$$\dot{M}_{C,P} \ -8 + (-2{,}07)\cdot 0 + (-3{,}36)\cdot 0 =$$
$$= -8{,}0 \ \text{tm}$$