

Ανάλυση τριδιάστατης τάσης

ΣΤΟΧΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

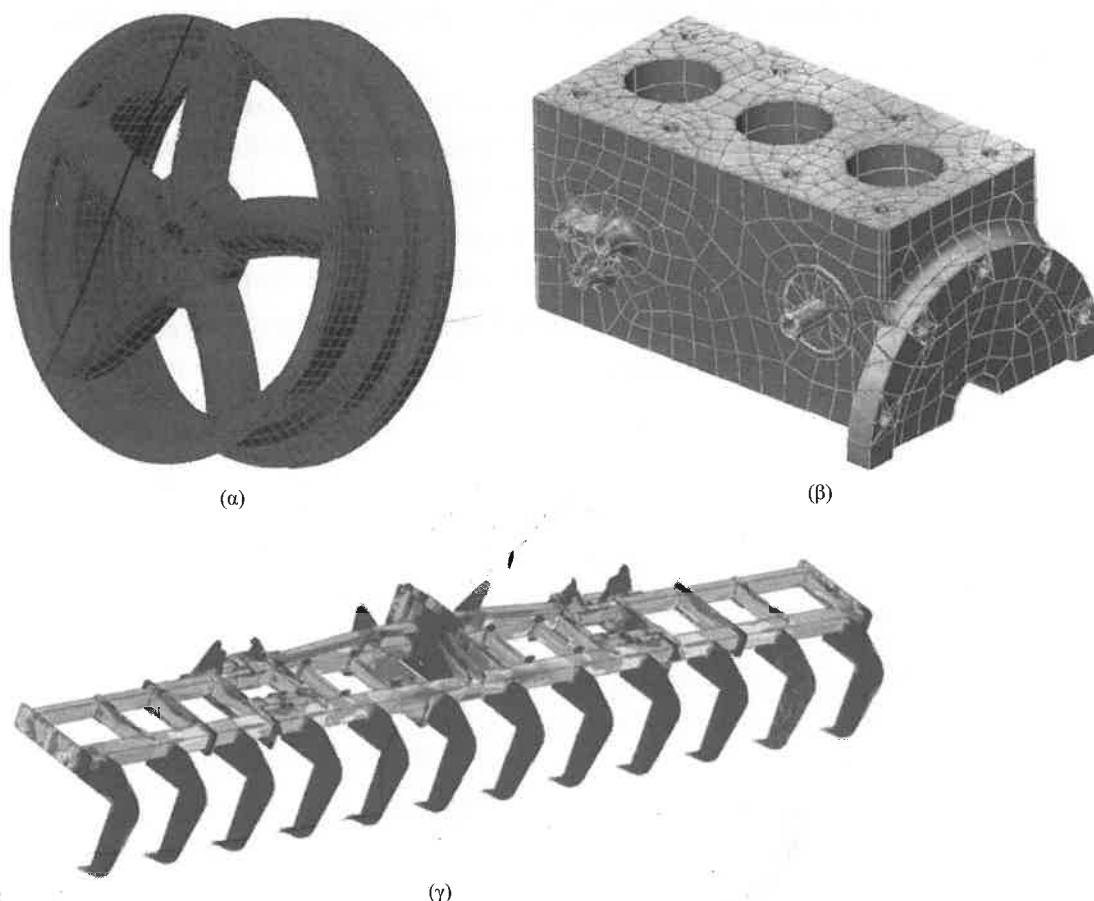
- Να παρουσιάσουμε τις έννοιες της τριδιάστατης τάσης και της τριδιάστατης παραμόρφωσης.
- Να αναπτύξουμε το μητρώο δυσκαμψίας τετραεδρικών στερεών στοιχείων.
- Να περιγράψουμε τον τρόπο χειρισμού των έλξεων σώματος και επιφάνειας.
- Να δείξουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα του μητρώου δυσκαμψίας ενός τετραεδρικού στοιχείου.
- Να περιγράψουμε την ισοπαραμετρική διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας για τριδιάστατα εξαεδρικά στοιχεία (τούβλα — bricks), μεταξύ των οποίων το γραμμικό τούβλο (οκτώ κόμβων) και το τετραγωνικό τούβλο (20 κόμβων).
- Να παρουσιάσουμε ορισμένα παραδείγματα προγραμμάτων του εμπορίου για τριδιάστατα στερεά μοντέλα, καθώς και αποτελέσματα από εφαρμογές του πραγματικού κόσμου.
- Να παρουσιάσουμε μια σύγκριση του τετραεδρικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων, του τετραεδρικού στοιχείου δέκα κόμβων, του τούβλου με οκτώ κόμβους, και του τούβλου με είκοσι κόμβους.

Εισαγωγή

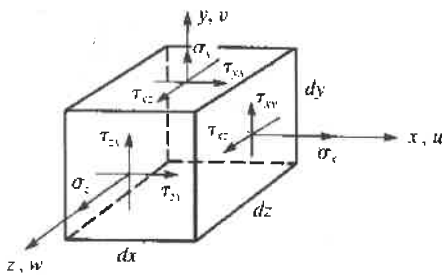
Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το τριδιάστατο, ή στερεό, στοιχείο. Το στοιχείο αυτό είναι χρήσιμο για την ανάλυση τάσης γενικών σωμάτων τριών διαστάσεων που απαιτούν ακριβέστερη ανάλυση απ' ό,τι είναι δυνατή με τη διδιάστατη ή και την αξονοσυμμετρική ανάλυση. Παραδείγματα τριδιάστατων προβλημάτων είναι τα τοξωτά φράγματα, τα δοχεία πίεσης με παχέα τοιχώματα, και τα συμπαγή εξαρτήματα σφυρηλάτησης όπως χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, στις βιομηχανίες βαρέως εξοπλισμού και αυτοκινήτων. Η Εικόνα 11-1 δείχνει μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων ορισμένων τυπικών ανταλλακτικών αυτοκινήτων και ενός αρότρου που χρησιμοποιείται σε γεωργικό εξοπλισμό. Επίσης, δείτε την Εικόνα 1-7 για ένα μοντέλο μήτρας χάλυβα υψηλής αντοχής, την Εικόνα 1-9 για ένα μοντέλο ενός οστού πυέλου με ένα εμφύτευμα, και τις Εικόνες 11-7 έως 11-10 για ένα εξάρτημα σφυρηλάτησης, ένα πηδάλιο, έναν κοτσαδόρο ρυμουλκούμενου, και έναν βραχίονα εναλλάκτη, αντίστοιχα.

Το τετράεδρο είναι το βασικό τριδιάστατο στοιχείο, που χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη των συναρτήσεων σχήματος, του μητρώου δυσκαμψίας, και του μητρώου δύναμης σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθούμε αυτή την ανάπτυξη με την ισοπαραμετρική διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας για το εξαεδρικό στοιχείο, ή «τούβλο» (brick). Τέλος, δίνουμε κάποιες τυπικές τριδιάστατες εφαρμογές.

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου, έχουμε κάποια τριδιάστατα προβλήματα που λύνονται μέσω υπολογιστή.



■ Εικόνα 11-1 (α) Ζάντα τροχού (από Mark Blair) · (β) μπλοκ κινητήρα (από Mark Guard) · και (γ) άροτρο 12 σειρών που χρησιμοποιείται σε γεωργικό εξοπλισμό (από Autodesk, Inc.) [Στο ένθετο θα δείτε την εικόνα στην έγχρωμη έκδοσή της.]



■ Εικόνα 11-2 Τριδιάστατες τάσεις σε ένα στοιχείο

11.1 Τριδιάστατη τάση και παραμόρφωση

Ξεκινούμε εξετάζοντας το τριδιάστατο απειροελάχιστο στοιχείο σε καρτεσιανές συντεταγμένες με διαστάσεις dx , dy , dz και ορθές και διατμητικές τάσεις, όπως φαίνεται στην Εικόνα 11-2. Αυτό το στοιχείο αποτυπώνει βολικά την κατάσταση της τάσης σε τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα ενός σώματος σε κατάσταση τριδιάστατης τάσης. Ως συνήθως, οι ορθές τάσεις είναι κάθετες στις έδρες του στοιχείου και συμβολίζονται με σ_x , σ_y , και σ_z . Οι διατμητικές τάσεις ενεργούν στις έδρες του στοιχείου και συμβολίζονται με τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , και ούτω καθεξής.

Από την ισορροπία ροπών του στοιχείου, δείχνουμε στο Παράρτημα Γ ότι

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Επομένως, υπάρχουν μόνο τρεις ανεξάρτητες διατμητικές τάσεις, μαζί με τις τρεις ορθές τάσεις.

Τις σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης του στοιχείου τις βρίσκουμε στο Παράρτημα Γ. Επαυλαμβάνονται εδώ για ευκολία

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11.1.1)$$

όπου u , v , και w είναι οι μετατοπίσεις στις διευθύνσεις x , y , και z , αντίστοιχα. Οι διατμητικές παραμορφώσεις γ δίνονται τώρα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

όπου, όπως για τις διατμητικές τάσεις, υπάρχουν μόνο τρεις ανεξάρτητες διατμητικές παραμορφώσεις.

Γράφουμε και πάλι τις τάσεις και τις παραμορφώσεις με μητρώα στήλης:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (11.1.3)$$

Οι σχέσεις τάσης/παραμόρφωσης για ένα ισότροπο υλικό δίνονται και πάλι από τη σχέση

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (11.1.4)$$

όπου τα $\{\sigma\}$ και $\{\varepsilon\}$ ορίζονται από τις Εξισώσεις (11.1.3), και το καταστατικό μητρώο $[D]$ (δείτε επίσης το Παράρτημα Γ) δίνεται τώρα από τη σχέση

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11.1.5)$$

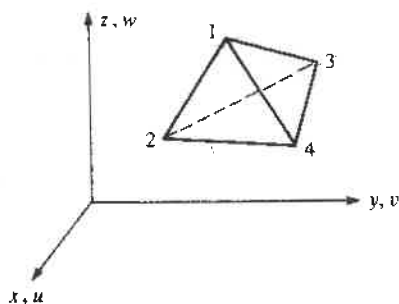
Συμμετρία

11.2 Τετραεδρικό στοιχείο

Τώρα θα αναπτύξουμε το μητρώο δυσκαμψίας του τετραεδρικού στοιχείου, χρησιμοποιώντας και πάλι τα βήματα που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 1. Η ανάπτυξη θεωρείται ως μια επέκταση του επίπεδου στοιχείου που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 6. Αυτή η επέκταση προτάθηκε στις Αναφορές [1] και [2].

Βήμα 1 Επιλέξτε τύπο στοιχείου

Θεωρήστε το τετραεδρικό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 11-3 με τους γωνιακούς κόμβους 1-4. Αυτό το στοιχείο είναι ένα στερεό τεσσάρων κόμβων. Οι κόμβοι του πρέπει να αριθμούνται έτσι ώστε, όταν τους βλέπουμε από τον τελευταίο (π.χ., τον κόμβο 4), οι τρεις πρώτοι κόμβοι να αριθμούνται αριστερόστροφα, όπως 1, 2, 3, 4 ή 2, 3, 1, 4. Αυτή η σειρά των κόμβων αποτρέπει τον υπολογισμό αρνητικών όγκων και είναι συνεπής με την αριστερόστροφη αρίθμηση κόμβων για το στοιχείο CST στο Κεφάλαιο 6. (Η χρήση ισοπαραμετρικής διατύπωσης για τον υπολογισμό του μητρώου $[k]$ για το τετραεδρικό στοιχείο μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε σειρά αρίθμησης των κόμβων του στοιχείου. Την ισοπαραμετρική διατύπωση του $[k]$ την αφήνουμε για την Ενότητα 11.3.) Οι άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων δίνονται τώρα από τη σχέση



■ Εικόνα 11-3 Τετραεδρικό στερεό στοιχείο

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (11.2.1)$$

Επομένως, υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο, ή συνολικά 12 βαθμοί ελευθερίας ανά στοιχείο.

Βήμα 2 Επιλέξτε συναρτήσεις μετατόπισης

Για ένα συμβατό πεδίο μετατόπισης, οι συναρτήσεις μετατόπισης του στοιχείου u , v , και w θα πρέπει να είναι γραμμικές σε κάθε ακμή, επειδή υπάρχουν μόνο δύο σημεία (οι γωνιακοί κόμβοι) σε κάθε ακμή, και να είναι γραμμικές σε κάθε επίπεδη πλευρά του τετραέδρου. Στη συνέχεια επιλέγουμε τις συναρτήσεις γραμμικής μετατόπισης:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v(x, y, z) &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \\ w(x, y, z) &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως στο Κεφάλαιο 6, μπορούμε να εκφράσουμε τα a_i συναρτήσει των γνωστών συντεταγμένων $(x_1, y_1, z_1, \dots, z_4)$ και των άγνωστων μετατοπίσεων $(u_1, v_1, w_1, \dots, w_4)$ των κόμβων του στοιχείου. Παραλείποντας τις απλές, αλλά κουραστικές λεπτομέρειες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = \frac{1}{6V} \{ & (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z) u_1 \\ & + (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z) u_2 \\ & + (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z) u_3 \\ & + (\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z) u_4 \} \end{aligned} \quad (11.2.3)$$

όπου η λ δ ότητα $6V$ λαμβάνεται με υπολογισμό της ορίζουσας

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (11.2.4)$$

και το V αναπαριστά τον όγκο του τετραέδρου. Οι συντελεστές α_i , β_i , γ_i , και δ_i ($i=1, 2, 3, 4$) στην Εξίσωση (11.2.3) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \beta_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ \gamma_1 &= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & \delta_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

και

$$\alpha_2 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(11.2.6)

και

$$\gamma_2 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_3 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(11.2.7)

και

$$\gamma_3 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \delta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_4 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \beta_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(11.2.8)

$$\gamma_4 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Τις εκφράσεις για τα v και w τις παίρνουμε αντικαθιστώντας απλώς όλα τα u_i με v_i και στη συνέχεια όλα τα u_i με w_i στην Εξίσωση (11.2.3).

Η έκφραση της μετατόπισης για το u από την Εξίσωση (11.2.3), με παρόμοιες εκφράσεις για v και w , μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σε αναπτυγμένη μορφή συναρτήσεων των συναρτήσεων σχήματος και των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων, δηλαδή

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (11.2.9)$$

όπου οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$N_1 = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z)}{6V} \quad N_2 = \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z)}{6V}$$

$$N_3 = \frac{(\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z)}{6V} \quad N_4 = \frac{(\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z)}{6V}$$

(11.2.10)

και το ορθογώνιο μητρώο στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (11.2.9) είναι το μητρώο συνάρτησης σχήματος $[N]$.

Βήμα 3 Ορίστε τις σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης και τάσης/παραμόρφωσης

Οι παραμορφώσεις του στοιχείου για την τριδιάστατη κατάσταση τάσης δίνονται από τη σχέση

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (11.2.11)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (11.2.9) στην Εξίσωση (11.2.11), παίρνουμε

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (11.2.12)$$

όπου

$$[B] = [[B_1][B_2][B_3][B_4]] \quad (11.2.13)$$

Το υπομητρώο $[B_1]$ στην Εξίσωση (11.2.13) ορίζεται ως

$$[B_1] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} \end{bmatrix} \quad (11.2.14)$$

όπου, πάλι, το κόμμα μετά από τον δείκτη σημαίνει διαφορίση ως προς τη μεταβλητή που ακολουθεί. Τα υπομητρώα $[B_2]$, $[B_3]$, και $[B_4]$ ορίζονται απλώς με αρίθμηση του δείκτη στην Εξίσωση (11.2.14) από 1 έως 2, 3, και μετά 4, αντίστοιχα. Με αντικατάσταση των συναρτήσεων σχήματος από την Εξίσωση (11.2.10) στην Εξίσωση (11.2.14), το $[B_1]$ εκφράζεται ως

$$[B_1] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \delta_1 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad (11.2.15)$$

με παρόμοιες εκφράσεις για τα $[B_2]$, $[B_3]$, και $[B_4]$.

Οι τάσεις στο στοιχείο συνδέονται με τις παραμορφώσεις του στοιχείου με τη σχέση

$$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\} \quad (11.2.16)$$

όπου το καταστατικό μητρώο για ένα ελαστικό υλικό δίνεται τώρα από την Εξίσωση (11.1.5).

Βήμα 4 Βρείτε το μητρώο δυσκαμψίας και τις εξισώσεις του στοιχείου

Το μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (11.2.17)$$

Επειδή και τα δύο μητρώα $[B]$ και $[D]$ είναι σταθερά για το απλό τετραεδρικό στοιχείο, η Εξίσωση (11.2.17) μπορεί να απλοποιηθεί σε

$$[k] = [B]^T [D] [B] V \quad (11.2.18)$$

όπου πάλι V είναι ο όγκος του στοιχείου. Το μητρώο δυσκαμψίας είναι τώρα τάξης 12×12 .

Δυνάμεις σώματος

Το μητρώο δύναμης σώματος του στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV \quad (11.2.19)$$

όπου το $[N]$ δίνεται από το μητρώο 3×12 στην Εξίσωση (11.2.9) και

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{Bmatrix} \quad (11.2.20a)$$

Για σταθερές δυνάμεις σώματος, οι συνιστώσες των συνολικών δυνάμεων σώματος που προκύπτουν μπορεί να αποδειχθεί ότι κατανέμονται στους κόμβους σε τέσσερα ίσα μέρη. Δηλαδή,

$$\{f_b\} = \frac{V}{4} [X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b]^T \quad (11.2.20b)$$

Η δύναμη σώματος του στοιχείου είναι τότε ένα μητρώο 12×1 .

Επιφανειακές δυνάμεις

Και πάλι, οι επιφανειακές δυνάμεις δίνονται από τη σχέση

$$\{f_s\} = \iint_S [N_s]^T \{T\} dS \quad (11.2.21)$$

όπου $[N_s]$ είναι το μητρώο συνάρτησης σχήματος, το οποίο υπολογίζεται στην επιφάνεια όπου ασκείται η επιφανειακή έλξη.

Για παράδειγμα, θεωρήστε την περίπτωση ομοιόμορφης πίεσης p η οποία ασκείται στην έδρα τους με τους κόμβους 1–3 του στοιχείου που φαίνεται στην Εικόνα 11–3 ή 11–4. Οι δυνάμεις που προκύπτουν στους κόμβους γράφονται

$$\{f_s\} = \iint_S [N]^T \left. \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \right|_{\substack{\text{υπολογισμένο στην} \\ \text{επιφάνεια 1, 2, 3}}} dS \quad (11.2.22)$$

όπου p_x , p_y , και p_z είναι αντίστοιχα οι συνιστώσες της πίεσης p κατά x , y και z , αντίστοιχα. Απλοποιώντας και ολοκληρώνοντας την Εξίσωση (11.2.22), μπορούμε να δείξουμε πως

$$\{f_s\} = \frac{S_{123}}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.2.23)$$

όπου S_{123} είναι το εμβαδό της επιφάνειας που σχηματίζουν οι κόμβοι 1–3. Η χρήση συντεταγμένων όγκου, όπως εξηγείται στην Αναφορά [8], διευκολύνει την ολοκλήρωση της Εξίσωσης (11.2.22).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.1

Υπολογίστε τα μητρώα που είναι απαραίτητα για να προσδιορίσετε το μητρώο δυσκαμψίας για το τετραεδρικό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 11–4. Θεωρήστε $E = 200$ GPa και $\nu = 0.30$. Οι συντεταγμένες στην εικόνα είναι σε εκατοστά.

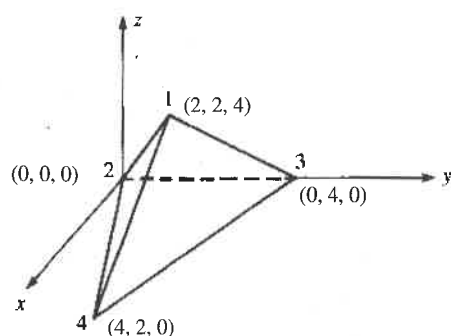
ΛΥΣΗ:

Για να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, προσδιορίζουμε πρώτα τον όγκο V του στοιχείου και όλα τα α , β , γ , και δ από τις Εξισώσεις (11.2.4) έως (11.2.8). Από την Εξίσωση (11.2.4), έχουμε

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 64 \text{ cm}^3 \quad (11.2.24)$$

Από την Εξίσωση (11.2.5), παίρνουμε

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (11.2.25)$$



■ Εικόνα 11–4 Τετραεδρικό στοιχείο

και παρόμοια,

$$\gamma_1 = 0 \quad \delta_1 = 16$$

Από τις Εξισώσεις (11.2.6) έως (11.2.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 64 & \beta_2 &= -8 & \gamma_2 &= -16 & \delta_2 &= -4 \\ \alpha_3 &= 0 & \beta_3 &= -8 & \gamma_3 &= 16 & \delta_3 &= -4 \\ \alpha_4 &= 0 & \beta_4 &= 16 & \gamma_4 &= 0 & \delta_4 &= -8 \end{aligned} \quad (11.2.26)$$

Σημειώστε ότι τα α συνήθως είναι σε μονάδες κυβικών εκατοστών ή κυβικών μέτρων, ενώ τα β , γ , και δ είναι σε τετραγωνικά εκατοστά ή τετραγωνικά μέτρα.

Στη συνέχεια, οι συναρτήσεις σχήματος προσδιορίζονται από τις Εξισώσεις (11.2.10) και τα αποτελέσματα από τις Εξισώσεις (11.2.25) και (11.2.26):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{4z}{8} & N_2 &= \frac{8-2x-4y-z}{8} \\ N_3 &= \frac{-2x+4y-z}{8} & N_4 &= \frac{4x-2z}{8} \end{aligned} \quad (11.2.27)$$

Σημειώστε ότι και πάλι ισχύει η σχέση $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$.

Τα υπομητρώα 6×3 του μητρώου $[B]$, Εξίσωση (11.2.13), υπολογίζονται τώρα με τις Εξισώσεις (11.2.14) και (11.2.27):

$$\begin{aligned} [B_1] &= (10^2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{m} & [B_2] &= (10^2) \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \frac{1}{m} \\ [B_3] &= (10^2) \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \frac{1}{m} & [B_4] &= (10^2) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (11.2.28)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το μητρώο $[D]$ από την Εξίσωση (11.1.5):

$$[D] = \frac{200 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{(1+0.3)(1-0.6)} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.2 & 0 & 0 \\ & & & & 0.2 & 0 \\ & & & & & 0.2 \end{bmatrix} \quad (11.2.29)$$

Συμμετρία

Τέλος, αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα από τις Εξισώσεις (11.2.24) για το V , (11.2.28) για το $[B]$, και (11.2.29) για το $[D]$ στην Εξίσωση (11.2.18), παίρνουμε το μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου. Το μητρώο 12×12 που προκύπτει εμφανίζεται ως

$$[k] = [B]^T [D] [B] V$$

$$= 10^8 \times \begin{bmatrix} 5.13 & 0 & 0 & -1.28 & 0 & -2.56 & -1.28 & 0 & -2.56 & -2.56 & 0 & 5.13 \\ 0 & 5.13 & 0 & 0 & -1.28 & -5.13 & 0 & -1.28 & 5.13 & 0 & -2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 17.95 & -3.85 & -7.69 & -4.49 & -3.85 & 7.69 & -4.49 & 7.69 & 0 & -8.97 \\ -1.28 & 0 & -3.85 & 9.94 & 6.41 & 1.6 & -0.32 & -1.28 & 1.6 & -8.33 & -5.13 & 0.64 \\ 0 & -1.28 & -7.69 & 6.41 & 19.55 & 3.21 & 1.28 & -16.35 & 0.64 & -7.69 & -1.92 & 3.85 \\ -2.56 & -5.13 & -4.49 & 1.6 & 3.21 & 7.53 & 1.6 & -0.64 & -2.72 & -0.64 & 2.56 & -0.32 \\ -1.28 & 0 & -3.85 & -0.32 & 1.28 & 1.6 & 9.94 & -6.41 & 1.6 & -8.33 & 5.13 & 0.64 \\ 0 & -1.28 & 7.69 & -1.28 & -16.35 & -0.64 & -6.41 & 19.55 & -3.21 & 7.69 & -1.92 & -3.85 \\ -2.56 & 5.13 & -4.49 & 1.6 & 0.64 & -2.72 & 1.6 & -3.21 & 7.53 & -0.64 & -2.56 & -0.32 \\ -2.56 & 0 & 7.69 & -8.33 & -7.69 & -0.64 & -8.33 & 7.69 & -0.64 & 19.23 & 0 & -6.14 \\ 0 & -2.56 & 0 & -5.13 & -1.92 & 2.56 & 5.13 & -1.92 & -2.56 & 0 & 6.41 & 0 \\ 5.13 & 0 & -8.97 & 0.64 & 3.85 & -0.32 & 0.64 & -3.85 & -0.32 & -6.41 & 0 & 9.52 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

11.3 Ισοπαραμετρική διατύπωση και εξαεδρικό στοιχείο

Περιγράφουμε τώρα την ισοπαραμετρική διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας για μερικά τριδιάστατα εξαεδρικά στοιχεία (που λέγονται και «τούβλα»).

Γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο

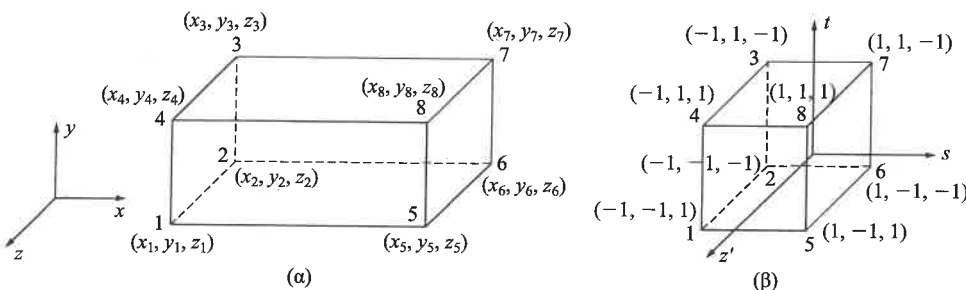
Το βασικό (γραμμικό) εξαεδρικό στοιχείο [Εικόνα 11-5(α)] έχει τώρα οκτώ γωνιακούς κόμβους με ισοπαραμετρικές φυσικές συντεταγμένες τις s , t , και z' όπως φαίνεται στην Εικόνα 11-5(β). Οι έδρες του στοιχείου ορίζονται τώρα με s , t , $z' = \pm 1$. (Χρησιμοποιούμε τα s , t , και z' για τους άξονες συντεταγμένων, επειδή είναι μάλλον απλούστερα στη χρήση από τα ελληνικά γράμματα ξ , η , και ζ).

Η διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας ακολουθεί βήματα αντίστοιχα με την ισοπαραμετρική διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας για το επίπεδο στοιχείο στο Κεφάλαιο 10.

Η συνάρτηση η οποία χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη γεωμετρία του στοιχείου κατά x με τους γενικευμένους βαθμούς ελευθερίας a_i είναι η

$$x = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 z' + a_5 st + a_6 tz' + a_7 z's + a_8 stz' \quad (11.3.1)$$

Η ίδια μορφή με την Εξίσωση (11.3.1) χρησιμοποιείται επίσης για τα y και z . Απλώς ξεκινήστε με a_9 έως a_{16} για το y και από a_{17} έως a_{24} για το z .



■ Εικόνα 11-5 Γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο (α) σε σύστημα γενικών συντεταγμένων και (β) στοιχείο αντιστοιχισμένο σε έναν κύβο δύο μοναδιαίων πλευρών τοποθετημένων συμμετρικά με φυσικές ή εγγενείς συντεταγμένες s , t και z'

Πρώτον, επεκτείνουμε την Εξίσωση (10.2.4) ώστε να συμπεριλάβουμε τη συντεταγμένη z ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (11.3.2)$$

όπου οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται τώρα από τη σχέση

$$N_i = \frac{(1 + ss_i)(1 + tt_i)(1 + z'z'_i)}{8} \quad (11.3.3)$$

με $s_i, t_i, z'_i = \pm 1$ και $i = 1, 2, \dots, 8$. Για παράδειγμα,

$$N_1 = \frac{(1 + ss_1)(1 + tt_1)(1 + z'z'_1)}{8} \quad (11.3.4)$$

και όταν, από την Εικόνα 11-5, τα $s_1 = -1$, $t_1 = -1$, και $z'_1 = +1$ χρησιμοποιούνται στην Εξίσωση (11.3.4), παίρνουμε

$$N_1 = \frac{(1 - s)(1 - t)(1 + z')}{8} \quad (11.3.5\alpha)$$

Οι ρητές μορφές των άλλων συναρτήσεων σχήματος ακολουθούν αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις σχήματος στην Εξίσωση (11.3.3) αντιστοιχίζουν τις φυσικές συντεταγμένες (s, t, z') οποιουδήποτε σημείου του στοιχείου σε οποιοδήποτε σημείο με γενικές συντεταγμένες (x, y, z) , όταν χρησιμοποιούνται στην Εξίσωση (11.3.2). Για παράδειγμα, όταν ορίζουμε $i = 8$ και αντικαθιστούμε $s_8 = 1$, $t_8 = 1$, $z'_8 = 1$ στην Εξίσωση (11.3.3) για το N_8 , παίρνουμε

$$N_8 = \frac{(1 + s)(1 + t)(1 + z')}{8} \quad (11.3.5\beta)$$

Παρόμοιες εκφράσεις έχουμε για τις άλλες συναρτήσεις σχήματος. Στη συνέχεια, υπολογίζοντας όλες τις συναρτήσεις σχήματος στον κόμβο 8, παίρνουμε $N_8 = 1$, και όλες οι άλλες συναρτήσεις σχήματος είναι ίσες με το μηδέν στον κόμβο 8. [Από την Εξίσωση (11.3.5α), βλέπουμε ότι $N_1 = 0$ όταν $s = 1$ ή όταν $t = 1$.] Επομένως, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (11.3.2), παίρνουμε

$$x = x_8 \quad y = y_8 \quad z = z_8$$

Βλέπουμε ότι πράγματι η Εξίσωση (11.3.2) αντιστοιχίζει οποιοδήποτε σημείο από το φυσικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα στοιχείο στο γενικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι συναρτήσεις μετατόπισης με τους γενικευμένους βαθμούς ελευθερίας είναι της ίδιας μορφής που χρησιμοποιείται για να περιγραφεί η γεωμετρία του στοιχείου και δίνεται από την Εξίσωση (11.3.1).

Δηλαδή,

$$u = a_1 + a_2s + a_3t + a_4z' + a_5st + a_6tz' + a_7z's + a_8stz' \quad (11.3.6\alpha)$$

με παρόμοιες εκφράσεις να χρησιμοποιούνται για τις μετατοπίσεις v και w . Στο γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο υπάρχουν τώρα συνολικά 24 βαθμοί ελευθερίας. Επομένως, χρησιμοποιούμε τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος με εκείνες που περιγράφουν τη γεωμετρία [Εξίσωση (11.3.3)]. Οι συναρτήσεις μετατόπισης περιλαμβάνουν τώρα τέτοια w ώστε

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (11.3.6\beta)$$

με τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος που ορίζονται στην Εξίσωση (11.3.3), και το μέγεθος του μητρώου συνάρτησης σχήματος είναι τώρα 3×24 .

Το ιακωβιανό μητρώο [Εξίσωση (10.2.10)] έχει πλέον επεκταθεί σε

$$|J| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (11.3.7)$$

Επειδή οι σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης, που δίνονται από την Εξίσωση (11.2.11) συναρτήσει των γενικών συντεταγμένων, περιλαμβάνουν διαφορίση ως προς z , επεκτείνουμε την Εξίσωση (10.2.9) ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix}}{\|J\|} & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix}}{\|J\|} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial f}{\partial z'} \end{vmatrix}}{\|J\|} \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

Με τις Εξισώσεις (11.3.8), αντικαθιστώντας τα u , v , και ύστερα το w με f και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των παραμορφώσεων, μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμορφώσεις συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων (s, t, z') ώστε να πάρουμε μια εξίσωση παρόμοια με την Εξίσωση (10.2.14). Σε σύντομη μορφή, μπορούμε και πάλι να εκφράσουμε τις παραμορφώσεις με συναρτήσεις σχήματος και γενικές συντεταγμένες κόμβων παρόμοια με την Εξίσωση (10.2.15). Το μητρώο $[B]$, που δίνεται με μια μορφή παρόμοια με την Εξίσωση (10.2.17), είναι τώρα συνάρτηση των s, t και z' και τάξης 6×24 .

Το μητρώο δυσκαμψίας 24×24 δίνεται τώρα από τη σχέση

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| ds dt dz' \quad (11.3.9a)$$

Και πάλι, είναι καλύτερο να υπολογίσουμε το $[k]$ με αριθμητική ολοκλήρωση (δείτε επίσης την Ενότητα 10.3): δηλαδή, υπολογίζουμε (ολοκληρώνουμε) το μητρώο δυσκαμψίας του εξαεδρικού στοιχείου οκτώ κόμβων χρησιμοποιώντας έναν κανόνα $2 \times 2 \times 2$ (ή κανόνα δύο σημείων). Για την ακρίβεια, για τον υπολογισμό του $[k]$ χρησιμοποιούνται οκτώ σημεία που ορίζονται στον Πίνακα 11-1, με τη σχέση

$$[k] = \sum_{i=1}^8 [B(s_i, t_i, z'_i)]^T [D] [B(s_i, t_i, z'_i)] |J(s_i, t_i, z'_i)| W_i W_j W_k \quad (11.3.9b)$$

όπου $W_i = W_j = W_k$ για τον κανόνα δύο σημείων.

■ Πίνακας 11-1 Πίνακας σημείων Gauss για γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο με σχετικά βάρη^a

Σημεία, i	s_i	t_i	z'_i	Βάρος, W_i
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
3	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
5	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
6	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
7	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
8	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

^a $1/\sqrt{3} = 0.57735$.

Όπως ισχύει και με το διγραμμικό τετράπλευρο στοιχείο που περιγράψαμε στην Ενότητα 10.2, το γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων δεν μπορεί να προσομοιώσει καλά την κάμψη δοκού, επειδή οι πλευρές του στοιχείου παραμένουν ευθύγραμμες κατά την παραμόρφωση του στοιχείου. Κατά τη διαδικασία της κάμψης, τα στοιχεία επιμηκύνονται και μπορούν να κλειδώσουν σε διάτμηση. Αυτή η έννοια του κλειδώματος διάτμησης παρουσιάστηκε στην Ενότητα 6.6 και περιγράφηκε και πάλι στην Ενότητα 10.5 μαζί με τρόπους αντιμετώπισής της. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το κλειδώμα διάτμησης και τρόπους αντιμετώπισης θα βρείτε στην Αναφορά [12]. Παρ' όλα αυτά, το τετραγωνικό εξαεδρικό στοιχείο που περιγράφεται στη συνέχεια διορθώνει το πρόβλημα του κλειδώματος διάτμησης.

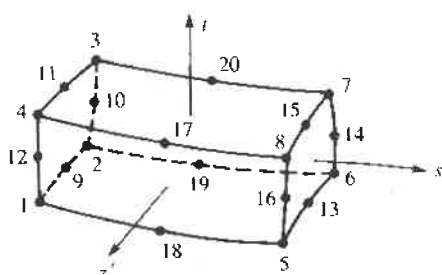
Τετραγωνικό εξαεδρικό στοιχείο

Για το τετραγωνικό εξαεδρικό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 11-6, έχουμε συνολικά 20 κόμβους μαζί με ένα σύνολο 12 μεσοπλευρικών κόμβων.

Η συνάρτηση που περιγράφει τη γεωμετρία του στοιχείου για το x συναρτήσει των 20 a_i είναι

$$\begin{aligned}
 x = & a_1 + a_2s + a_3t + a_4z' + a_5st + a_6tz' + a_7z's + a_8s^2 + a_9t^2 \\
 & + a_{10}z'^2 + a_{11}s^2t + a_{12}st^2 + a_{13}t^2z' + a_{14}tz'^2 + a_{15}z'^2s \\
 & + a_{16}z's^2 + a_{17}stz' + a_{18}s^2tz' + a_{19}st^2z' + a_{20}stz'^2
 \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

Παρόμοιες εκφράσεις περιγράφουν τις συντεταγμένες y και z .



■ Εικόνα 11-6 Τετραγωνικό εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο

Η συνάρτηση μετατόπισης κατά x , u , περιγράφεται από το ίδιο πολυώνυμο το οποίο χρησιμοποιείται για τη γεωμετρία του στοιχείου κατά x στην Εξίσωση (11.3.10). Παρόμοιες εκφράσεις χρησιμοποιούνται για τις συναρτήσεις μετατόπισης v και w . Προκειμένου να ικανοποιηθεί η διαστοιχειακή συμβατότητα, δεν περιλαμβάνονται οι τρεις κυβικοί όροι s^3 , t^3 , και z'^3 . Αντίθετα, χρησιμοποιούνται οι τρεις τεταρτοβάθμιοι όροι s^2tz' , st^2z' , και stz'^2 .

Η ανάπτυξη του μητρώου δυσκαμψίας ακολουθεί τα ίδια βήματα που περιγράψαμε προηγουμένως για το γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο, όπου οι συναρτήσεις σχήματος παίρνουν τώρα νέες μορφές. Και πάλι, θεωρώντας ότι s_i , t_i , $z'_i = \pm 1$, για τους γωνιακούς κόμβους ($i = 1, 2, \dots, 8$) έχουμε

$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1+tt_i)(1+z'_iz'_i)}{8} (ss_i + tt_i + z'_iz'_i - 2) \quad (11.3.11)$$

Για τους μεσοπλευρικούς κόμβους σε $s_i = 0$, $t_i = \pm 1$, $z'_i = \pm 1$ ($i = 17, 18, 19, 20$), έχουμε

$$N_i = \frac{(1-s^2)(1+tt_i)(1+z'_iz'_i)}{4} \quad (11.3.12)$$

Για τους μεσοπλευρικούς κόμβους σε $s_i = \pm 1$, $t_i = 0$, $z'_i = \pm 1$ ($i = 10, 12, 14, 16$), έχουμε

$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1-t^2)(1+z'_iz'_i)}{4} \quad (11.3.13)$$

Τέλος, για τους μεσοπλευρικούς κόμβους σε $s_i = \pm 1$, $t_i = \pm 1$, $z'_i = 0$ ($i = 9, 11, 13, 15$), έχουμε

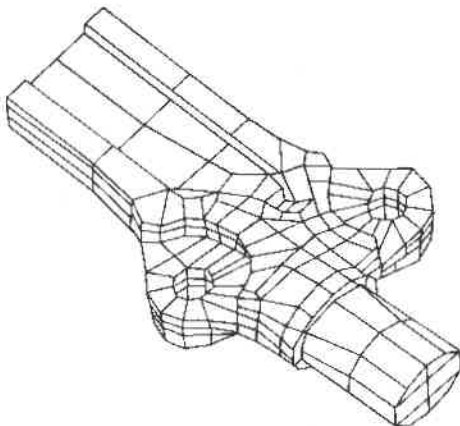
$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1+tt_i)(1-z'^2)}{4} \quad (11.3.14)$$

Το μητρώο $[B]$ είναι τώρα ένα μητρώο 60×60 . Επομένως, αν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση (11.3.9α), το μητρώο δυσκαμψίας του τετραγωνικού εξαγωνικού στοιχείου είναι τάξης 60×60 . Αυτό είναι σύμφωνο με το γεγονός ότι το στοιχείο έχει 20 κόμβους και 3 βαθμούς ελευθερίας (u_i , v_i , και w_i) ανά κόμβο.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας γι' αυτό το τετραγωνικό στερεό στοιχείο 20 κόμβων χρησιμοποιώντας έναν κανόνα $3 \times 3 \times 3$ (27 σημεία). Πάντως, καλύτερη επιλογή μπορεί να είναι ένας ειδικός κανόνας 14 σημείων [9, 10].

Όπως με το στοιχείο 8 κόμβων της Ενότητας 10.5 (Εικόνα 10-18), το στερεό στοιχείο 20 κόμβων ονομάζεται επίσης στοιχείο «καλοτυχίας» (serendipity).

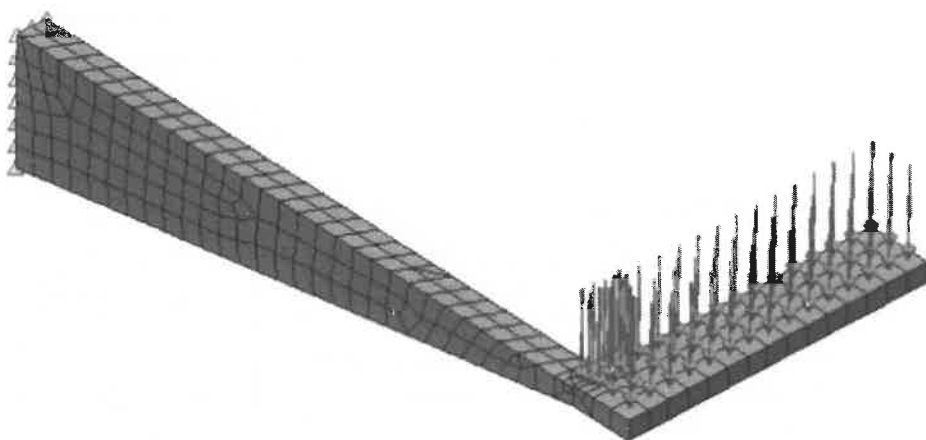
Οι Εικόνες 1-7 και 11-7 δείχνουν εφαρμογές της χρήσης γραμμικών και τετραγωνικών (με καμπύλες πλευρές) στερεών στοιχείων στην προσομοίωση τριδιάστατων στερεών.



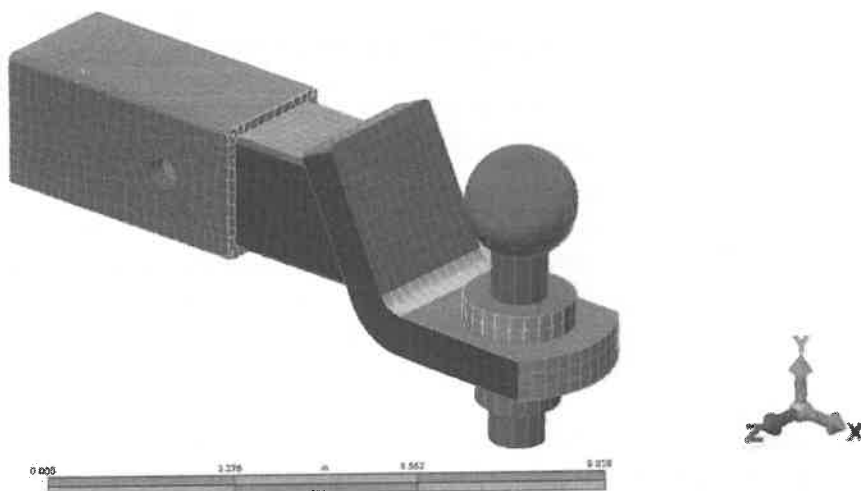
■ Εικόνα 11-7 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων σφυρηλάτησης που χρησιμοποιεί γραμμικά και τετραγωνικά στερεά στοιχεία

Τέλος, στο εμπόριο διατίθενται προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπως το [11] (δείτε επίσης τις Αναφορές [46–56] του Κεφαλαίου 1), για την επίλυση τριδιάστατων προβλημάτων. Οι Εικόνες 11–8, 11–9, και 11–10 δείχνουν ένα πεντάλ χάλυβα, έναν κοτσαδόρο ρυμουλκούμενου, και έναν βραχίονα εναλλάκτη που έχουν λυθεί με πρόγραμμα υπολογιστή [11]. Τονίζουμε ότι αυτά τα προβλήματα έχουν λυθεί με τριδιάστατα στοιχεία αντί για διδιάστατα, όπως περιγράφεται στα Κεφάλαια 6 και 8, επειδή τα συγκεκριμένα προβλήματα έχουν τριδιάστατη κατάσταση τάσης. Δηλαδή, οι τρεις ορθές και οι τρεις διατμητικές τάσεις είναι παρόμοιας τάξης μεγέθους σε ορισμένα μέρη του πεντάλ, του κοτσαδόρου, και του βραχίονα του εναλλάκτη. Τα πιο ακριβή αποτελέσματα προκύπτουν με την προσομοίωση αυτών των προβλημάτων με χρήση του τριδιάστατου τούβλου ή τετραεδρικών στοιχείων (ή με έναν συνδυασμό των δύο).

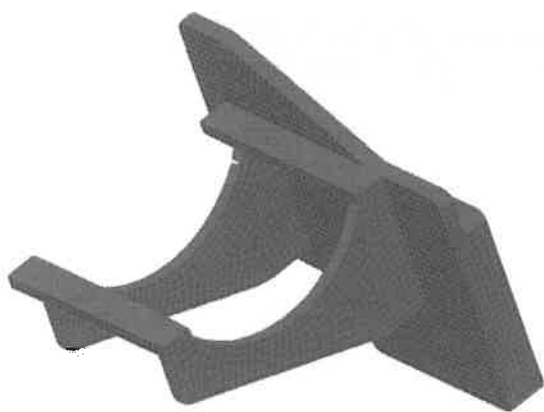
Για το πεντάλ, προσομοιωμένο με στοιχεία τούβλων, η μέγιστη τάση von Mises ήταν ίση με 71.1 MPa στην εσωτερική γωνία. Η μέγιστη μετατόπιση ήταν 0.439 mm προς τα κάτω στην εμπρός ελεύθερη ακμή. (Δείτε το Πρόβλημα 11.14 για τις λεπτομερείς διαστάσεις και ιδιότητες των υλικών που χρησιμοποιούνται.)



■ Εικόνα 11–8 Πλέγμα μοντέλου πεντάλ χάλυβα (πάκτωση στην αριστερή πίσω έδρα και συνολική καθοδική επιφανειακή δύναμη 100 N η οποία εφαρμόζεται ομοιόμορφα στην εμπρός επιφάνεια του πεντάλ) (από Justin Hronek)



■ Εικόνα 11–9 Πλέγμα μοντέλου ενός κοτσαδόρου ρυμουλκούμενου (από τον David Anderson)
[Στο ένθετο θα δείτε την εικόνα στην έγχρωμη έκδοχή της.]



■ Εικόνα 11–10 Πλέγμα μοντέλου ενός βραχίονα εναλλάκτη (παραχώρηση της Seagrave Fire Apparatus και του σχεδιαστή μηχανικού Andrew Heckman)

Για τον χαλύβδινο κοτσαδόρο στην Εικόνα 11–9, ο οποίος υποβάλλεται ταυτόχρονα σε ένα πλευρικό και σε ένα καθοδικό φορτίο, 12.59 kN το καθένα, στη σφαίρα, οι μεγαλύτερες τάσεις von Mises μακριά από τη μη ρεαλιστική υψηλή τάση στη θέση του σημειακού φορτίου που ασκείται στη βάση της σφαίρας είναι 406.75 MPa στην εσωτερική καμπύλη του κοτσαδόρου. Η μεγαλύτερη τιμή της μετατόπισης ήταν 1.52 mm στο άνω μέρος της σφαίρας. Αυτή η τιμή μετατόπισης ταιριάζει επίσης με την τιμή η οποία προκύπτει από πειραματικές δοκιμές του κοτσαδόρου με τις ίδιες συνθήκες φορτίου που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων.

Για τον βραχίονα του εναλλάκτη, κατασκευασμένο από χάλυβα θερμής έλασης ASTM–A36, το μοντέλο αποτελούσαν 13.298 στερεά τούβλα με 10.425 κόμβους. Εφαρμόστηκε συνολικό καθοδικό φορτίο 4.45 kN στο επίπεδο εμπρός εξάρτημα. Η πίσω πλευρά του βραχίονα ήταν δεσμευμένη σε μετατόπιση. Η μέγιστη τάση von Mises ήταν 79.54 MPa στην άνω επιφάνεια κοντά στο κέντρο (το στενότερο) τμήμα του βραχίονα. Η μέγιστη κατακόρυφη εκτροπή ήταν 0.412 mm στο εμπρός άκρο της εξωτερικής ακμής του βραχίονα του εναλλάκτη.

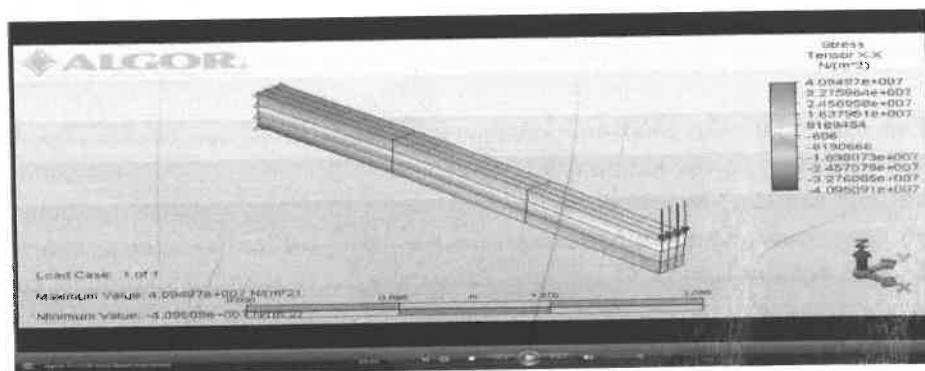
Έχει αποδειχθεί [3] ότι η χρήση του απλού εξαεδρικού στοιχείου με οκτώ κόμβους δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη χρήση του τετραεδρικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης που περιγράψαμε στην Ενότητα 11.1. Ο Πίνακας 11.2 δείχνει επίσης τη σύγκριση μεταξύ του τετραεδρικού μοντέλου γωνιακών κόμβων (σταθερής παραμόρφωσης), του τετραεδρικού γραμμικής παραμόρφωσης (10 κόμβοι με πρόσθετους μεσοπλευρικούς κόμβους), του τούβλου 8 κόμβων, και του τούβλου 20 κόμβων για μια τριδιάστατη δοκό προβόλου με μήκος 2.54 m, βάση 15.24 cm, και ύψος 30.48 cm. Η δοκός έχει στο άκρο φορτίο 44.48 kN με φορά προς τα επάνω, και είναι κατασκευασμένη από χάλυβα. Ένα τυπικό μοντέλο τούβλου 8 κόμβων με το γράφημα της κύριας τάσης φαίνεται στην Εικόνα 11–11. Η λύση με την κλασική θεωρία δοκού για την κατακόρυφη μετατόπιση και την τάση λόγω κάμψης περιλαμβάνεται επίσης για σύγκριση. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το τετραεδρικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης δίνει πολύ άσχημα αποτελέσματα, ενώ το γραμμικό τετραεδρικό δίνει πολύ καλύτερα. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι το μοντέλο γραμμικής παραμόρφωσης προβλέπει τη συμπεριφορά της κάμψης δοκού πολύ καλύτερα. Τα μοντέλα τούβλων με 8 κόμβους και 20 κόμβους δίνουν παρόμοια, αλλά ακριβή αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας δοκού.

Για να συνοψίσουμε, η χρήση των τριδιάστατων στοιχείων οδηγεί σε ένα σύστημα με μεγάλο αριθμό εξισώσεων. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο που χρησιμοποιεί έναν απλό κύβο, για παράδειγμα, με 20 επί 20 επί 20 κόμβους (= 8000 κόμβους συνολικά) για μια περιοχή περιλαμβάνει 8000 επί 3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (= 24000) εξισώσεις.

■ Πίνακας 11-2 Πίνακας σύγκρισης των αποτελεσμάτων για δοκό σε πρόβολο προσομοιωμένη με τη χρήση τετραεδρικού στοιχείου 4 κόμβων, τετραεδρικού στοιχείου 10 κόμβων, τούβλου 8 κόμβων, και τούβλου 20 κόμβων

Στερεό στοιχείο σε χρήση	Αριθμός κόμβων	Αριθμός βαθμών ελευθερίας	Αριθμός στοιχείων	Μετατ. ελεύθερης ακμής, mm	Κύρια τάση, MPa
Τετραεδρικό 4 κόμβων	30	90	61	0.1346	3.87
Τετραεδρικό 4 κόμβων	415	1245	1549	0.7163	16.25
Τετραεδρικό 4 κόμβων	896	2688	3729	1.067	22.64
Τετραεδρικό 4 κόμβων	1658	4974	7268	1.392	27.97
Τετραεδρικό 10 κόμβων	144	432	61	2.997	45.51
Τετραεδρικό 10 κόμβων	2584	7752	1549	3.244	54.95
Τούβλο 8 κόμβων	64	192	27	3.145	40.94
Τούβλο 8 κόμβων	343	1029	216	3.183	44.87
Τούβλο 8 κόμβων	1331	3993	1000	3.243	47.86
Τούβλο 20 κόμβων	208	624	27	3.175	54.46
Τούβλο 20 κόμβων	1225	3675	216	3.264	57.57
Τούβλο 20 κόμβων	4961	14883	1000	3.294	57.39
Κλασική λύση				3.266	47.85

(Δημιουργία των αποτελεσμάτων για τον Πίνακα 11-2: William Gobel)



■ Εικόνα 11-11 Μοντέλο τούβλου οκτώ κόμβων (27 τούβλα) με το γράφημα της κύριας τάσης

Οι Αναφορές [4–7] περιγράφουν πρώιμα τριδιάστατα προγράμματα και διαδικασίες ανάλυσης με στερεά στοιχεία όπως μια οικογένεια υποπαραμετρικών καμπύλων στοιχείων, γραμμικών τετραεδρικών στοιχείων, και γραμμικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με 8 και 20 κόμβους.

ΣΥΝΟΨΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11.1.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} \quad (11.1.2)$$

Μητρώα τάσης και παραμόρφωσης:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (11.1.3)$$

Καταστατικό μητρώο:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11.1.5)$$

Συμμετρία

Συναρτήσεις μετατόπισης:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v(x, y, z) &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \\ w(x, y, z) &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Συναρτήσεις σχήματος για τετραεδρικό στοιχείο:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z)}{6V} & N_2 &= \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z)}{6V} \\ N_3 &= \frac{(\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z)}{6V} & N_4 &= \frac{(\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z)}{6V} \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

και

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (11.2.4)$$

Μητρώο κλίσης:

$$[B_1] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \delta_1 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad (11.2.15)$$

Μητρώο δυσκαμψίας για τετραεδρικό στοιχείο:

$$[k] = [B]^T [D] [B] V \quad (11.2.18)$$

Μητρώο δύναμης σώματος για τετραεδρικό στοιχείο:

$$\{f_b\} = \frac{V}{4} [X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b \ X_b \ Y_b \ Z_b]^T \quad (11.2.20\beta)$$

Μητρώο επιφανειακής δύναμης σε έδρα με κόμβους 1 έως 3 για τετραεδρικό στοιχείο:

$$\{f_s\} = \frac{S_{123}}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.2.23)$$

Συνάρτηση προσδιορισμού της γεωμετρίας για γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων:

$$x = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 z' + a_5 st + a_6 tz' + a_7 z's + a_8 stz' \quad (11.3.1)$$

Συναρτήσεις σχήματος για ισοπαραμετρικό στοιχείο τούβλου 8 κόμβων:

$$N_i = \frac{(1 + ss_i)(1 + tt_i)(1 + z'z'_i)}{8} \quad (11.3.3)$$

Συνάρτηση μετατόπισης στη διεύθυνση x για στοιχείο τούβλου με οκτώ κόμβους:

$$u = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 z' + a_5 st + a_6 tz' + a_7 z's + a_8 stz' \quad (11.3.6\alpha)$$

Μητρώο δυσκαμψίας για στοιχείο τούβλου με οκτώ κόμβους:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| ds dt dz' \quad (11.3.9\alpha)$$

Κανόνας $2 \times 2 \times 2$ (κανόνας 8 σημείων) για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου τούβλου με οκτώ κόμβους:

$$[k] = \sum_{i=1}^8 [B(s_i, t_i, z'_i)]^T [D] [B(s_i, t_i, z'_i)] [J(s_i, t_i, z'_i)] | W_i W_j W_k \quad (11.3.9\beta)$$

Ο Πίνακας 11-1 παραθέτει τα σημεία Gauss για ένα γραμμικό στοιχείο τούβλου.

Συνάρτηση που περιγράφει τη γεωμετρία για ένα τετραγωνικό στοιχείο τούβλου με 20 κόμβους:

$$\begin{aligned} x = & a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 z' + a_5 st + a_6 tz' + a_7 z's + a_8 s^2 + a_9 t^2 \\ & + a_{10} z'^2 + a_{11} s^2 t + a_{12} st^2 + a_{13} t^2 z' + a_{14} tz'^2 + a_{15} z'^2 s \\ & + a_{16} z's^2 + a_{17} stz' + a_{18} s^2 tz' + a_{19} st^2 z' + a_{20} stz'^2 \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

Παρόμοιες εκφράσεις περιγράφουν τις συντεταγμένες y και z .

Συναρτήσεις σχήματος για στοιχείο τούβλου με 20 κόμβους:

$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1+tt_i)(1+z'z'_i)}{8} (ss_i + tt_i + z'z'_i - 2) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (11.3.11)$$

$$N_i = \frac{(1-s^2)(1+tt_i)(1+z'z'_i)}{4} \quad (i = 17, 18, 19, 20) \quad (11.3.12)$$

$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1-t^2)(1+z'z'_i)}{4} \quad (i = 10, 12, 14, 16) \quad (11.3.13)$$

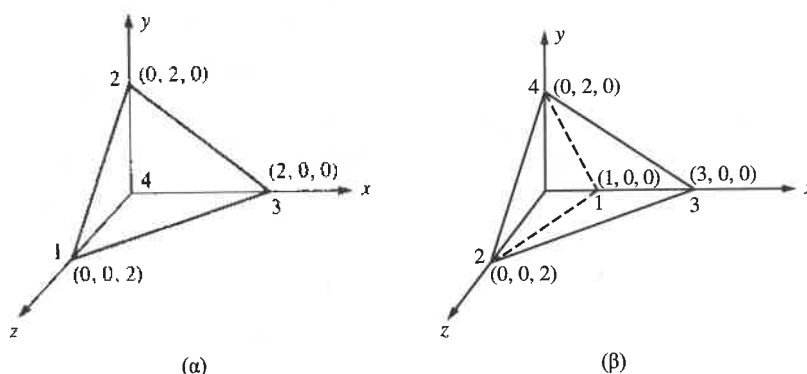
$$N_i = \frac{(1+ss_i)(1+tt_i)(1-z'^2)}{4} \quad (i = 9, 11, 13, 15) \quad (11.3.14)$$

Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] Martin, H. C., "Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method". *The Trend in Engineering*, Vol. 13, σελ. 5-19, Ιαν. 1961.
- [2] Gallagher, R. H., Padlog, J., και Bijlaard, P. P., "Stress Analysis of Heated Complex Shapes", *Journal of the American Rocket Society*, σελ. 700-707, Μάιος 1962.
- [3] Melosh, R. J., "Structural Analysis of Solids", *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, σελ. 205-223, Αύγ. 1963.
- [4] Chacour, S., "DANUTA, a Three-Dimensional Finite Element Program Used in the Analysis of Turbo-Machinery", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Basic Engineering*, Μάρτιος 1972.
- [5] Rashid, Y. R., "Three-Dimensional Analysis of Elastic Solids-I: Analysis Procedure", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 5, σελ. 1311-1331, 1969.
- [6] Rashid, Y. R., "Three-Dimensional Analysis of Elastic Solids-II: The Computational Problem", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, σελ. 195-207, 1970.
- [7] *Three-Dimensional Continuum Computer Programs for Structural Analysis*, Cruse, T. A., και Griffin, D. S., επιμέλεια, American Society of Mechanical Engineers, 1972.
- [8] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3η έκδοση, McGraw-Hill, London, 1977.
- [9] Irons, B. M., "Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, No. 2, σελ. 293-294, 1971.
- [10] Hellen, T. K., "Effective Quadrature Rules for Quadratic Solid Isoparametric Finite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 4, σελ. 597-599, 1972.
- [11] Autodesk, Inc. McInnis Parkway San Rafael, CA 90903.
- [12] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., και Witt, R. J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4η έκδοση, Wiley, New York, 2002.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 11.1 Υπολογίστε το μητρώο $[B]$ για το τετραεδρικό στερεό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα Π11-1.
- 11.2 Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας για τα στοιχεία που φαίνονται στην Εικόνα Π11-1. Θεωρήστε ότι $E = 210 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.3$.



■ Εικόνα Π11-1

- 11.3 Για τα στοιχεία στην Εικόνα Π11-1, υποθέστε ότι οι μετατοπίσεις των κόμβων έχουν τις εξής τιμές:

$u_1 = 0.0125 \text{ mm}$	$v_1 = 0.0$	$w_1 = 0.0$
$u_2 = 0.0025 \text{ mm}$	$v_2 = 0.0$	$w_2 = 0.0025 \text{ mm}$
$u_3 = 0.0125 \text{ mm}$	$v_3 = 0.0$	$w_3 = 0.0$
$u_4 = -0.0025 \text{ mm}$	$v_4 = 0.0$	$w_4 = 0.0125 \text{ mm}$

Προσδιορίστε τις παραμορφώσεις και ύστερα τις τάσεις στα στοιχεία. Θεωρήστε ότι $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ και $\nu = 0.3$.

- 11.4 Τι ιδιαίτερο χαρακτηρίζει τις παραμορφώσεις και τις τάσεις στο τετραεδρικό στοιχείο;
- 11.5 Δείξτε ότι για σταθερή δύναμη σώματος Z_b που ενεργεί σε ένα στοιχείο ($X_b = 0$ και $Y_b = 0$), είναι

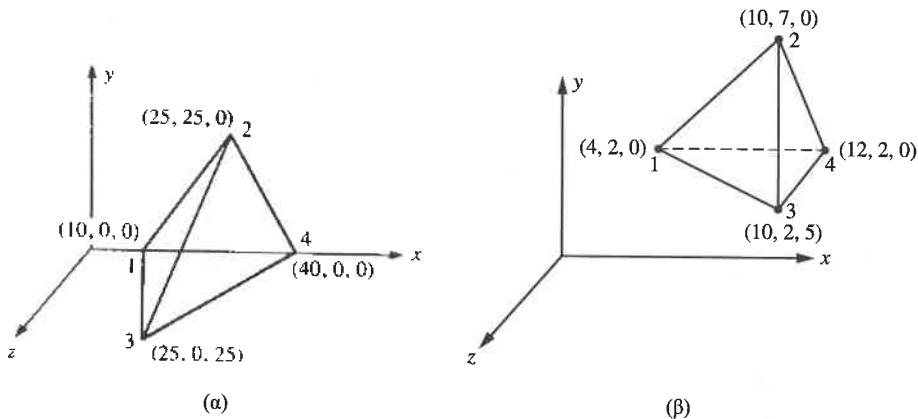
$$\{f_{bi}\} = \frac{V}{4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_b \end{Bmatrix}$$

όπου το $\{f_{bi}\}$ αναπαριστά τις δυνάμεις σώματος στον κόμβο i του στοιχείου με όγκο V .

- 11.6 Υπολογίστε το μητρώο $[B]$ για το τετραεδρικό στερεό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα Π11-6. Οι συντεταγμένες δίνονται σε χιλιοστά.
- 11.7 Υπολογίστε το μητρώο δυσκαμψίας για τα στοιχεία που φαίνονται στην Εικόνα Π11-6. Θεωρήστε ότι $E = 100 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.3$.
- 11.8 Για τα στοιχεία που φαίνονται στην Εικόνα Π11-6, υποθέστε ότι οι μετατοπίσεις των κόμβων έχουν τις εξής τιμές:

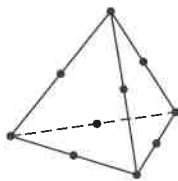
$$\begin{array}{lll} u_1 = 0.0 & v_1 = 0.0 & w_1 = 0.0 \\ u_2 = 0.01 \text{ mm} & v_2 = 0.02 \text{ mm} & w_2 = 0.01 \text{ mm} \\ u_3 = 0.02 \text{ mm} & v_3 = 0.01 \text{ mm} & w_3 = 0.005 \text{ mm} \\ u_4 = 0.0 & v_4 = 0.01 \text{ mm} & w_4 = 0.01 \text{ mm} \end{array}$$

Προσδιορίστε τις παραμορφώσεις και ύστερα τις τάσεις στα στοιχεία. Θεωρήστε ότι $E = 100 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.3$.



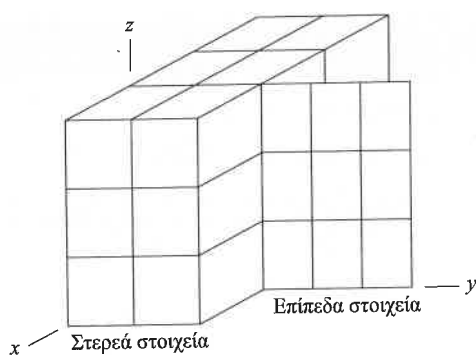
■ Εικόνα Π11-6

- 11.9 Για το τετραεδρικό στοιχείο γραμμικής παραμόρφωσης που φαίνεται στην Εικόνα Π11-9, (α) εκφράστε τα πεδία μετατόπισης u , v , και w στη διεύθυνση x , y , και z , αντίστοιχα. Συμβουλή: Υπάρχουν 10 κόμβοι, καθένας με τρεις βαθμούς ελευθερίας σε μετατόπιση, u_i , v_i , και w_i . Εξετάστε επίσης το τρίγωνο γραμμικής παραμόρφωσης από την Εξίσωση (8.1.2) ή την επέκταση της Εξίσωσης (11.2.2).



■ Εικόνα Π11-9

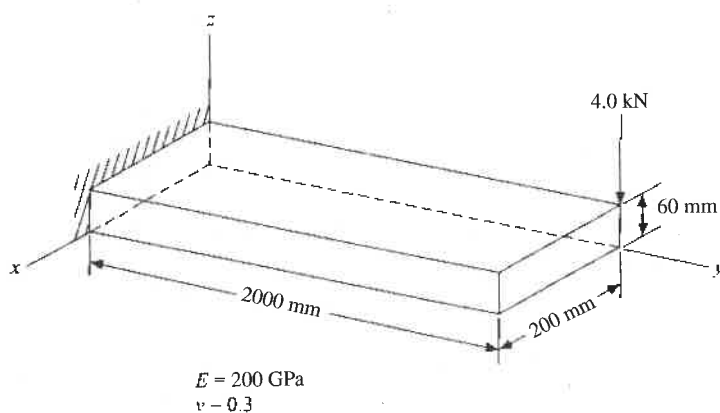
- 11.10 Η Εικόνα Π11-10 δείχνει πώς μπορούν να συνδεθούν στερεά και επίπεδα στοιχεία. Ποιος περιορισμός θα πρέπει να τίθεται στα εξωτερικά ασκούμενα φορτία ώστε να είναι αποδεκτή αυτή η σύνδεση;
- 11.11 Εκφράστε τις ρητές συναρτήσεις σχήματος N_2 έως N_8 , παρόμοιες με τη N_1 από την Εξίσωση (11.3.4), για το γραμμικό εξαεδρικό στοιχείο που φαίνεται στην Εικόνα 11-5 στη σελίδα 547.
- 11.12 Εκφράστε τις ρητές συναρτήσεις σχήματος για τους γωνιακούς κόμβους του τετραγωνικού εξαεδρικού στοιχείου που φαίνεται στην Εικόνα 11-6 στη σελίδα 550.
- 11.13 Γράψτε ένα πρόγραμμα υπολογιστή για να υπολογίσετε το $[k]$ της Εξίσωσης (11.3.9α) χρησιμοποιώντας έναν κανόνα γκαουσιανής ολοκλήρωσης $2 \times 2 \times 2$.



■ Εικόνα Π11-10

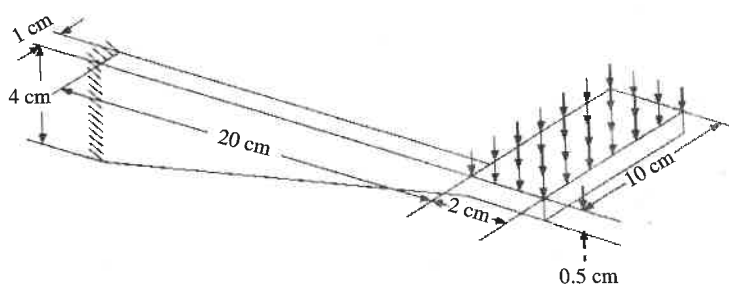
Λύστε τα επόμενα προβλήματα με τη βοήθεια υπολογιστή.

- 11.14 Προσδιορίστε τις παραμορφώσεις στις τέσσερις γωνίες του ελεύθερου άκρου της δομικής χαλύβδινης δοκού σε πρόβολο που φαίνεται στην Εικόνα Π11-14. Προσδιορίστε επίσης τη μέγιστη κύρια τάση. Συγκρίνετε την απάντησή σας για τις εκτροπές (βέλη κάμψης) με την εξίσωση της κλασικής θεωρίας δοκού ($\delta = PL^3/(3EI)$).

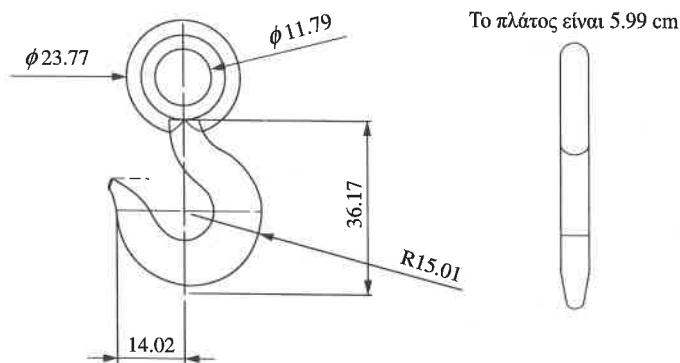


■ Εικόνα Π11-14

- 11.15 Ένα τμήμα ενός πεντάλ φρένου από χάλυβα σε ένα όχημα προσομοιώνεται όπως φαίνεται στην Εικόνα Π11-15. Προσδιορίστε τη μέγιστη εκτροπή στο πεντάλ υπό μια ομοιόμορφη δύναμη 100 N που ενεργεί στο πεντάλ.

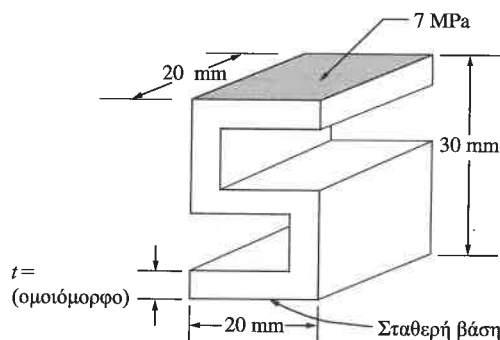


■ Εικόνα Π11-15



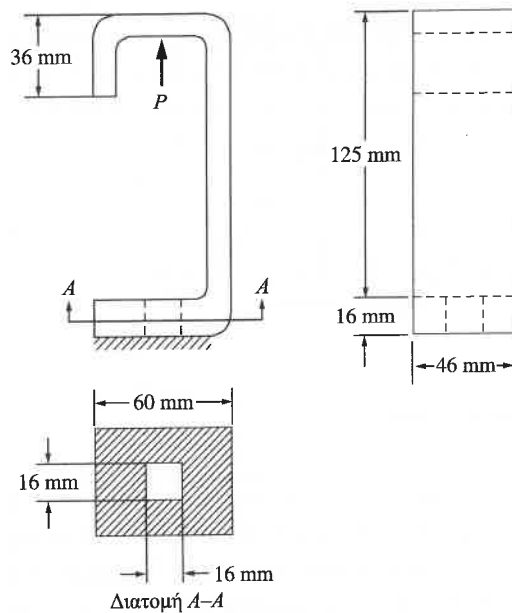
■ Εικόνα Π11-16 Άγκιστρο γερανού (από John Stec)

- 11.16 Για το άγκιστρο γερανού στην Εικόνα Π11-16, προσδιορίστε τη μέγιστη μετατόπιση και τη μέγιστη τάση von Mises και τη θέση αυτής της τιμής στο άγκιστρο. Χρησιμοποιήστε χάλυβα AISI 4130 με αντοχή διαρροής 460 MPa, με μέτρο ελαστικότητας 210 GPa, και με λόγο Poisson 0.3. Το συνολικό φορτίο των 112.5 kN εφαρμόζεται σε 15 κόμβους που βρίσκονται στην κάτω εσωτερική έδρα για την προσομοίωση μιας ανυψωτικής δύναμης. Το κάτω μέρος της κορυφής του κυκλικού τμήματος του αγκίστρου είναι σταθερό σε κατακόρυφη μετατόπιση. Όλες οι διαστάσεις είναι σε εκατοστά.
- 11.17 Ένα μπλοκ σχήματος S, που χρησιμοποιείται στη μέτρηση δυνάμεων όπως φαίνεται στην Εικόνα Π11-17, θα πρέπει να σχεδιαστεί για δύναμη 7 MPa που εφαρμόζεται ομοιόμορφα στην άνω επιφάνεια. Προσδιορίστε το ομοιόμορφο πάχος του μπλοκ, το οποίο απαιτείται ώστε ο αισθητήρας να συμπιέζεται έως το πολύ 1 mm. Επίσης, βεβαιωθείτε ότι η μέγιστη τάση από τη θεωρία αστοχίας ενέργειας μέγιστης παραμόρφωσης είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής του υλικού. Χρησιμοποιήστε συντελεστή ασφαλείας 1.5 μόνο για την τάση. Το συνολικό μέγεθος του μπλοκ θα πρέπει να χωράει σε έναν όγκο ύψους 30 mm, πλάτους 20 mm, βάθους 20 mm. Το μπλοκ πρέπει να είναι κατασκευασμένο από χάλυβα.

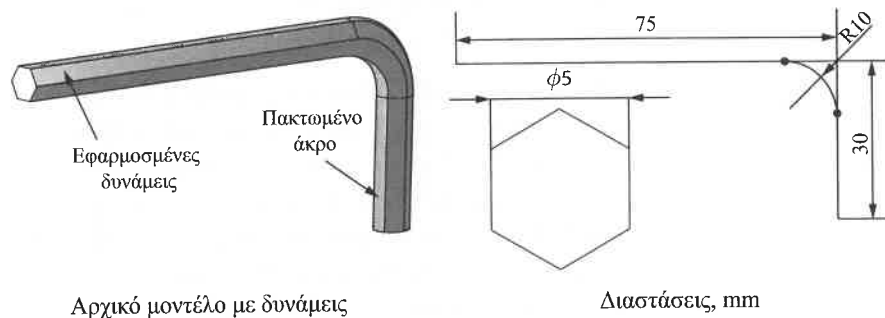


■ Εικόνα Π11-17 Μπλοκ σχήματος S

- 11.18 Μια συσκευή πρόκειται να φορτιστεί υδραυλικά για να αντισταθεί σε ανοδική πίεση $P = 27$ kN όπως φαίνεται στην Εικόνα Π11-18. Προσδιορίστε το πάχος της συσκευής έτσι ώστε η μέγιστη εκτροπή να είναι 2 mm κατακόρυφα και η μέγιστη τάση να είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής, χρησιμοποιώντας συντελεστή ασφαλείας 2 (μόνο για την τάση). Η συσκευή θα πρέπει να χωράει σε χώρο ύψους 140 mm, πλάι 60 mm, και βάθους 46 mm. Το άνω πέλμα κάμπτεται κατακόρυφα όπως φαίνεται, κ η συσκευή στερεώνεται στο πάτωμα. Χρησιμοποιήστε χάλυβα για το υλικό.



■ Εικόνα Π11-18 Υδραυλικά φορτισμένη συσκευή



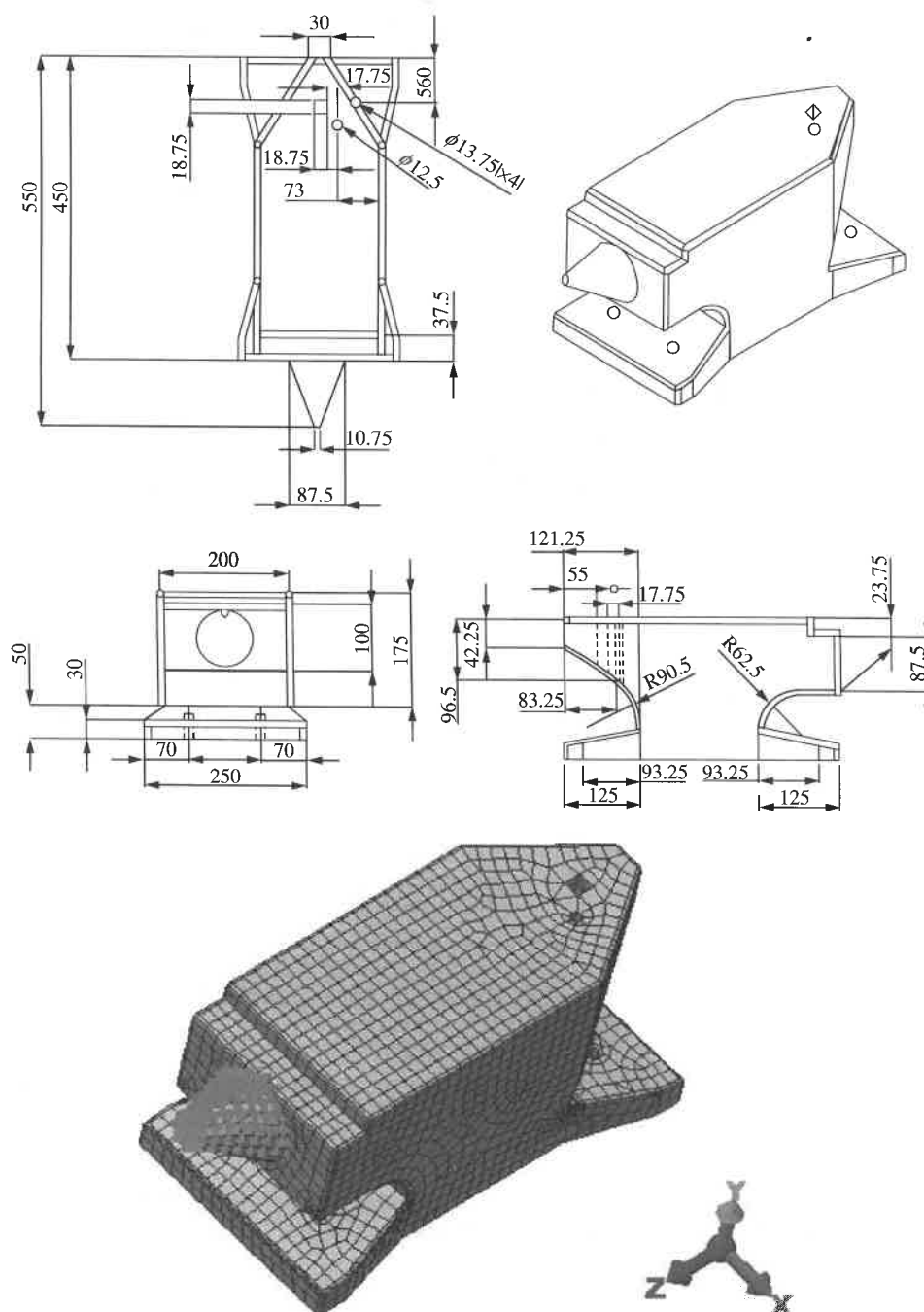
■ Εικόνα Π11-19 Κλειδί Allen με τις διαστάσεις, τα φορτία, και το τυπικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (από Justin Hronek)



- 11.19 Ένα κλειδί Allen χρησιμοποιείται για να χαλαρώσει ένα μπουλόνι που έχει εξαγωνική διατομή κεφαλής, όπως φαίνεται στην Εικόνα Π11-19. Αυτό το κλειδί έχει μέγεθος 5 mm και είναι κατασκευασμένο από ανθρακούχο χάλυβα με βαφή και σκλήρυνση και μέτρο ελαστικότητας 200 GPa, λόγο Poisson 0.29, και αντοχή διαρροής 615 MPa. Το κλειδί χρησιμοποιείται για να χαλαρώσει ένα σκουριασμένο μπουλόνι. Για την προσομοίωση της πλήρους πάκτωσης διατηρείται σταθερή μια επιφάνεια με ύψος 2.5 mm στο κάτω μέρος. Μια συνολική δύναμη 125 N εφαρμόζεται ομοιόμορφα σε

25 mm στο άκρο της οριζόντιας διατομής του κλειδιού. Προσδιορίστε τη μέγιστη τάση von Mises στο κλειδί. Προσδιορίστε επίσης τη μέγιστη μετατόπιση. Σχολιάστε σχετικά με το αν το κλειδί είναι ασφαλές στη χρήση, με κριτήριο το αν θα διαρρεύσει ή όχι. (Αυτό το πρόβλημα είναι από τον Justin Hronek.)

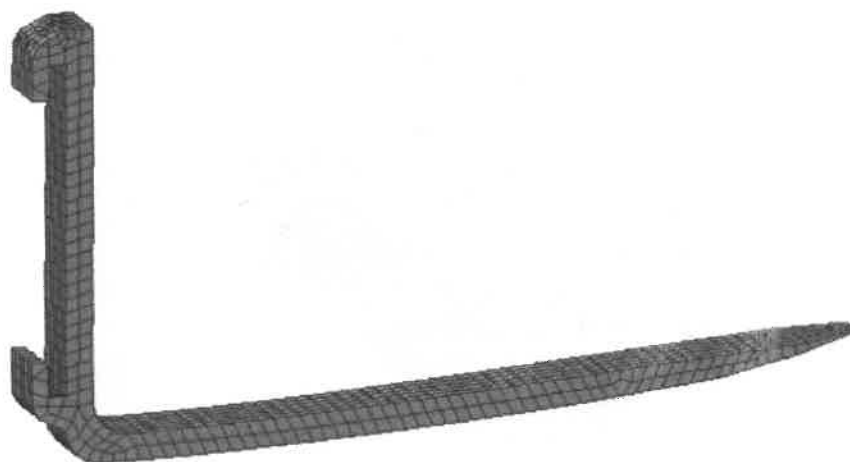
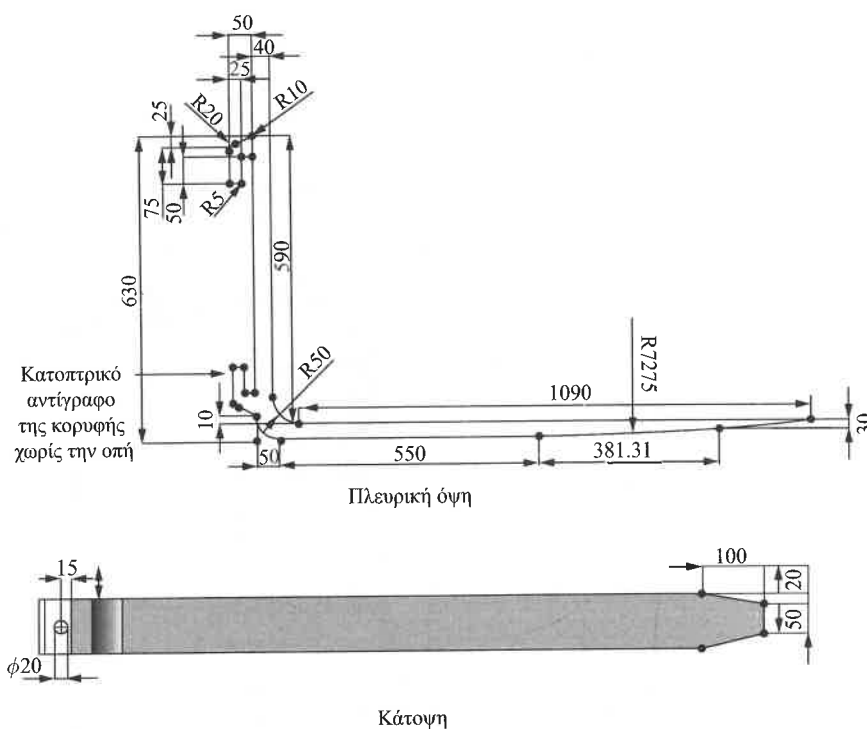
- 11.20 Ένας σιδηρουργός θέλει να σφυρηλατήσει ένα δοκίμιο χρησιμοποιώντας τον άκμονα (αμόνι) που φαίνεται στην Εικόνα Π11–20. Ο άκμονας είναι βιδωμένος σε έναν πάγκο εργασίας με μπουλόνια διαμέτρου 114 mm. Είναι κατασκευασμένος από γκρίζο χυτοσίδηρο με $E = 100 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.21$. Η εφελκυστική και η θλιπτική αντοχή



■ Εικόνα Π11–20 Άκμονας που χρησιμοποιείται για σφυρηλάτηση (με τις διαστάσεις σε mm) και τυπικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (κατόπιν ευγενικής παραχώρησης του Dan Baxter) [Στο ένθετο θα δείτε την εικόνα στην έγχρωμη έκδοσή της.]

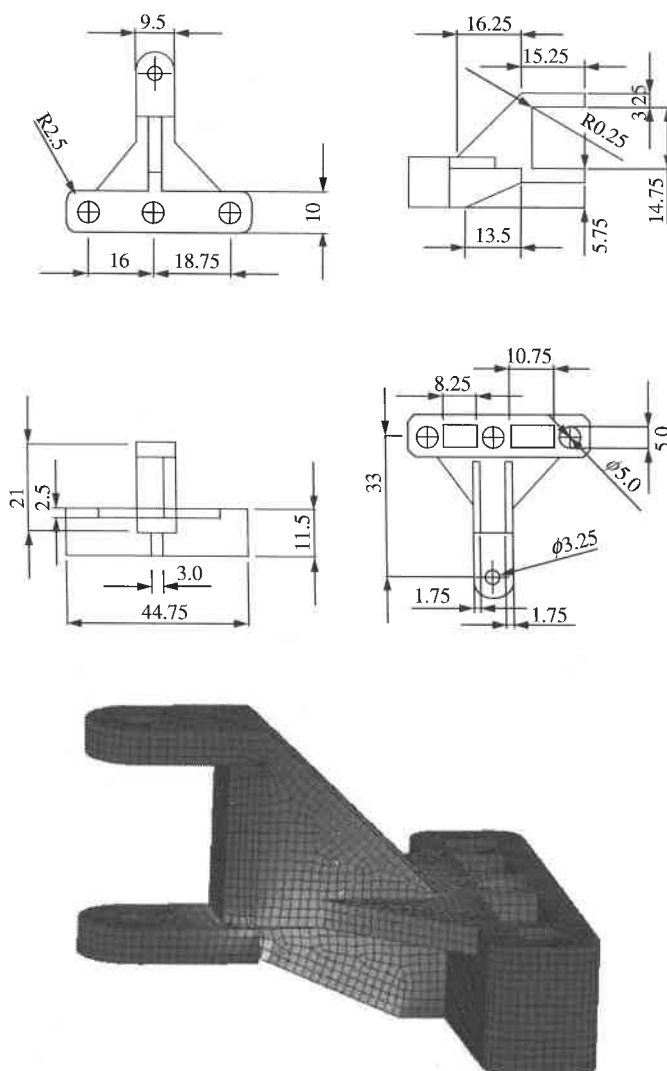
είναι 214 MPa και 751 MPa, αντίστοιχα. Στη διάρκεια της διαδικασίας σφυρηλάτησης εφαρμόζεται στο κέρασ του άκμονα επιφανειακή πίεση 6.9 MPa. Προσδιορίστε τη μέγιστη κύρια τάση και τη θέση της στον άκμονα. (Αυτό το πρόβλημα είναι από τον Dan Baxter.)

- 11.21** Μια περόνη από έναν περονοφόρο ανυψωτήρα περιορίζεται από δύο ράβδους (δεν φαίνονται) που ταιριάζουν σε κάθε απόφυση στο κατακόρυφο τμήμα της περόνης όπως φαίνεται στην Εικόνα Π11-21. Η περόνη είναι κατασκευασμένη από χάλυβα AISI 4130 με $E = 206.84 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.30$, και αντοχή διαρροής 360 MPa. Η περόνη φορτίζεται με επιφανειακή έλξη 46189 N/m^2 στην άνω επιφάνεια. Πόσο θα εκτραπεί η περόνη και ποια είναι η μέγιστη τάση von Mises; Ποιος είναι ο συντελεστής ασφαλείας σε διαρροή του υλικού; (Αυτό το πρόβλημα είναι από τον Jay Emmerich.)



■ Εικόνα Π11-21 Περόνη από περονοφόρο ανυψωτήρα όπου φαίνονται οι διαστάσεις (όλες οι διαστάσεις σε mm) και το τυπικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (από τον Jay Emmerich)

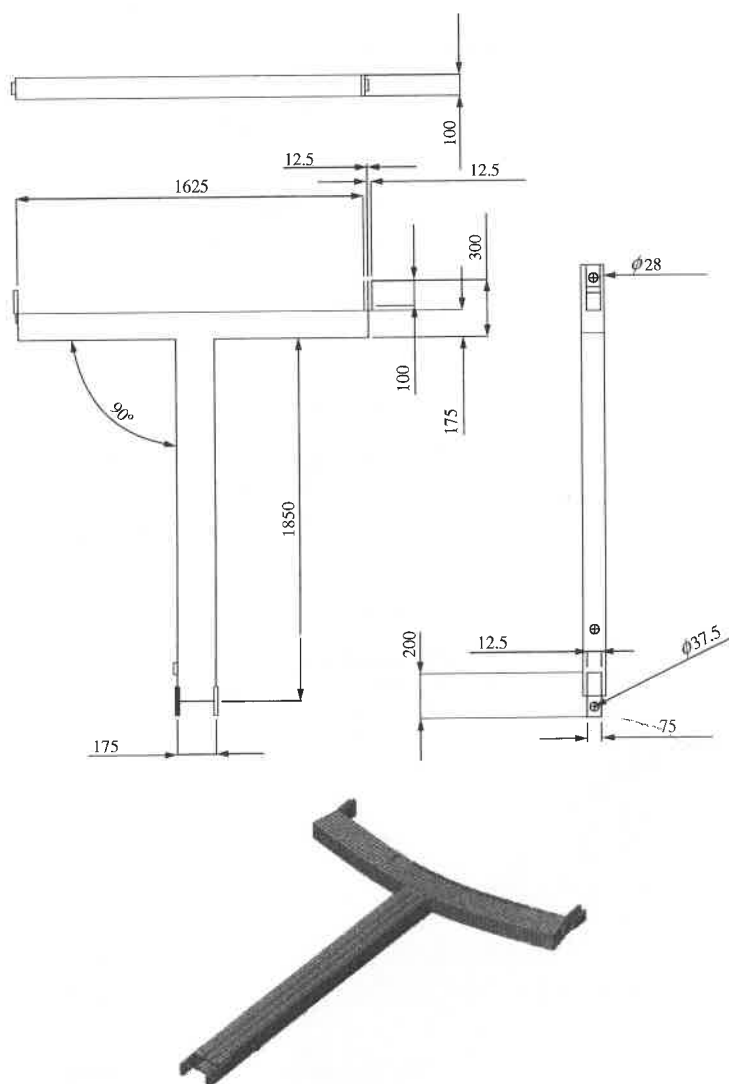
- 11.22 Στην Εικόνα Π11–22 φαίνεται μια εμπρόσθια μονάδα διεύθυνσης τηλεχειριζόμενου αυτοκινήτου. Ο βραχίονας είναι κατασκευασμένος από χυτευμένο πλαστικό ABS με μέτρο ελαστικότητας 2.5 GPa και αντοχή εφελκυσμού 41 MPa. Η βάση της μονάδας διεύθυνσης είναι στερεωμένη στο πλαίσιο του αυτοκινήτου με κοχλίες, έτσι ώστε οι τρεις οπές από τις οποίες διέρχονται οι κοχλίες να θεωρούνται πακτωμένες γύρω στην κυλινδρική επιφάνειά τους (όπως φαίνεται στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων). Περιφερειακά στο άνω δάκτυλο εφαρμόζεται δύναμη 13 N (όπως φαίνεται στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων). Αυτή η δύναμη αντιπροσωπεύει το τυπικό βάρος του τηλεχειριζόμενου αυτοκινήτου. Προσδιορίστε τη μέγιστη τάση von Mises και τη μέγιστη μετατόπιση του βραχίονα ελέγχου. (Αυτό το πρόβλημα είναι από τον Phillip Grommes.)



■ Εικόνα Π11–22 Εμπρόσθια μονάδα διεύθυνσης τηλεχειριζόμενου αυτοκινήτου (όλες οι διαστάσεις σε mm) και μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (κατόπιν ευγενικής παραχώρησης του Phillip Grommes) [Στο ένθετο θα δείτε την εικόνα στην έγχρωμη εκδοχή της.]



- 11.23 Ο κοτσαδόρος που φαίνεται στην Εικόνα Π11–23 χρησιμοποιείται σε έναν δίσκο International 496. Ο κοτσαδόρος είναι κατασκευασμένος από χάλυβα 1018 ψυχρής έλασης με $E = 200$ GPa και $\nu = 0.30$. Η αντοχή διαρροής του υλικού είναι 370 MPa. Ο δίσκος απαιτεί 150 kW για να έλξει με ταχύτητα 10 km/h. Η συνολική δύναμη των 55.6 kN στον κοτσαδόρο προσδιορίζεται τότε από τη διαίρεση της ισχύος με την ταχύτητα. Προσδιορίστε τη μέγιστη τάση von Mises και την εκτροπή του κοτσαδόρου υπό το φορτίο. Στο μοντέλο, χρησιμοποιήστε δύο δυνάμεις 27.8 kN εφαρμοσμένες σε κάθε πλευρά του κοτσαδόρου και πακτώστε τους κόμβους στα άκρα του προσαρτήματος στο πλαίσιο δίσκου (όπως φαίνεται στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων). (Αυτό το πρόβλημα είναι από τον Byron Manternach.)



■ Εικόνα Π11–23 Κοτσαδόρος από έναν δίσκο International 496 πλάτους 7.3 m (διαστάσεις σε mm) και τυπικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (κατόπιν ευγενικής παραχώρησης του Byron Manternach)