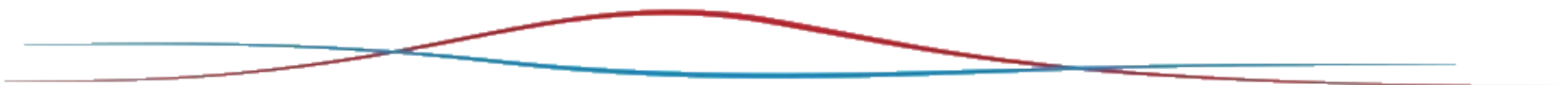




Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις Αναζήτηση μιας γενικευμένης αρχής διατήρησης

*Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΛΜΕΠΑ*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Οι διάφορες εξισώσεις που συναντώνται στην ανάλυση των θερμοφυσικών φαινομένων διέπονται από μία αρχή διατήρησης για κάποια φυσική ποσότητα.

Αρχή διατήρησης (σε χώρο Euler – Ακίνητος παρατηρητής)

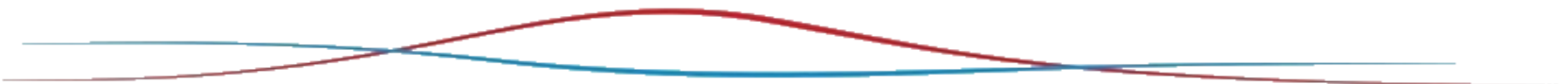
Συσσώρευση + Εκροή – Εισροή = Παραγωγή – Κατανάλωση

Δηλαδή οι όροι της διαφορικής εξίσωσης ορίζουν κάποια δράση με τρόπο ώστε το άθροισμα των όρων να συνεπάγεται ένα ισοζύγιο.

Η φυσική ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή, Φ) που διατηρείται μπορεί να είναι η μάζα m , το κλάσμα μάζας ενός συστατικού j , ω_j , η ταχύτητα u , η ενέργεια e , η ενθαλπία h , η θερμοκρασία T .

Συνήθως η εξαρτημένη μεταβλητή εκφράζεται ανηγμένη στη μονάδα μάζας, δηλ. εκφράζεται ως ειδική ποσότητα, π.χ. το κλάσμα μάζας συστατικού στη μάζα του ρέοντος μίγματος, ορμή ανά μονάδα μάζας (που είναι η ταχύτητα), η ειδική ενθαλπία κτλ.

Αν ϕ είναι μια ειδική ποσότητα, τότε το γινόμενο $\rho^*\phi$ εκφράζει το ποσό της ποσότητας/μεταβλητής Φ στον θεωρούμενο όγκο.





Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Ρυθμός μεταβολής εξαρτημένης μεταβλητής στο χρόνο και στον χώρο

Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μεταφερόμενης ειδικής ποσότητας Φ στον θεωρούμενο όγκο εκφράζεται ως $\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}$.

Ο ρυθμός μεταβολής στο χώρο δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο ρυθμός καθαρής εκροής στις διάφορες διευθύνσεις του θεωρούμενου όγκου. Σε καρτεσιανό σύστημα η εκροή είναι το διάνυσμα:

$\vec{J} = J_x i + J_y j + J_z k$, όπου i, j, k τα μοναδιαία διανύσματα των διευθύνσεων x, y, z .

Ο χωρικός ρυθμός καθαρής εκροής ανά μονάδα όγκου λοιπόν θα είναι:

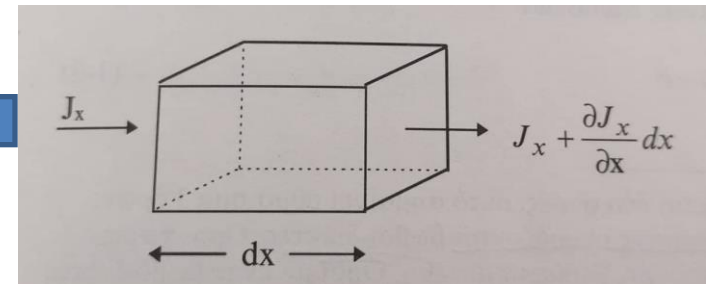
$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial x_m} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \text{div} \vec{J}$$

Όπου m : διεύθυνση i ή j ή k .

Ανά μονάδα όγκου
δηλ.
 $1/dV = 1/(dx * dy * dz)$

Συνολικός ρυθμός
εκροής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J_x}{\partial x} dx * dy * dz \\ & + \frac{\partial J_y}{\partial y} dx * dy * dz \\ & + \frac{\partial J_z}{\partial z} dx * dy * dz \end{aligned}$$



Η ερμηνεία του όρου $\text{div} \vec{J}$ είναι πολύ χρήσιμη στη διαμόρφωση αριθμητικών μεθόδων ισοζυγίων σε όγκους ελέγχου!



Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Διατήρηση της μάζας – Εξίσωση συνέχειας

Λεκτική περιγραφή

Ρυθμός αύξησης της πυκνότητας + Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας = 0

Μαθηματική περιγραφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho * \vec{u}) = 0$$

Ειδικές (συχνές) περιπτώσεις:

1. Ασυμπίεστο ρευστό $\Rightarrow \rho = \text{σταθ.} \Rightarrow$ ο όρος χρονικής παραγώγου μηδενίζεται και το ισοζύγιο γίνεται:

$$\rho \text{div} \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{u} = 0.$$

2. Μόνιμη ροή (αμετάβλητη στο χρόνο) (για ασυμπίεστο ή συμπιεστό ρευστό) $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, οπότε το ισοζύγιο μάζας γίνεται: $\text{div}(\rho \cdot \vec{u}) = 0$.

Handwritten mathematical derivation of the continuity equation for incompressible and steady flow.

Top line:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad (1)$$

Second line:
$$\text{Ασυμπίεστο ρευστό} \Rightarrow \rho = \text{σταθ. στο χώρο και στο χρόνο}$$

Third line:
$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ ή } \text{div} \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Fourth line:
$$\text{Ασυμπίεστη ροή} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \text{ και } \rho = \text{σταθ. στο χώρο}$$

Fifth line:
$$\text{62 μεταβλητή κατάσταση} \Rightarrow \text{Μόνιμη ροή}$$

Sixth line:
$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \xrightarrow{\text{Μόνιμη ροή}} \text{div} \vec{u} = 0 \quad (3)$$



Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Διατήρηση της ορμής (για τα ρευστά γνωστή και ως εξίσωση Navier-Stokes)

Λεκτική περιγραφή

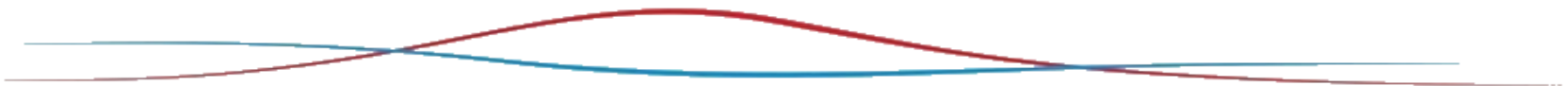
Ρυθμός αύξησης της ορμής στη διεύθυνση m + Καθαρή εκροή ορμής στον όγκο ελέγχου = Καθαρή δύναμη που ασκείται στον όγκο ελέγχου

Μαθηματική περιγραφή (στην διεύθυνση m)

$$\frac{\partial(\rho u_m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} u_m) = \text{div} \vec{p}_m + g_m - f_m$$

Όπου $\vec{u}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας, u_m είναι η συνιστώσα ταχύτητας στη m διεύθυνση, g_m είναι μία δύναμη όγκου (π.χ. βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητική δύναμη, κτλ.), f_m είναι η δύναμη αντίδρασης π.χ. η αντίσταση κάποιου πορώδους στερεού εμποδίου.

Όπου $\vec{p}_m$ είναι το διάνυσμα τάσεων του ρευστού (διατμητικές και κάθετες τάσεις) που επηρεάζουν την ορμή στη m διεύθυνση.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Διατήρηση της ορμής (για τα ρευστά γνωστή και ως εξίσωση Navier-Stokes)

Ειδική περίπτωση – Απλοποίηση για ασυμπίεστο ρευστό

Ασυμπίεστο ρευστό $\Rightarrow \rho = \text{σταθ.}$

Από εξίσωση συνέχειας (διατήρηση μάζας) προκύπτει: $\text{div } \vec{u} = 0$

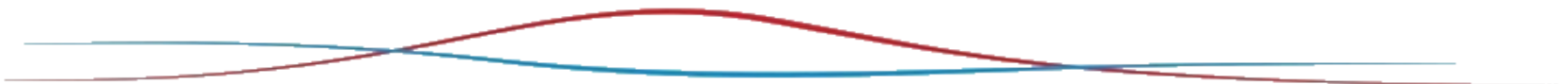
Οπότε, στο ισοζύγιο ορμής, η απόκλιση του ρυθμού εκροής ορμής γίνεται (αφού βγάλουμε έξω από τον τελεστή την σταθερή πυκνότητα):

$$\text{div}(\vec{u}u_m) = u_m \text{div } \vec{u} + \vec{u} \text{grad } u_m = \vec{u} \text{grad } u_m$$

Το ισοζύγιο ορμής γίνεται:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \vec{u} \text{grad } u_m = \frac{1}{\rho} (\text{div } \vec{p}_m + g_m - f_m) \quad \text{ή}$$

$$\frac{Du_m}{Dt} = \frac{1}{\rho} (\text{div } \vec{p}_m + g_m - f_m)$$





Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Διατήρηση της ενέργειας (Εφαρμογή μόνο για θερμική ενέργεια χωρίς χημικό συστατικό)

Λεκτική περιγραφή

Ρυθμός αύξησης της ενθαλπίας + Ρυθμός καθαρής εκροής ενθαλπίας + Ρυθμός καθαρής εκροής θερμότητας = Πηγές θερμότητας

Μαθηματική περιγραφή

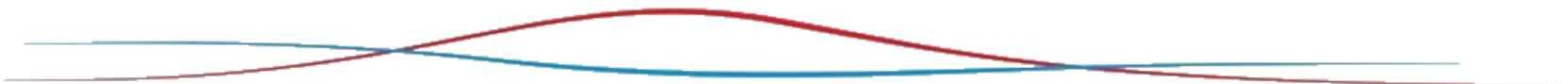
$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} h + \vec{q}) = S_q$$

Όπου h είναι η ενθαλπία του ρευστού, $\vec{q}$ η εκροή θερμότητας, και S_q η πηγή θερμότητας.

Ειδική περίπτωση – Απλοποίηση: Ασυμπίεστο ρευστό

Σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας (όπως έγινε για τη διατήρηση ορμής):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } h = \frac{1}{\rho} (-\text{div } \vec{q} + S_q) \quad \text{ή} \quad \frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho} (-\text{div } \vec{q} + S_q)$$





Αρχές διατήρησης – Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Διατήρηση μάζας χημικού συστατικού

Λεκτική περιγραφή

Ρυθμός αύξησης της μάζας του συστατικού l + Ρυθμός καθαρής εκροής με συναγωγή και διάχυση = Ρυθμός παραγωγής με χημική αντίδραση

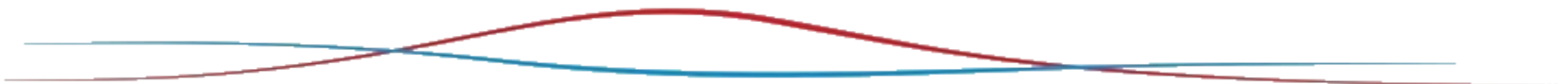
Μαθηματική περιγραφή

$$\frac{\partial(\rho\omega_l)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}\omega_l + \vec{J}_l) = R_l$$

Όπου ω_l είναι το κλάσμα μάζας του συστατικού l στο μίγμα, $\vec{J}_l$ είναι η καθαρή εκροή του χημικού συστατικού από τον θεωρούμενο όγκο (διάχυση) και R_l είναι ο ρυθμός παραγωγής λόγω χημικής αντίδρασης.

Ειδική περίπτωση: Ασυμπίεστο ρευστό

$$\frac{D\omega_l}{Dt} = \frac{1}{\rho}(-\text{div}\vec{J}_l + R_l)$$





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

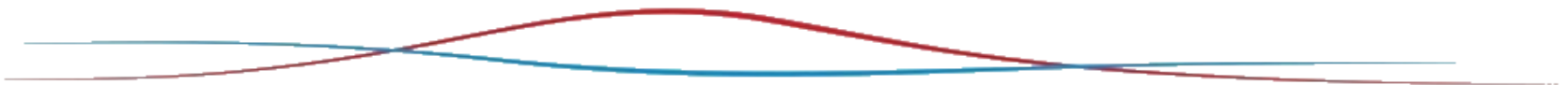
Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Χειρισμός όρων καθαρής εκροής – Φαινομενολογικοί νόμοι

Οι αρχές που διέπουν τις βασικές διεργασίες μεταφοράς (που είδαμε παραπάνω) περιέχουν ειδικούς όρους καθαρής εκροής π.χ. η εκροή θερμότητας $\vec{q}$, των οποίων οι χωρικοί ρυθμοί μεταβολής μας δίνουν όρους διάχυσης στις εξισώσεις μεταφοράς. Είναι φανερό ότι για την επίλυση των εξισώσεων θέλουμε να λιγοστέψουμε τους αγνώστους, συνεπώς υπάρχει ανάγκη οι όροι διάχυσης να εκφραστούν ως συνάρτηση της εκάστοτε μεταφερόμενης ποσότητας.

Μία προσέγγιση προσδιορισμού των ζητούμενων αυτών σχέσεων είναι η λεγόμενη φαινομενολογική προσέγγιση. Βάσει της προσέγγισης αυτής, ορίζονται σχέσεις μεταξύ τάσεων (ή καθαρής εκροής) και του ρυθμού παραμόρφωσης (κλίση της μεταφερόμενης ποσότητας) και οι απαιτούμενες σταθερές αναλογίας μεταξύ των δύο όρων προσδιορίζονται πειραματικά.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Χειρισμός όρων καθαρής εκροής – Φαινομενολογικοί νόμοι

Νόμος Fourier για την αγωγή θερμότητας

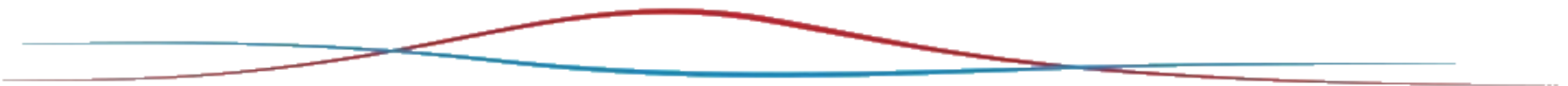
Η θερμότητα που μεταφέρεται με αγωγή είναι ανάλογη της κλίσης θερμοκρασίας.

Η μεταφορά γίνεται σε διεύθυνση αντίθετη της κλίσης (από τα θερμά προς τα ψυχρά στρώματα), οπότε ο ρυθμός ροής θερμότητας με αγωγή γράφεται:

$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$, όπου λ (ή λ_{eff} στην περίπτωση τυρβώδους ροής) είναι ο συντελεστής αναλογίας και συχνά αναφέρεται ως συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας (W/(mK)). Όπου T είναι η θερμοκρασία (K).

Όπου λ μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση ενός γενικευμένου συντελεστή εναλλαγής θερμότητας Γ_h , μέσω του συντελεστή θερμοχωρητικότητας c_p , ως: $\lambda = c_p \cdot \Gamma_h$.

Επειδή στην ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς χρειαζόμαστε την διασύνδεση με τις άλλες εξισώσεις, η διασύνδεση με την ορμή γίνεται μέσω του αδιάστατου αριθμού Prandtl που εκφράζει το σχετικό μέγεθος της διάχυσης ορμής λόγω ιξώδους (συνεκτικότητας) προς τη θερμική διάχυση: $Prandtl = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda}$. Ο αριθμός αυτός έχει υπολογιστεί για διάφορα ρευστά, συνεπώς με γνωστό τον αριθμό Prandtl μπορούμε να εκτιμήσουμε το λ .





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Χειρισμός όρων καθαρής εκροής – Φαινομενολογικοί νόμοι

Νόμος Fourier για την αγωγή θερμότητας

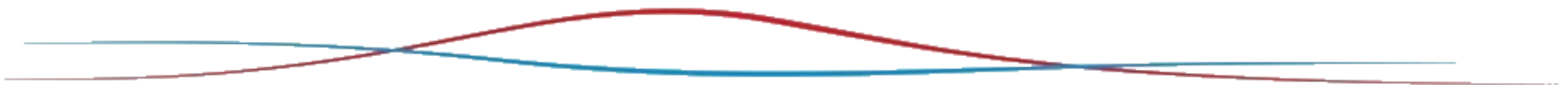
Η εξίσωση θερμικής ενέργειας γράφεται (στη γενική περίπτωση συμπιεστού ρευστού, δηλ. $\rho \neq \text{σταθ.}$):

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} h - \lambda \text{grad} T) = S_h$$

Επειδή $h = c_p T$, η εξίσωση διατήρησης γίνεται:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho \vec{u} T - \frac{\lambda}{c_p} \text{grad} T \right) = \frac{1}{c_p} S_h$$

Δηλ. για την εξίσωση διατήρησης θερμικής ενέργειας η εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να είναι η ενθαλπία ή η θερμοκρασία.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Χειρισμός όρων καθαρής εκροής – Φαινομενολογικοί νόμοι

Νόμος Fick για τη διάχυση χημικού συστατικού

Ένα συστατικό μεταφέρεται με διάχυση αντίθετα προς την κλίση του κλάσματος μάζας (δηλ. από τις υψηλές προς τις χαμηλές συγκεντρώσεις) και ανάλογα προς αυτή την κλίση:

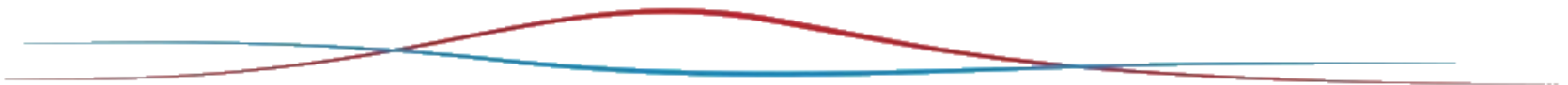
$$\vec{J}_l = -\Gamma_l \text{grad } \omega_l$$

Όπου Γ_l είναι ο συντελεστής εναλλαγής που πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει (γνωστού για διάφορα συστατικά) συντελεστή διάχυσης D , ως: $\Gamma_l = \rho * D$.

Επειδή πάλι η εξίσωση χημικού συστατικού πρέπει να διασυνδεθεί με την εξίσωση ορμής, αυτό γίνεται με τον αδιάστατο αριθμό Schmidt μέσω του ιξώδους: $Schmidt = \mu/\Gamma_l$

Τελικά, η εξίσωση διατήρησης του χημικού συστατικού γράφεται:

$$\frac{\partial(\rho\omega_l)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho \vec{u} \omega_l - \frac{\mu}{Schmidt} \text{grad} \omega_l \right) = R_l$$





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Χειρισμός όρων καθαρής εκροής – Φαινομενολογικοί νόμοι

Νόμος Newton για το ιξώδες

Η τάση παραμορφούμενου ρευστού είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης. Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από τις τοπικές ιδιότητες του ρευστού (ιξώδες). Η λεπτομερής έκφραση του νόμου είναι αρκετά περίπλοκη καθώς περιλαμβάνει όλες τις ιξώδεις τάσεις σε όλες τις διευθύνσεις της ροής (τανυστής τάσεων). Σε απλές ροές (π.χ. μόνο με κατακόρυφες κλίσεις, όπως είναι η ροή οριακού στρώματος) ο νόμος Newton μπορεί προσεγγιστικά να γραφεί ως:

$$\tau = \mu \cdot \text{grad } u = \vec{p}$$

Οπότε, η εξίσωση διατήρησης ορμής γράφεται (προσεγγιστικά) στη m διεύθυνση:

$$\frac{\partial(\rho u_m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} u_m - \mu \text{grad } u_m) = g_m - f_m$$

Στη γενική περίπτωση ροής, όλοι οι πρόσθετοι όροι διατμητικών τάσεων μεταφέρονται στο δεξιό μέρος της εξίσωσης και μεταχειρίζονται ως όροι πηγής. Το δεξιό μέρος μπορεί να γραφεί γενικά ως S_m , ως ο όρος που περιλαμβάνει όλους τους όρους πηγής (δυνάμεις που προκαλούν παραμορφώσεις).





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

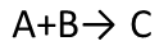
Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις πηγές στις εξισώσεις διατήρησης

Πηγές στην εξίσωση διατήρησης χημικού συστατικού

Συνήθως ένα χημικό συστατικό προκύπτει από χημική αντίδραση, και η πηγή του συστατικού στο μίγμα είναι ο ρυθμός παραγωγής του από τη χημική αντίδραση. Ο ρυθμός παραγωγής προκύπτει από νόμους χημικής κινητικής. Για παράδειγμα, στην αναντίστρεπτη αντίδραση:

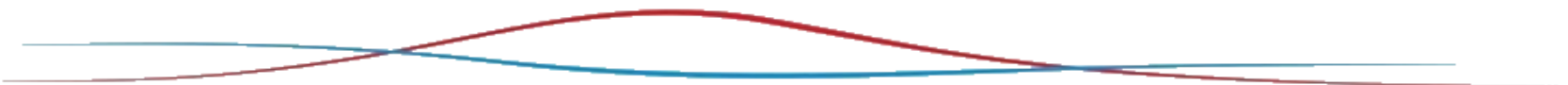


Αν θεωρηθεί ότι η αντίδραση ελέγχεται από τη συχνότητα των συγκρούσεων μεταξύ των μορίων των ιδανικών αερίων A και B, τότε ο ρυθμός παραγωγής (όρος πηγής) είναι:

$$R_A = -z\omega_A^a \cdot \omega_B^b \rho^c \cdot \exp\left[-\frac{E'}{RT}\right]$$

Όπου z, a, c και E' , είναι οι σταθερές της αντίδρασης.

Οι χημικές αντιδράσεις είναι πολύπλοκες διότι συνήθως παίρνουν μέρος πολλά συστατικά σε ταυτόχρονες (πολλές φορές, αντιστρεπτές αντιδράσεις). Συνεπώς, στην πράξη χρησιμοποιούνται εξιδανικευμένα μοντέλα χημικής αντίδρασης, επειδή πολλές φορές τα διαθέσιμα δεδομένα δεν είναι πλήρη και χάνουν μείωσης του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

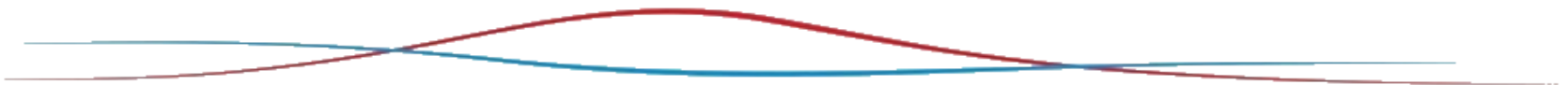
Συνήθεις πηγές στις εξισώσεις διατήρησης

Πηγές στην εξίσωση διατήρησης ενέργειας

Για την απλή περίπτωση που μόνο η μεταφορά θερμότητας είναι η κυβερνούσα διεργασία, τότε συχνά ο όρος πηγής μπορεί να είναι μία απλή σταθερή τιμή π.χ. επιφανειακή ή ογκομετρική πηγή θερμότητας ή ένας ρυθμός μεταβολής της θερμότητας.

Ανάλογα με τους κυβερνώντες μηχανισμούς μεταφοράς θερμότητας εισάγονται και οι αντίστοιχοι όροι πηγής. Έτσι, όταν έχουμε και φαινόμενα διάδοσης με ακτινοβολία τότε στον όρο πηγής προστίθεται και ο όρος παραγωγής με ακτινοβολία (ανάλογος της 4^{ης} δύναμης της θερμοκρασίας, με συντελεστή αναλογίας τη σταθ. Pascal).

Στην περίπτωση χημικής αντίδρασης (εξώθερμη (πηγή ενέργειας) ή ενδόθερμη (καταβόθρα ενέργειας)), οι πηγές συχνά λαμβάνονται από εμπειρικά μοντέλα.





Συνήθεις πηγές στις εξισώσεις διατήρησης

Πηγές στην εξίσωση διατήρησης ορμής

Στη γενική περίπτωση ο όρος πηγής είναι:

$$s_m = \operatorname{div} \vec{p}_m + g_m - f_m$$

1. Κλίση πίεσης: $\operatorname{div} \vec{p}_m = \operatorname{div}(\vec{\tau}_m - \vec{i}_m p) = \operatorname{div} \vec{\tau}_m - \vec{i}_m \operatorname{grad} p$

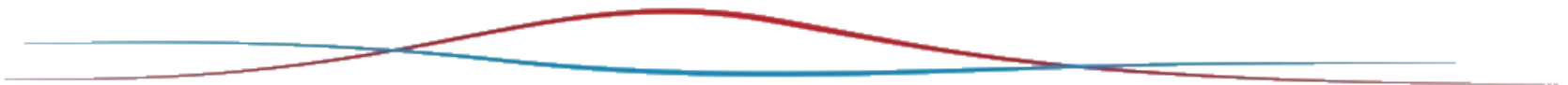
Οι κύριοι όροι της απόκλισης της τάσης ($\mu \cdot \operatorname{grad} u$) μεταφέρονται στο αριστερό μέρος της εξίσωσης διατήρησης, ενώ οι υπόλοιποι όροι παραμένουν στο δεξιό σκέλος ως όροι πηγής.

2. Εσωτερική αντίσταση: $f_m = F_m \cdot u_m$

3. Όρος βαρύτητας: $g_m = \rho \cdot \vec{i}_m \cdot g$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Άλλοι όροι πηγών:

- Όροι λόγω κινούμενων συστημάτων συντεταγμένων.
- Όροι λόγω μη ορθογωνικότητας του συστήματος συντεταγμένων.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις πηγές στις εξισώσεις διατήρησης

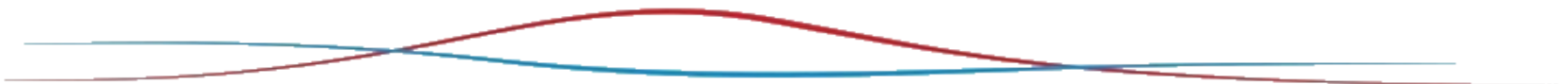
Πηγές μάζας στην εξίσωση συνέχειας

Με αυστηρούς όρους δεν υπάρχουν πηγές μάζας. Είναι όμως χρήσιμο να διευρυνθεί η εξίσωση συνέχειας ώστε να περιλαμβάνει και όρους πηγής κυρίως για δύο λόγους:

1. Σε ροή δύο ανεμεμειγμένων ρευστών μπορεί να μεταφέρεται μάζα από το ένα ρευστό στο άλλο. Παράδειγμα: Σταγονίδια νερού αιωρούμενα σε ατμό, με εξάτμιση και συμπύκνωση μεταξύ των δύο φάσεων.
2. Για αριθμητικούς λόγους: Κατά την επαναληπτική επίλυση, στο αρχικό στάδιο ΔΕΝ ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας, συνεπώς τα υπόλοιπα (residuals) θα μπορούσε να θεωρηθούν ως πηγές μάζας.

Στη γενική της μορφή λοιπόν, η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{u}) = S_{mass}$$





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Γενικευμένη εξίσωση διατήρησης

Είναι φανερό ότι όλες οι παραπάνω εξισώσεις έχουν την ίδια μορφή:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \varphi - \Gamma_{\varphi} \text{grad } \varphi) = S_{\varphi}$$

Όπου

Με $\varphi=1 \Rightarrow$ Εξίσωση συνέχειας (Διατήρηση της μάζας)

Με $\varphi=u_m \Rightarrow$ Εξίσωση ορμής στην m διεύθυνση

Με $\varphi=h$ (ή $c_p \cdot T$) $\Rightarrow$ Εξίσωση ενέργειας

Με $\varphi=\omega_i \Rightarrow$ Εξίσωση μεταφοράς χημικού είδους.

Σε μορφή καρτεσιανών τανυστών:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \cdot \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma_{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] = S_{\varphi}$$

Μία εξίσωση μεταφοράς μετατρέπεται στη γενική μορφή, με ανακατάταξη των όρων της μέχρις ότου, για το δεδομένο φ , οι όροι χρονικής μεταβολής, συναγωγής και διάχυσης προσομοιάζουν σε αυτούς της γενικής μορφής. Οι εναπομείναντες όροι μεταβαίνουν στο δεξιό σκέλος ως όροι πηγής.

Έτσι, καταλήγουμε να μας ενδιαφέρει η επίλυση μόνο μιας εξίσωσης (γενική μορφή εξίσωσης διατήρησης). Αυτή η ιδέα οδηγεί σε σοβαρότατη οικονομία χρόνου. Σε ένα πρόγραμμα Η/Υ αναπτύσσεται ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων της γενικής μορφής που απλώς αλλάζουν οι όροι φ , $J\varphi$ και $S\varphi$ καθώς και οι αρχικές και οι οριακές συνθήκες.

Έτσι, θεμελιώνεται μία γενική μέθοδος που μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα γενικό πρόγραμμα Η/Υ για οποιαδήποτε εφαρμογή.



Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

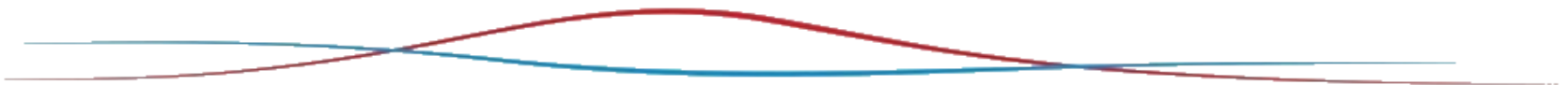
Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης ορμής

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης ορμής (σε καρτεσιανή μορφή) στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής ιδανικού ρευστού ($\mu \approx 0$) απουσία δυνάμεων αντίστασης.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης ορμής

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης ορμής (σε καρτεσιανή μορφή) στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής ιδανικού ρευστού ($\mu \approx 0$) απουσία δυνάμεων αντίστασης.

Λύση

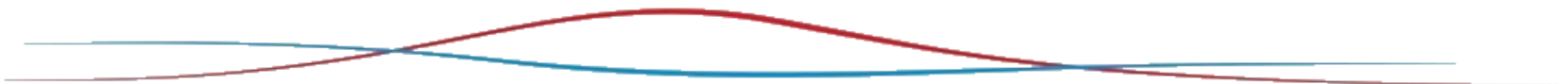
Ιδανικό ρευστό: $\mu \approx 0$ (μηδενισμός όρου διάχυσης και διατμητικών τάσεων)

Εξίσωση διατήρησης ορμής:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} u_i - \mu \text{grad } u_i) = -\text{grad } p + g_i - f_i$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} u_i) = -\text{grad } p + g_i$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$$





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

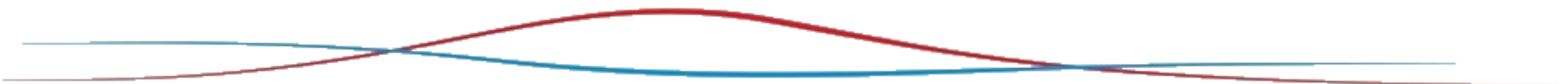
Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης ορμής

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης ορμής (σε καρτεσιανή μορφή) στην περίπτωση ασυμπίεστου και ιδανικού ρευστού ($\mu \approx 0$) απουσία δυνάμεων αντίστασης.





Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης ορμής

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης ορμής (σε καρτεσιανή μορφή) στην περίπτωση ασυμπίεστου και ιδανικού ρευστού ($\mu \approx 0$) απουσία δυνάμεων αντίστασης.

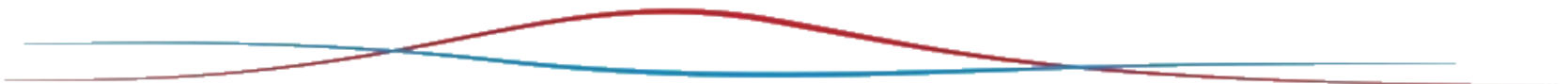
Λύση

Στο ασυμπίεστο ρευστό ισχύει $\text{div } \vec{u} = 0$ και $\rho = \text{σταθ.}$

Επιπλέον, Ιδανικό ρευστό: $\mu \approx 0$ (μηδενισμός όρου διάχυσης και διατμητικών τάσεων)

Συνεπώς, αρκεί από την παραπάνω λύση να βγάλουμε την πυκνότητα εκτός διαφορικών, δηλ.

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \cdot u_i) = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \right)$$





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

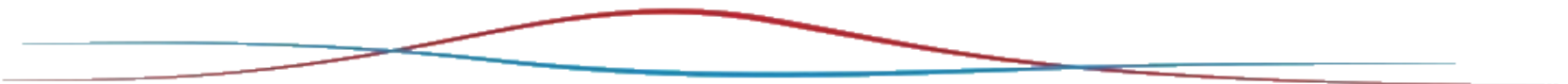
Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης χημικού είδους

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης χημικού είδους στην περίπτωση που η χημική αντίδραση και η συναγωγή είναι αμελητέες σε ασυμπίεστο ρευστό, και που ο συντελεστής διάχυσης είναι ομοιόμορφος στο πεδίο ροής.





Θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις

Γενικευμένη αρχή διατήρησης

Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Συνήθεις απλοποιήσεις των εξισώσεων διατήρησης

Παράδειγμα απλοποίησης της εξίσωσης χημικού είδους

Να γραφεί η εξίσωση διατήρησης χημικού είδους στην περίπτωση που η χημική αντίδραση και η συναγωγή είναι αμελητέες σε ασυμπίεστο ρευστό, και που ο συντελεστής διάχυσης είναι ομοιόμορφος στο πεδίο ροής.

Λύση

Αμελητέα χημική αντίδραση (Αδρανές συστατικό) $\Rightarrow R_l = 0$

Ασυμπίεστο ρευστό: $\rho = \text{σταθ.}$

Αμελητέα συναγωγή $\Rightarrow \text{div}(\rho \vec{u} \omega_l) = 0$

Ομοιόμορφος συντελεστής διάχυσης $\Rightarrow \Gamma_l = \text{σταθ}$

$$\frac{\partial(\rho \omega_l)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \omega_l - \Gamma_l \text{grad} \omega_l) = R_l$$

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial t} = \frac{\Gamma_l}{\rho} \cdot \text{div}(\text{grad} \omega_l)$$

