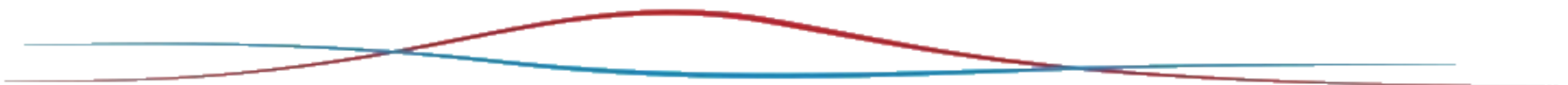




Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

*Μάθημα: Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΛΜΕΠΑ*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής





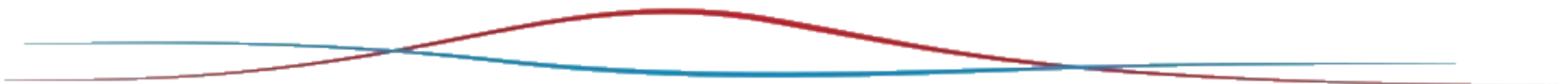
Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι συνάρτηση των διευθύνσεων του χώρου και του χρόνου, $\phi = \phi(x, y, z, t)$.

Για την αριθμητική επίλυση πρέπει να εκλεγούν τιμές για τις ανεξάρτητες μεταβλητές για τις οποίες θα επιλυθεί η τιμή της ϕ . Όταν η διεργασία είναι συνάρτηση της μίας διεύθυνσης τότε το πρόβλημα λέγεται μονοδιάστατο, αλλιώς διδιάστατο ή τρισδιάστατο. Εξάρτηση από το χρόνο εμφανίζεται στα λεγόμενα μεταβατικά προβλήματα (μεταβατικές ροές), σε αντίθεση με τα προβλήματα μόνιμης κατάστασης.

Κατά την επίλυση στον H/Y , η κριτική επιλογή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί μερικές φορές να ελαττώσει τις ανεξάρτητες μεταβλητές συνεπώς να μειώσει τον χρόνο επίλυσης.

Παράδειγμα: Η ροή αέρα γύρω από ένα κινούμενο αυτοκίνητο είναι μεταβατική ως προς ένα ακίνητο σύστημα συντεταγμένων (συνεπώς το πεδίο ροής θα πρέπει να επιλυθεί για πολλά χρονικά βήματα μέχρις ότου το πεδίο ροής να παραμένει αμετάβλητο με την πάροδο του χρόνου). Για ένα σύστημα συντεταγμένων όμως προσαρμοσμένο «επάνω» στο αυτοκίνητο, η ροή θα είναι μόνιμη και συνεπώς αρκεί να λύσουμε το πεδίο ροής στη μόνιμη κατάσταση (δηλ. σαν να λύνουμε στο τελικό χρονικό βήμα πέραν του οποίου οι χωρικές κατανομές των ιδιοτήτων της ροής σταθεροποιούνται).





Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

1^η ταξινόμηση: Με βάση τους συντελεστές των παραγώγων

1. Συντηρητική μορφή

Όταν οι συντελεστές των παραγώγων είναι εντός των διαφορικών και στην περίπτωση που αυτοί μεταβάλλονται τότε δεν εμφανίζονται οι μεμονωμένες παράγωγοί τους.

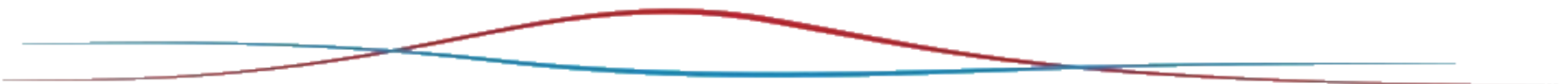
Π.χ. εξίσωση συνέχειας σε συντηρητική μορφή (διδιάστατη ροή, 2D): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$

2. Μη συντηρητική μορφή

Αναπτυγμένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης έτσι ώστε να εμφανίζονται οι μεμονωμένες παράγωγοι των συντελεστών.

Για την 2D εξίσωση συνέχειας: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$

Ένα αριθμητικό σχήμα το οποίο προκύπτει από την μη συντηρητική μορφή της εξίσωσης διατήρησης θα εμφανίσει αριθμητικές δυσκολίες στις περιοχές ασυνέχειας των συντελεστών του. Προτιμάται η ανάπτυξη αριθμητικού σχήματος από την συντηρητική μορφή των εξισώσεων.





Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

2^η ταξινόμηση: Με βάση τη συσχέτιση των συντελεστών

Οι γραμμικές (γενικότερα οι ήμι-γραμμικές) μερικές διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται στις ακόλουθες βασικές κατηγορίες:

1. Ελλειπτικού τύπου
2. Παραβολικού τύπου
3. Υπερβολικού τύπου

Η ταξινόμηση αυτή διευκολύνει την επιλογή της μεθόδου μετατροπής της συνεχούς διαφορικής εξίσωσης στο μη-συνεχές αριθμητικό πρόβλημα καθώς και στην επιλογή του κατάλληλου αλγορίθμου επίλυσης. Η ταξινόμηση βασίζεται στη σχέση μεταξύ των συντελεστών της μερικής διαφορικής εξίσωσης (ΜΔΕ).

Επειδή στα ρευστά συνηθέστερα αντιμετωπίζουμε ΜΔΕ έως 2^{ης} τάξης, θεωρείται η παρακάτω γενική μορφή:

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f \varphi = g$$





Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

2^η ταξινόμηση: Με βάση τη συσχέτιση των συντελεστών

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης, η οποία παρέχει τις χαρακτηριστικές διευθύνσεις της ΜΔΕ είναι

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

Η επίλυση του παραπάνω απλού τριωνύμου θα μας δώσει τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ:

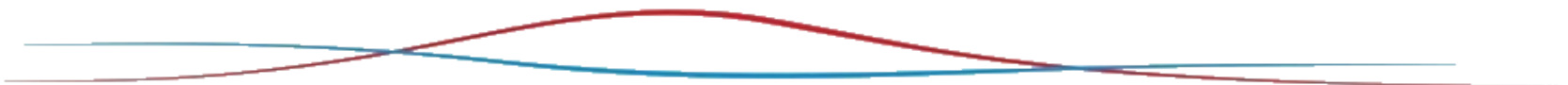
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Όπου $\Delta = 4b^2 - 4a \cdot c$ και η παραπάνω γίνεται: $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$. Άρα:

Όταν $b^2 - ac > 0$ έχουμε 2 οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών – Υπερβολικού τύπου ΜΔΕ.

Όταν $b^2 - ac = 0$ έχουμε μία οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών – Παραβολικού τύπου ΜΔΕ.

Όταν $b^2 - ac < 0$ δεν υπάρχουν χαρακτηριστικές καμπύλες – Ελλειπτικού τύπου ΜΔΕ



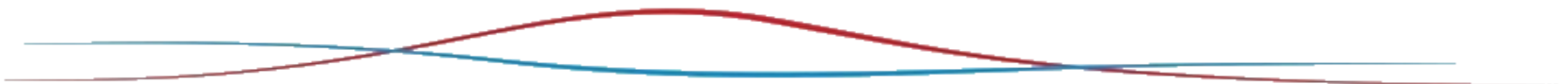


Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

2^η ταξινόμηση: Με βάση τη συσχέτιση των συντελεστών

Εξισώσεις που εξαρτώνται από το χρόνο (μεταβατικές ροές) είναι συνήθως υπερβολικού ή παραβολικού τύπου. Αν υπάρχουν φυσικοί μηχανισμοί σκέδασης/απόθεσης (dissipative process), π.χ. ισχυρές διατμητικές τάσεις ή αγωγή θερμότητας, τότε η εξίσωση διατήρησης θα είναι παραβολικού τύπου, οπότε οι βαθμίδες της εξαρτημένης μεταβλητής θα εξομαλύνονται με το χρόνο και η λύση θα γίνεται όλο και πιο λεία. Αν δεν υπάρχουν μηχανισμοί σκέδασης η λύση θα διατηρεί σταθερό πλάτος αν η εξίσωση είναι γραμμική ή θα είναι αυξανόμενου πλάτους αν η εξίσωση δεν είναι γραμμική.

Συνήθως οι ελλειπτικού τύπου εξισώσεις συναντώνται σε προβλήματα μόνιμης κατάστασης.





Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων

2^η ταξινόμηση: Με βάση τη συσχέτιση των συντελεστών

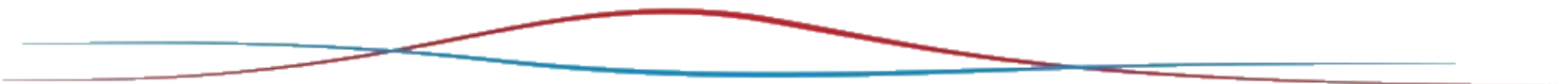
Αντιστοίχιση τύπων ΜΔΕ με τύπους διεργασιών

Μια διεργασία λέγεται **παραβολική** αν υπάρχει μια τουλάχιστον συντεταγμένη, τέτοια που οι συνθήκες σε μια δεδομένη θέση αυτής της συντεταγμένης να επηρεάζονται από αλλαγές που συμβαίνουν μόνο από τη μία πλευρά αυτής της θέσης (**μονόδρομος συντεταγμένη**). Στη μηχανική ρευστών, οι ροές που παρουσιάζουν μία μονόδρομο συντεταγμένη λέγονται **ροές οριακού στρώματος**.

Ελλειπτικές διεργασίες είναι εκείνες που οι συνθήκες σε δεδομένη θέση της συντεταγμένης επηρεάζονται από τις αλλαγές συνθηκών που συμβαίνουν σε οποιαδήποτε πλευρά αυτής της θέσης. Στη μηχανική ρευστών οι ελλειπτικές ροές λέγονται και **ροές ανακυκλοφορίας**.

Υπερβολική είναι μια διεργασία που παρουσιάζει μονόδρομη συμπεριφορά, όχι όμως κατά μήκος των συντεταγμένων, αλλά κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών της διαφορικής εξίσωσης περιγραφής της διεργασίας.

Η ύπαρξη **μονόδρομων συντεταγμένων** οδηγεί σε σημαντική οικονομία χρόνου κατά την επίλυση σε Η/Υ διότι τα φαινόμενα «ταξιδεύουν» προς μία κατεύθυνση και η επίλυση πορεύεται κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης χωρίς να γυρίζει πίσω.





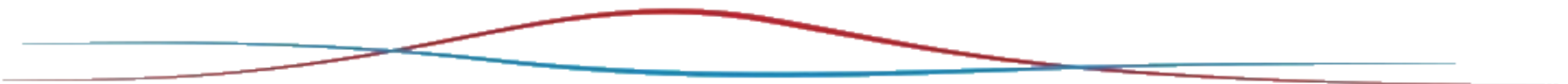
Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς

Η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων ροής είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη. Η αριθμητική λύση είναι δυνατή αλλά απαιτεί την προσέγγιση του συνεχούς χωροχρονικού πεδίου με την διακριτοποιημένη αναπαράστασή του. Οι βασικές αρχές της διαδικασίας διακριτοποίησης είναι οι ακόλουθες:

1. Το συνεχές χωροχρονικό πεδίο ορισμού του προβλήματος ροής καλύπτεται (ή προσομοιάζεται) από το **πλέγμα επίλυσης** του οποίου τα σημεία αναπαριστούν το **διακριτό πεδίο**.
2. Η συνεχής συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) αναπαρίσταται με έναν αριθμό διακριτών τιμών στα πλεγματικά σημεία. **Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις προσεγγίζονται με πεπερασμένες διαφορές** των διακριτών αυτών τιμών.
3. **Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών προκύπτουν από τις εξισώσεις μερικών παραγώγων** όταν η κάθε παράγωγος αντικατασταθεί από κάποια έκφραση πεπερασμένων διαφορών.

Έτσι, η μερική διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών που μπορεί να λυθεί αριθμητικά (συνήθως με χρήση H/Y).

Οι λύσεις του αλγεβρικού συστήματος παρέχουν τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε πλεγματικό σημείο (π.χ. θερμοκρασία, ταχύτητα) στο πεδίο ροής.





Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

Προσέγγιση με πολυώνυμα παρεμβολής

Η κατανομή της μεταφερόμενης ποσότητας (εξαρτημένης μεταβλητής), ϕ , προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο παρεμβολής n -οστού βαθμού. Ο βαθμός του πολυωνύμου καθορίζει την ακρίβεια αλλά και την πολυπλοκότητα της προσέγγισης της παραγώγου.

Έστω το απλό παράδειγμα που η κατανομή της ϕ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού:

$$\phi(x, t) = \alpha(t) \cdot x + b(t), \text{ τότε: } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha(t)$$

Οι παράμετροι α και b υπολογίζονται με βάση τις τιμές της ϕ σε 2 διακριτά σημεία.

Για το διπλανό πλέγμα στα σημεία j και $j+1$:

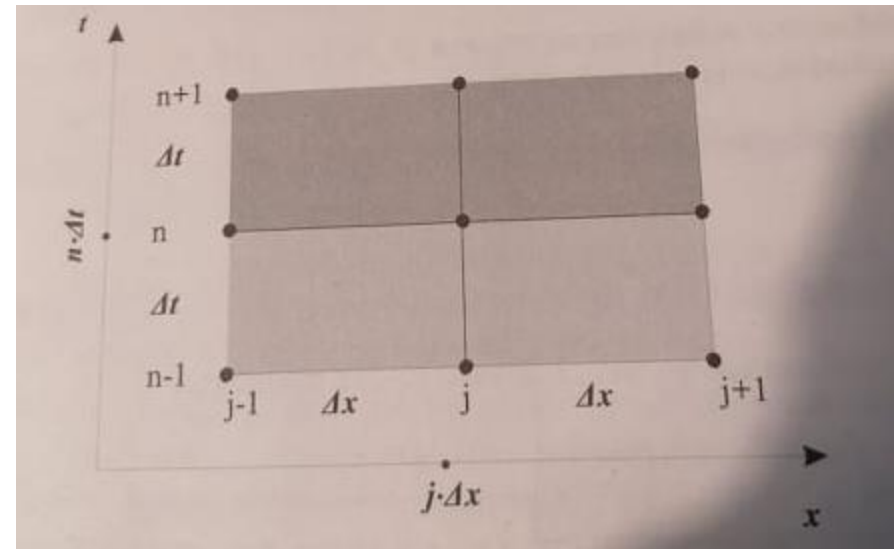
$$\phi_j^n = \alpha^n \cdot j\Delta x + b^n$$

$$\phi_{j+1}^n = \alpha^n \cdot (j+1)\Delta x + b^n$$

Αφαίρεση κατά μέλη:

$$\phi_{j+1}^n - \phi_j^n = \alpha^n \Delta x, \text{ δηλ. } \alpha^n = \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j^n$$

Που είναι η προσέγγιση με **κατάντη (εμπρός) διαφορές**.





Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

Προσέγγιση με χρήση σειρών Taylor

Ανάπτυγμα ανάντη (PIN) του σημείου j :

$$\varphi_{j-1}^n = \varphi_j^n - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \frac{\Delta x^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j \frac{\Delta x^3}{6} + \text{OAT}$$

Ανάπτυγμα κατόντη (META) του σημείου j :

$$\varphi_{j+1}^n = \varphi_j^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \frac{\Delta x^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j \frac{\Delta x^3}{6} + \text{OAT}$$

Όπου OAT=Όροι ανώτερης τάξης.

Ενδεικτικά για το κατόντη ανάπτυγμα:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j \frac{\Delta x^2}{6} + \text{OAT}}_{\Sigma.A.}$$

Ή αλλιώς: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} + \Sigma A$, όπου ΣA είναι το Σφάλμα Αποκοπής της προσέγγισης.

Εκ των 2 μεθόδων που παρουσιάστηκαν προτιμάται αυτή των σειρών Taylor διότι δίνει απευθείας την τάξη ακρίβειας της προσέγγισης. Για το προκείμενο παράδειγμα η τάξη ακρίβειας της κατόντη Διαφοράς είναι 1η τάξη, $O(\Delta x)$.



Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

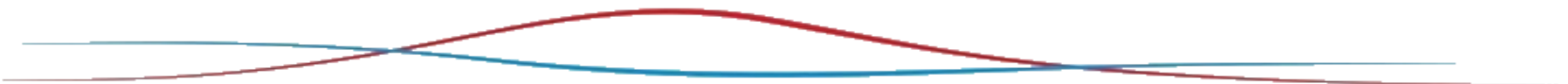
Ακρίβεια προσέγγισης παραγώγου

Η πληροφορία που δίνει το Σ.Α. αφορά στην οριακή συμπεριφορά του για $\Delta x \rightarrow 0$. Αν για $\Delta x \rightarrow 0$ είναι $\Sigma\text{Α} \rightarrow 0$ με ρυθμό ανάλογο της ν-οστής δύναμης του Δx , τότε η προσέγγιση έχει ακρίβεια ν-στής τάξης και συμβολίζεται με $O(\Delta x^\nu)$.

Η τάξη ακρίβειας δεν προσδιορίζει το μέγεθος του σφάλματος αποκοπής, απλώς δείχνει την συμπεριφορά του για Δx τείνοντος στο 0, όταν δηλ. χρησιμοποιηθούν απειροστά στο χώρο ή στο χρόνο διαστήματα.

Οι κατάντη (και οι ανάντη) διαφορές (όπως δείχθηκε παραπάνω) **έχουν 1^{ης} τάξης ακρίβεια** διότι το Σ.Α. μηδενίζεται για $\Delta x \rightarrow 0$.

Παρατήρηση: Για να επιτευχθεί $\Sigma\text{Α} \rightarrow 0$ για $\Delta x \rightarrow 0$ τότε θα πρέπει οι παράγωγοι ανώτερης τάξης του Σ.Α. να είναι φραγμένες στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$. Αν για παράδειγμα έχουμε $\Sigma\text{Α}$ ίσο μόνο με την 2ης τάξης παράγωγο και για υποδιπλασιασμό του Δx η 2^η παράγωγος διπλασιάζεται τότε το $\Sigma\text{Α}$ παραμένει σταθερό συνεπώς η προσέγγιση αποτυγχάνει. Τέτοιες καταστάσεις εμφανίζονται πάντα σε περιοχές ασυνέχειας. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι αποτυγχάνει και η αριθμητική μέθοδος. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα η ύπαρξη $\Sigma\text{Α}$ οδηγεί σε ρεαλιστικά υπολογιστικά αποτελέσματα εκεί που η μερική διαφορική εξίσωση αποτυγχάνει.





Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

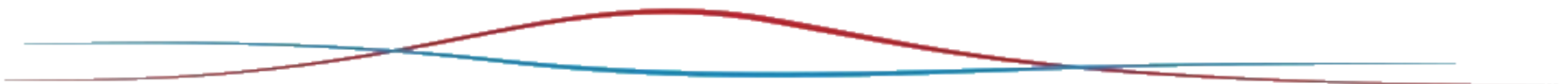
Άλλες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών

Αφαίρεση κατά μέλη των ανάντη και κατόντη αναπτυγμάτων Taylor:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j^n = \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{6} + O(\Delta t)$$

Προκύπτει το σχήμα των κεντρικών διαφορών με Σ.Α. 2^{ης} τάξης ακρίβειας $O(\Delta x^2)$.

Συχνά, σε υπολογιστικά προβλήματα καλούμαστε να επιλέξουμε το κατάλληλο σχήμα διακριτοποίησης σταθμίζοντας την καταλληλότητα με βάση τον τύπο της διεργασίας και την επιθυμητή ακρίβεια. Σχήματα μεγάλης τάξης ακρίβειας αυξάνουν τα συμμετέχοντα πλεγματικά σημεία ροής της πληροφορίας συνεπώς αυξάνουν σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Για πρακτικούς σκοπούς σχεδιασμού πολλές φορές αρκούμαστε σε χαμηλής ταξής ακρίβειας αριθμητικά σχήματα.





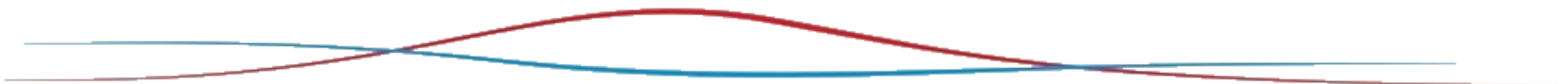
Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

Άλλες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών – προσέγγιση 2^{ης} παραγώγου

Προσέγγιση με κεντρικές διαφορές

Προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη των αναπτυγμάτων Taylor ανάντη και κατόντη διαφορών:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{12} + O(\Delta t) , \text{ με τάξη ακρίβειας } O(\Delta x^2).$$





Προσέγγιση παραγώγου με πεπερασμένες διαφορές

Άλλες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών

Βοηθητικοί Πίνακες αναπτυγμάτων

Κατάντη Διαφορές $O(\Delta x)$	φ_i	φ_{i+1}	φ_{i+2}
$\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	-1	1	0
$\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	1	-2	1

Ανάντη Διαφορές $O(\Delta x)$	φ_{i-2}	φ_{i-1}	φ_i
$\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	0	-1	1
$\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	1	-2	1

Κατάντη Διαφορές $O(\Delta x^2)$	φ_i	φ_{i+1}	φ_{i+2}	φ_{i+3}
$2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	-3	4	-1	0
$\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	2	-5	4	-1

Ανάντη Διαφορές $O(\Delta x^2)$	φ_{i-3}	φ_{i-2}	φ_{i-1}	φ_i
$2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	0	1	-4	3
$\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	-1	4	-5	2

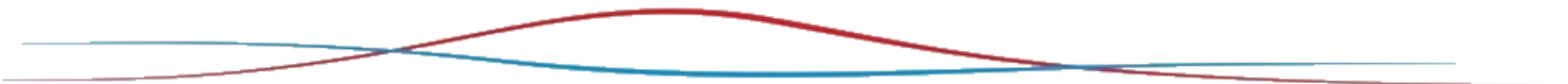
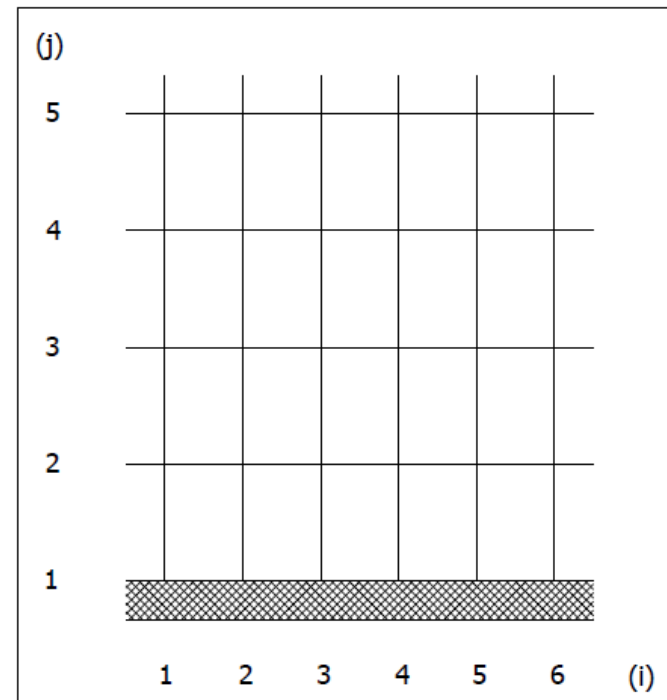
Κεντρικές Διαφορές $O(\Delta x^2)$	φ_{i-1}	φ_i	φ_{i+1}
$2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	-1	0	1
$\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	1	-2	1

Κεντρικές Διαφορές $O(\Delta x^4)$	φ_{i-2}	φ_{i-1}	φ_i	φ_{i+1}	φ_{i+2}
$12\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	1	-8	0	8	-1
$12\Delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	-1	16	-30	16	-1

Άσκηση – Ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο

Έστω μία ροή μίας ποσότητας ϕ σε διδιάστατο χώρο ο οποίος έχει διακριτοποιηθεί σε ίσα διαστήματα όπως στο παρακάτω σχήμα. Έστω ότι η ροή της ποσότητας ϕ συμβαίνει μόνο με διάχυση (με σταθερό συντ. διάχυσης) σε κάθε διάσταση. Με δεδομένες τις τιμές της ποσότητας ϕ στα δεδομένα πλεγματικά σημεία του Πίνακα, να υπολογιστεί η τιμή της ϕ στα σημεία (4,3) και (3,3). Δίδεται ότι το κάτω όριο της διάστασης j είναι αδιαπέρατο.

$\Phi(1,4) = 36$	$\Phi(2,3) = 39$
$\Phi(2,4) = 38$	$\Phi(3,2) = 43$
$\Phi(3,4) = 41$	$\Phi(4,2) = 45$
$\Phi(2,5) = 35$	$\Phi(5,2) = 48$

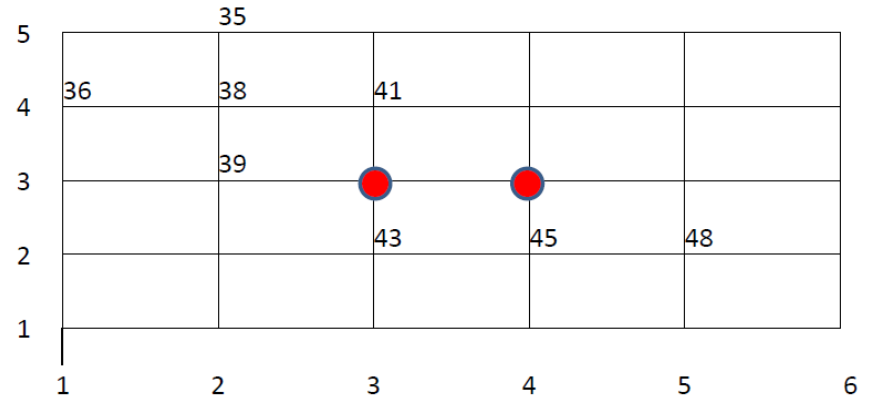


Άσκηση – Ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο

Ανάλυση δεδομένων:

Αδιαπέρατο κάτω τοίχωμα: Για να μην έχουμε Διέλευση ροής θα πρέπει η κατακόρυφη βαθμίδα της ϕ να είναι 0 σε όλα τα σημεία που συνορεύουν Με το κάτω τοίχωμα, δηλ. (ενδεικτικά, για τα σημεία Που έχουμε δεδομένα):

$$\phi_3^2 = \phi_3^1 = 43, \phi_4^2 = \phi_4^1 = 45, \phi_5^1 = \phi_5^2 = 48$$

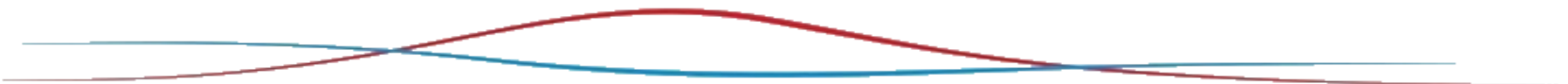


Ροή διάχυσης:

Από γενική εξίσωση διατήρησης προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_m} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση διέπει τη ροή μας!



Άσκηση – Ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο

Άρα αναζητούμε εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών που εμπλέκουν τις 2^{ες} παραγώγους.

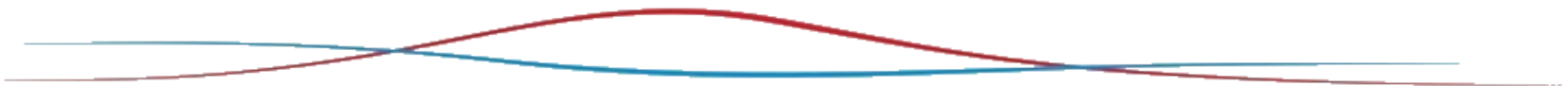
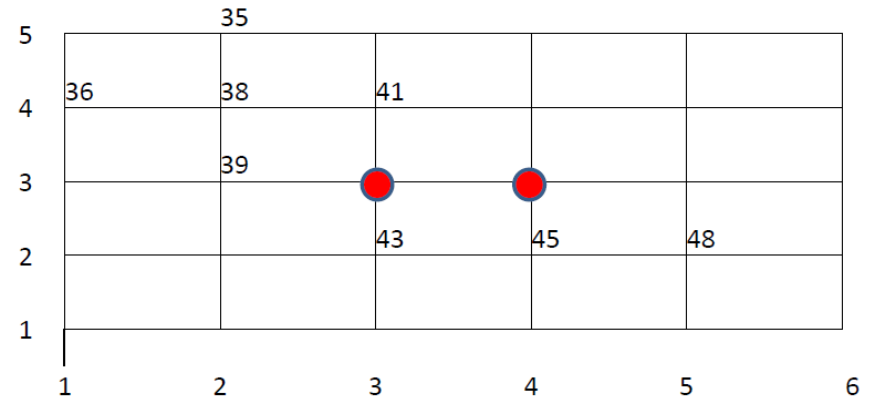
Αυτές είναι οι κεντρικές διαφορές. Γενικά, για το σημείο (i,j) θα είναι:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i^j = \frac{1}{\Delta x^2} (\varphi_{i-1}^j + \varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_i^j = \frac{1}{\Delta y^2} (\varphi_i^{j-1} + \varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j)$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση διατήρησης (που διέπει τη ροή) μας δίνει:

$$\varphi_{i+1}^j + \varphi_{i-1}^j - 2\varphi_i^j \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right) + (\varphi_i^{j+1} + \varphi_i^{j-1}) \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0$$

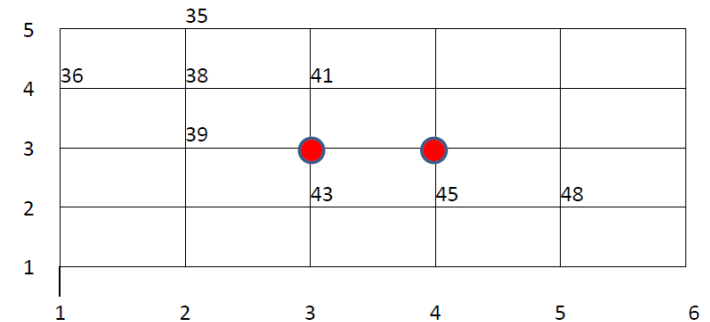


Άσκηση – Ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο

Εφαρμογή της διακριτοποιημένης εξίσωσης αρχικά εκεί που έχω τα περισσότερα δεδομένα, δηλ. στο σημείο (2,4):

$$\varphi_3^4 + \varphi_1^4 - 2\varphi_2^4 \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right) + (\varphi_2^5 + \varphi_2^3) \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0.5$$



Εφαρμογή της εξίσωσης στο σημείο (4,2) (αδιαπέρατο όριο):

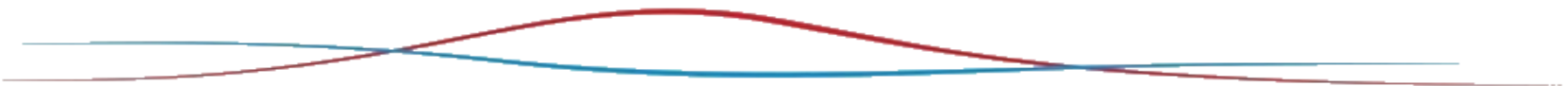
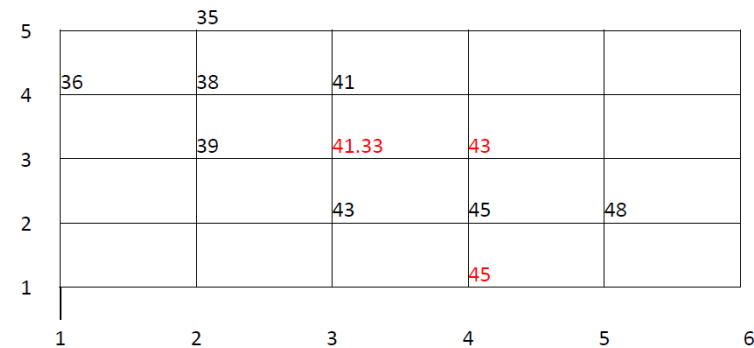
(Ισχύει ότι $\varphi_4^2 = \varphi_4^1 = 45$)

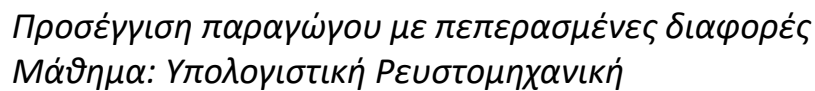
$$\varphi_5^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_4^2(1 + 0.5) + 0.5(\varphi_4^3 + \varphi_4^1) = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^3 = 43$$

Εφαρμογή της εξίσωσης στο σημείο (3,3):

$$\varphi_4^3 + \varphi_2^3 - 2\varphi_3^3 \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right) (\varphi_3^4 + \varphi_3^2) = 0 \Rightarrow \varphi_3^3 = 41.33$$

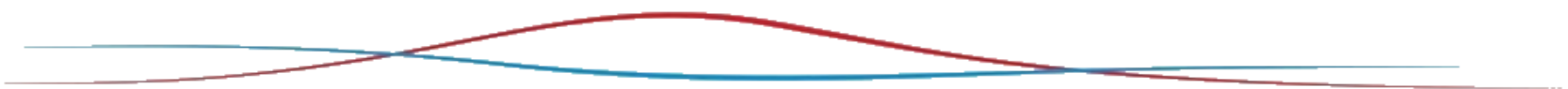
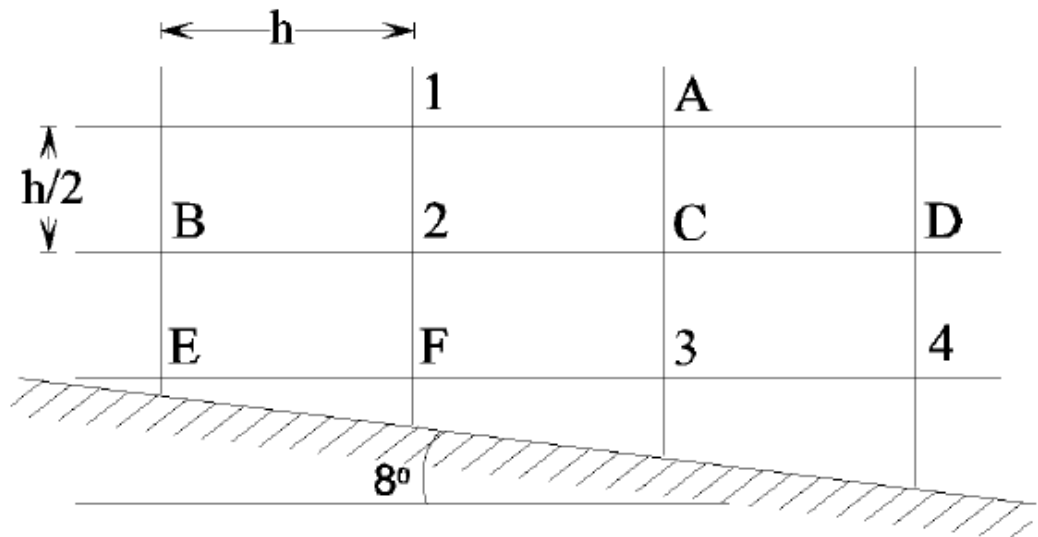
Αποτελέσματα





Έστω μία ροή μίας ποσότητας ϕ σε διδιάστατο κεκλιμένο χώρο ο οποίος έχει διακριτοποιηθεί σε διαστήματα όπως στο παρακάτω σχήμα. Έστω ότι η ροή της ποσότητας ϕ συμβαίνει μόνο με διάχυση σε κάθε διάσταση (με σταθ. Συντ. διάχυσης). Με δεδομένες τις τιμές της ποσότητας ϕ στα δεδομένα πλεγματικά σημεία παρακάτω, να υπολογιστεί η τιμή της ϕ στα σημεία 1,2,3,4. Δίδεται ότι το κάτω κεκλιμένο όριο της κάθετης διάστασης j είναι αδιαπέρατο.

$\Phi_F=0,5018$



Άσκηση – Κεκλιμένη ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο

Καταρχήν η επίδραση του αδιαπέρατου ορίου γίνεται «αντιληπτή» στα πλεγματικά σημεία P και R του πεδίου ροής για τα οποία τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα προαναφερόμενα σημεία με τα σημεία G και N τέμνουν κάθετα το κεκλιμένο όριο.

Κατάντη στο σημείο F:

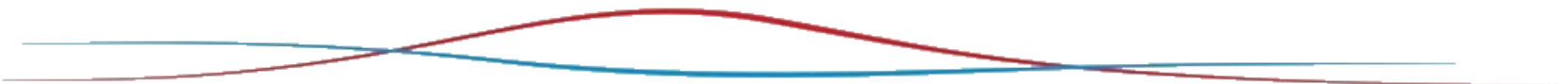
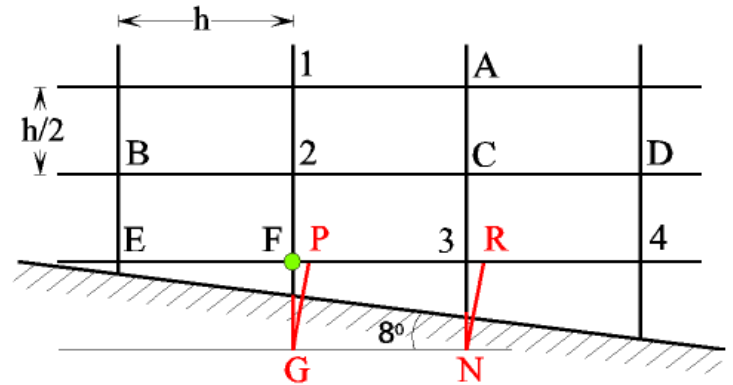
$$\varphi_F = \varphi_P - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_F \Delta x_{FP} = \varphi_P - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_F \frac{h}{2} \tan 8^\circ \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_F \cdot \frac{h}{2} \tan 8^\circ = \varphi_P - \varphi_F \quad (1)$$

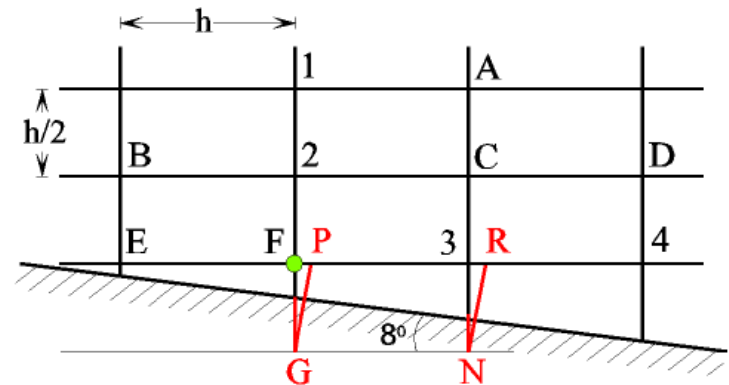
Κατάντη στο σημείο F (αλλιώς):

$$\varphi_F = \varphi_3 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_F h \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_F h = \varphi_3 - \varphi_F \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\tan 8^\circ}{2} = \frac{\varphi_P - \varphi_F}{\varphi_3 - \varphi_F} \Leftrightarrow \varphi_G = 0.07 \cdot \varphi_3 + 0.466 \quad (3) \quad (\text{Αδιαπέρατο τοίχωμα: } \varphi_P = \varphi_G)$$



Άσκηση – Κεκλιμένη ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο



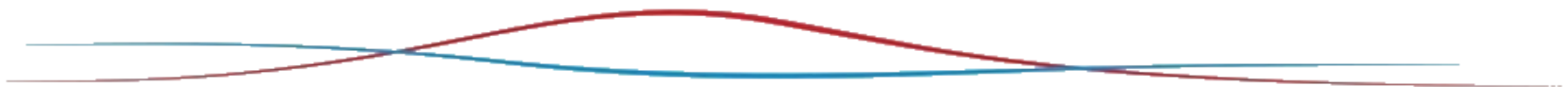
Κεντρικές στο σημείο F (ισχύει η εξίσωση διάχυσης-βλ.προηγούμενη άσκηση):

$$\varphi_3 + \varphi_E - 2\varphi_F \left(1 + \left(\frac{h}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right) + (\varphi_2 + \varphi_G) \left(\frac{h}{\frac{h}{2}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow 1.28\varphi_3 + 4\varphi_2 = 2.6538 \text{ (λόγω της (3))} \quad (4)$$

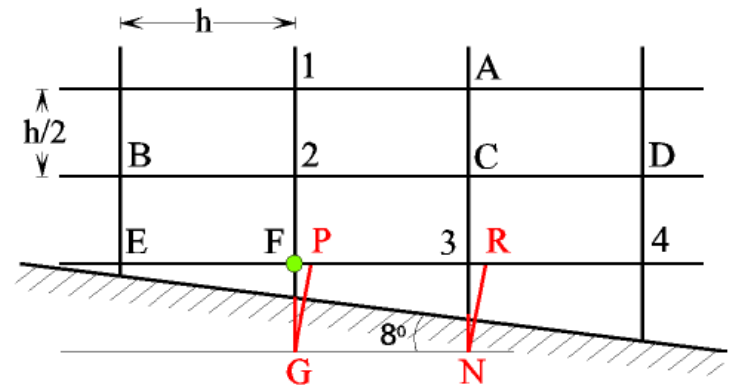
Κεντρικές στο σημείο C (Εξίσωση διάχυσης):

$$\varphi_D + \varphi_2 - 2\varphi_C(1 + 4) + (\varphi_A + \varphi_3)4 = 0 \Leftrightarrow 4\varphi_3 + \varphi_2 = 2.51 \quad (5)$$

Με επίλυση του συστήματος των (4) και (5) προκύπτουν: $\varphi_2 = 0.5028$ και $\varphi_3 = 0.5017$



Άσκηση – Κεκλιμένη ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο



Κεντρικές στο σημείο 2 (ισχύει η εξίσωση διάχυσης-βλ.προηγούμενη άσκηση):

$$\varphi_C + \varphi_B - 10\varphi_2 + (\varphi_1 + \varphi_F) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = \mathbf{0.5043} \quad (6)$$

Κατάντη στο 3:

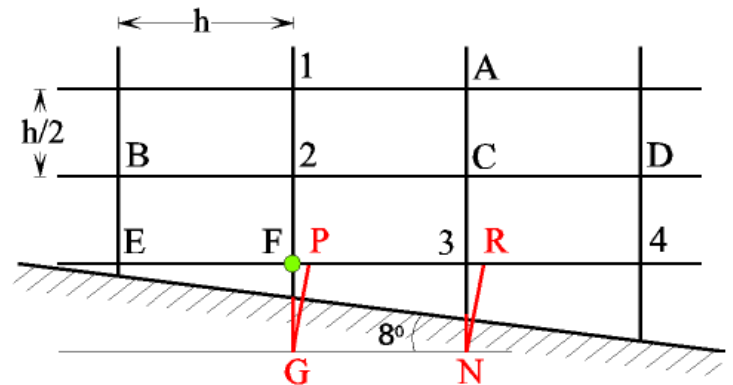
$$\varphi_3 = \varphi_R - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_3 \Delta x_{3R} = \varphi_R - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_3 \frac{h}{2} \tan 8^\circ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_3 \frac{h}{2} \tan 8^\circ = \varphi_R - \varphi_3 \quad (7)$$

Κατάντη στο 3 (αλλιώς):

$$\varphi_3 = \varphi_4 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_3 h \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_3 h = \varphi_4 - \varphi_3 \quad (8)$$

$$\frac{(7)}{(8)} \Rightarrow \phi_R = 0.07\varphi_4 + 0.466 \quad (9)$$

Άσκηση – Κεκλιμένη ροή διάχυσης σε ημιάπειρο χώρο



Κεντρικές στο σημείο 3 (με τη βοήθεια της (9) και λόγω $\varphi_N = \varphi_R$ λόγω αδιαπέρατου ορίου):

$$\varphi_4 + \varphi_F - 10\varphi_3 + 4(\varphi_C + \varphi_N) = 0 \Leftrightarrow \varphi_4 = 0.4775$$

