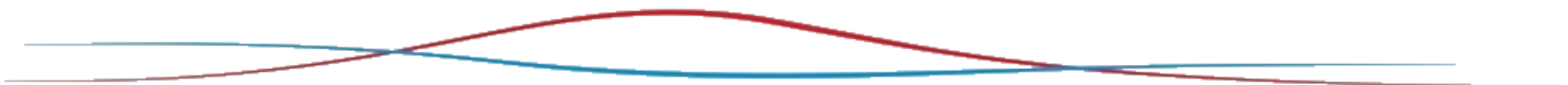




Μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ενεργειακή Κατεύθυνση
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής



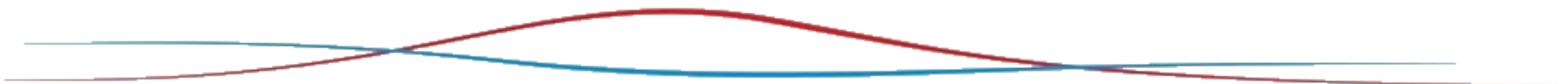


Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου (Finite Volume Method, FVM) ανήκει στις ολοκληρωτικές μεθόδους (integral methods) αριθμητικής επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στη μέθοδο αυτή το πεδίο ροής διακριτοποιείται σε πεπερασμένους όγκους (π.χ. στις τρεις διαστάσεις σε εξάεδρα ή τετράεδρα).

Η διακριτοποιημένη εξίσωση προκύπτει από την ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ της εξίσωσης μεταφοράς πάνω σε έναν πεπερασμένο όγκο, σε αντίθεση με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στις οποίες η διακριτοποιημένη εξίσωση προκύπτει από την ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ μορφή της εξίσωσης μεταφοράς με προσέγγιση διαφορών των μερικών παραγώγων.





Ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς

Η γενική εξίσωση μεταφοράς είναι:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}\phi - \Gamma_\phi \text{grad}\phi) = S_\phi$$

Ολοκλήρωση σε έναν πεπερασμένο όγκο V με σύνορο την επιφάνεια A :

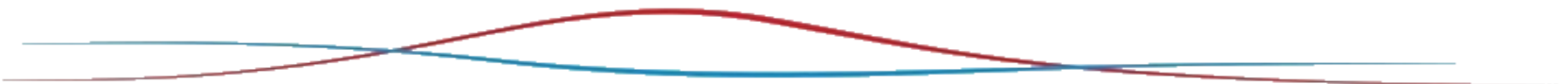
$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(\rho\vec{u}\phi - \Gamma_\phi \text{grad}\phi) dV = \iiint_V S_\phi dV \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho\phi) dV + \iiint_V \text{div}(\rho\vec{u}\phi - \Gamma_\phi \text{grad}\phi) dV = \iiint_V S_\phi dV$$

Αριθμητικά, η ολοκλήρωση μίας ποσότητας σε έναν (πολύ μικρό) όγκο dV , μπορεί επιτυχώς να προσεγγιστεί από τον μέσο όρο της ποσότητας στον όγκο, δηλ. $[\phi] = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V \phi dV$, όπου ΔV είναι το άθροισμα των απειροστών όγκων dV . Η αγκύλη σημαίνει μέση τιμή.

Οπότε, η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho\phi] \Delta V + \iiint_V \text{div}(\rho\vec{u}\phi - \Gamma_\phi \text{grad}\phi) dV = [S_\phi] \Delta V$$





Ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς

Χειρισμός του όρου απόκλισης

Από θεώρημα Gauss (βλ. 1^η διάλεξη), το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης του ρυθμού ροής μετατρέπεται σε επιφανειακό με ολοκλήρωση πάνω στο σύνορο A του όγκου ελέγχου, δηλ.:

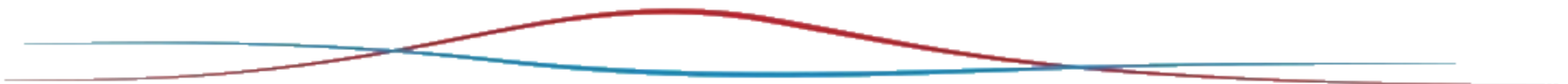
$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u} \varphi - \Gamma_\varphi \operatorname{grad} \varphi) dV = \oiint_A (\rho \vec{u} \varphi - \Gamma_\varphi \operatorname{grad} \varphi) \vec{n} dA.$$

Οπότε, η εξίσωση μεταφοράς γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \varphi] \Delta V + \oiint_A (\rho \vec{u} \varphi - \Gamma_\varphi g \operatorname{rad} \varphi) \vec{n} dA = [S_\varphi] \Delta V$$

Όπου $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια A.

Η (αριθμητική) ολοκλήρωση του επιφανειακού ολοκληρώματος οδηγεί στην ανάγκη ορισμού του όγκου ελέγχου (πλέγμα).



Πλέγμα – Όγκοι ελέγχου

Για τον ορισμό των όγκων ελέγχου, το πεδίο ροής διακριτοποιείται σε πεπερασμένους όγκους τοπολογικά καρτεσιανού σχήματος. Στο σχήμα αποδίδεται πλέγμα σε διδιάστατη περίπτωση.

Κατασκευή του πλέγματος:

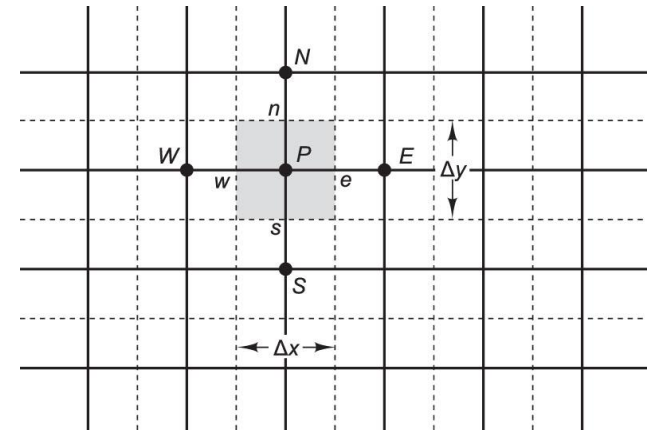
Κόμβοι (με Κεφαλαία γράμματα): Είναι οι θέσεις αποθήκευσης των βαθμωτών μεγεθών της ροής (p , T , P , ω_i).

Μέτωπα (με μικρά γράμματα): Στο μέσον της απόστασης μεταξύ δύο κόμβων και κάθετα στη γραμμή που τους ενώνει χαράσσονται τα μέτωπα των όγκων ελέγχου. Στα μέτωπα αποθηκεύονται τα διανυσματικά μεγέθη (π.χ. οι συνιστώσες ταχύτητας u και v).

Η τριάδα που απαρτίζεται από τον κόμβο και τα ανάντη μέτωπα (π.χ. P , w και s) καταλαμβάνει στη μνήμη του Η/Υ την ίδια θέση αναφοράς.

Ονοματολογία (βάσει προσανατολισμού):

- Γειτονικοί κόμβοι (nodes) W (West), E (East), S (South), N (North).
- Μέτωπα (fronts): w (west), e (east), s (south), n (north).



Δηλαδή, το παραπάνω πλέγμα συνίσταται από:

- Έναν όγκο για τα βαθμωτά μεγέθη (περί του P).
- Έναν όγκο για την u ταχύτητα (περί του μετώπου w)
- Έναν όγκο για την v ταχύτητα (περί του μετώπου s).

Διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς

Στο παραπάνω διδιάστατο πλέγμα εφαρμόζεται η γενική ολοκληρωτική εξίσωση μεταφοράς ως ακολούθως:

$$\frac{d}{dt} [\rho \varphi] V_P + g_e - g_w + g_n - g_s = [S_\varphi] V_P$$

Όπου g είναι ο επιφανειακός ρυθμός ροής (με συναγωγή και διάχυση) στα μέτωπα του όγκου V_P , π.χ. για το ανατολικό μέτωπο:

$$g_e = \iint_{A_e} \left(\rho u \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA_e, \text{ όπου } A_e \text{ είναι το εμβαδόν του ανατολικού μετώπου που για το διδιάστατο πρόβλημα } A_e = \Delta y. \text{ (στην περίπτωση της κατακόρυφης συνιστώσας ροής θα εμφανιζόταν π.χ. } A_n = \Delta x).$$

Παραδοχές:

1. Ομοιόμορφη κατανομή των ποσοτήτων στον όγκο ελέγχου, δηλ.

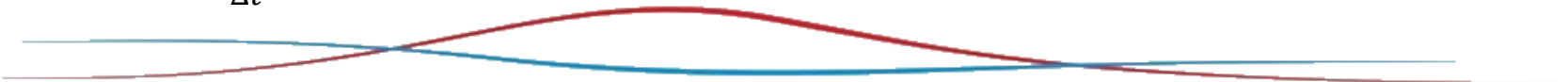
$$[\rho \varphi] V_P = \rho_P \varphi_P V_P \text{ και } [S_\varphi] V_P = S_{\varphi,P} V_P$$

2. Ομοιόμορφη κατανομή των ποσοτήτων στα μέτωπα του όγκου ελέγχου, δηλ.

$$g_e = (\rho u)_e A_e \varphi_e - \Gamma_e A_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_e = CE + DE, \text{ όπου } CE = (\rho u)_e A_e \varphi_e \text{ και } DE = -\Gamma_e A_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_e$$

3. Πρώτης τάξης προσέγγιση με ανάντη διαφορές της χρονικής παραγώγου:

$$\frac{d}{dt} (\rho_P \varphi_P) V_P = \frac{\rho_P \varphi_P - \rho_P^0 \varphi_P^0}{\Delta t} V_P, \text{ όπου ο εκθέτης «0» σημαίνει το προηγούμενο χρονικό βήμα.}$$





Διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς

Με εφαρμογή των προαναφερόμενων παραδοχών, η διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς θα είναι:

$$\frac{(\rho_P \varphi_P - \rho_P^0 \varphi_P^0) V_P}{\Delta t} + (CE + DE) - (CW + DW) + (CN + DN) - (CS + DS) = S_{\varphi, P} V_P$$

Όπου

$$CE = (\rho u)_e A_e \varphi_e \quad DE = -\Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_e$$

$$CW = (\rho u)_w A_w \varphi_w \quad DW = -\Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_w$$

$$CN = (\rho u)_n A_n \varphi_n \quad DN = -\Gamma_n A_n \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_n$$

$$CS = (\rho u)_s A_s \varphi_s \quad DS = -\Gamma_s A_s \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_s$$

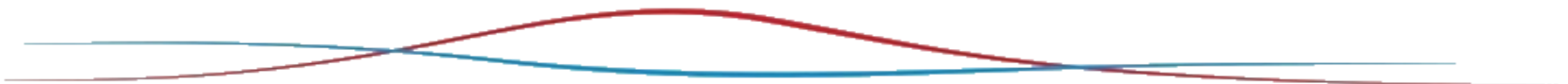
Οι τιμές της πυκνότητας ρ και του συντελεστή εναλλαγής Γ στα μέτωπα των όγκων ελέγχου συνήθως υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή εκατέρωθεν του μετώπου π.χ. $\rho_e = 0.5(\rho_E + \rho_P)$ και $\Gamma_e = 0.5(\Gamma_E + \Gamma_P)$. Όμως, στις περιπτώσεις που ο συντελεστής εναλλαγής εμφανίζει ασυνέχειες στα μέτωπα προτιμάται ο αρμονικός μέσος των τιμών των εκατέρωθεν κόμβων, δηλ.: $\Gamma_e = \frac{2\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P + \Gamma_E}$.



Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Η πλήρης διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς απαιτεί τον προσδιορισμό της μεταφερόμενης ποσότητας ϕ και των παραγώγων της στα μέτωπα του όγκου ελέγχου ως συνάρτηση των τιμών της στους κόμβους πλέγματος. Συνήθεις τεχνικές:

1. Σχήμα Κεντρικών Διαφορών.
2. Σχήμα Ανάντη Διαφορών.
3. Υβριδικό Σχήμα.





Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Κεντρικών Διαφορών

Γίνεται η υπόθεση γραμμικής κατανομής της ποσότητας ϕ γύρω από τα μέτωπα των όγκων ελέγχου. Για παράδειγμα, η τιμή της ϕ_w στο δυτικό μέτωπο δίδεται από τις σχέσεις:

$$\phi_w = 0.5(\phi_w + \phi_P)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x}$$

Για λόγους απλοποίησης, αναλύεται η εξίσωση μεταφοράς στη μία διάσταση (στη x διεύθυνση) σε μόνιμη κατάσταση (δηλ. η χρονική παράγωγος μηδενίζεται):

$$CE + DE - (CW + DW) = S_{\phi,P} V_P \Leftrightarrow$$

$$(\rho u)_e A_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e - (\rho u)_w A_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} + \Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = S_{\phi,P} V_P \Leftrightarrow$$

$$(\rho u)_e A_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{EP}} - (\rho u)_w A_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} + \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}} = S_{\phi,P} V_P \Leftrightarrow$$

$$\left[0.5(\rho u)_e A_e - 0.5(\rho u)_w A_w + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{EP}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right] \phi_P = \left[\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{EP}} - 0.5(\rho u)_e A_e \right] \phi_E +$$
$$+ \left[\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} + 0.5(\rho u)_w A_w \right] \phi_W + S_{\phi,P} V_P$$

Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Κεντρικών Διαφορών

Δηλαδή, η εξίσωση μεταφοράς μπορεί να γραφεί:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_{\phi,P} V_P$$

Όπου:

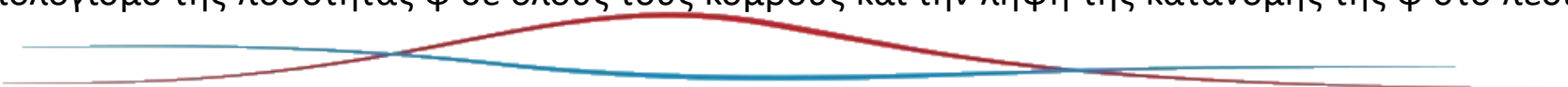
$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{EP}} - 0.5(\rho u)_e A_e$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} + 0.5(\rho u)_w A_w$$

$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w$$

Παρατήρηση: Όταν συγκλίνει ο αλγόριθμος τότε θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση συνέχειας (διατήρηση της μάζας) δηλ. $(\rho u)_e A_e = (\rho u)_w A_w$, και τότε: $a_P = a_E + a_W$.

Τελικά, το πρόβλημα λύνεται με τη γραφή της κυβερνούσας διακριτοποιημένης εξίσωσης για όλους τους κόμβους του πλέγματος. Αυτό οδηγεί σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων που επιλύεται προς τον υπολογισμό της ποσότητας ϕ σε όλους τους κόμβους και την λήψη της κατανομής της ϕ στο πεδίο ροής.



Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Κεντρικών Διαφορών

Για να συμβεί η σύγκλιση στη σωστή λύση το Σχήμα θα πρέπει να ευσταθεί, πράγμα που ισχύει όταν εν γένει οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομόσημοι. Αρκεί λοιπόν να ισχύει:

$$a_E \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{EP}} \geq (\rho u)_e A_e \cdot 0.5 \Leftrightarrow Pe_e \leq 2, \text{ όπου } Pe \text{ είναι ο αριθμός Peclet } Pe_e = \frac{(\rho u)_e \Delta x_{EP}}{\Gamma_e}$$

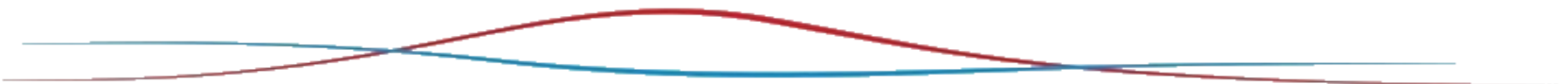
Και

$$a_W \geq 0 \Leftrightarrow Pe_w \geq -2$$

Άρα, για να οδηγηθεί το Σχήμα σε φυσικές λύσεις θα πρέπει να οριστεί το πλέγμα έτσι ώστε $|Pe| \leq 2$.

Συχνά, η παραπάνω απαίτηση οδηγεί σε υπερβολικά πυκνό πλέγμα, συνεπώς αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος.

Παραλληλισμός με πεπερασμένες διαφορές: Υπενθυμίζεται ότι και για το Σχήμα FTCS η προαναφερόμενη συνθήκη $|Pe| \leq 2$ είναι συνθήκη ευστάθειας.





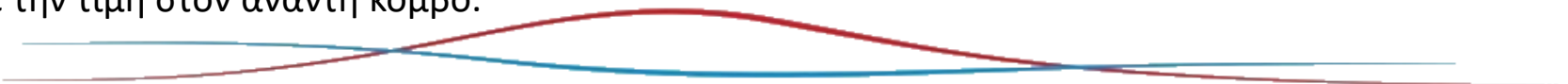
Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Κεντρικών Διαφορών – Θέματα Ακρίβειας

Όπως έχει ήδη δειχθεί στο κεφάλαιο της προσέγγισης με πεπερασμένες διαφορές, η τάξη ακρίβειας του Σχήματος Κεντρικών Διαφορών (στο χώρο) είναι 2^{ης} τάξης. Παρά την σχετικά μεγάλη ακρίβεια του Σχήματος, η συνθήκη ευστάθειας ($Pe < 2$) για δεδομένες ιδιότητες του ρευστού ρ και Γ , ικανοποιείται μόνο για χαμηλές ταχύτητες δηλ. **για ροές όπου κυριαρχεί η διάχυση, ή αν η χωρική διακριτοποίηση είναι αρκετά πυκνή**. Συνεπώς, η μέθοδος κεντρικής διαφοράς είναι πιο ακριβής για ροές που κυριαρχεί η διάχυση και δεν προτιμάται για υπολογισμούς ροών γενικού σκοπού.

Ένα πρόσθετο μειονέκτημα της μεθόδου είναι οι **σχετικές ανακρίβειες ως προς την κατεύθυνση της ροής (ασθενής μεταφορικότητα)**. Η τιμή της ποσότητας ϕ για παράδειγμα στο δυτικό μέτωπο ενός κελιού επηρεάζεται πάντα τόσο από την τιμή στον κεντρικό κόμβο P όσο και από την τιμή της στο Δυτικό κόμβο W. Σε μια ισχυρά συναγωγική ροή από δυτικά προς ανατολικά, η παραπάνω αντιμετώπιση είναι ακατάλληλη αφού το δυτικό μέτωπο του κελιού θα πρέπει να δέχεται πολύ μεγαλύτερη επιρροή από τον ανάντη κόμβο W σε σχέση με την επιρροή του κόμβου P.

Η μέθοδος της ανάντη διαφοράς (μέθοδος «δότη» κελιού) λαμβάνει υπόψη την κατεύθυνση της ροής κατά τον προσδιορισμό της τιμής στο μέτωπο, καθώς η τιμή της συναγωγής στο μέτωπο λαμβάνεται ίση με την τιμή στον ανάντη κόμβο.



Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Ανάντη Διαφορών

Όπως προαναφέρθηκε, το ανάντη σχήμα θεωρεί ότι η τιμή της ϕ στο μέτωπο είναι ίση με αυτήν στον ανάντη κόμβο δηλ. στον κόμβο από όπου έρχεται η ροή.

Περίπτωση 1: Ροή από δυτικά προς ανατολικά ($u_w > 0, u_e > 0$):

$$\varphi_w = \varphi_W$$

Και

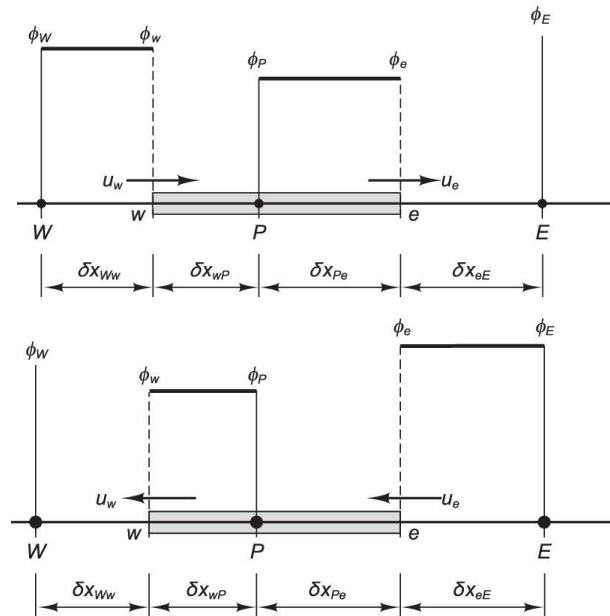
$$\varphi_e = \varphi_P$$

Περίπτωση 2: Ροή από ανατολικά προς δυτικά ($u_w < 0, u_e < 0$):

$$\varphi_e = \varphi_E$$

Και

$$\varphi_w = \varphi_P$$



Η παράγωγος στο μέτωπο (στον όρο διάχυσης) λαμβάνεται με κεντρικές διαφορές (όπως και στο

Σχήμα κεντρικών διαφορών). Δηλ., για το δυτικό μέτωπο: $\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}}$



Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Ανάντη Διαφορών

Διακριτοποιημένη εξίσωση στην Περίπτωση 1:

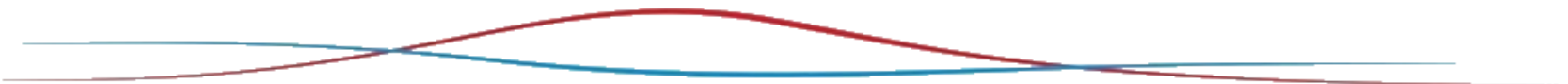
$$(\rho u)_e A_e \phi_P - \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{EP}} - (\rho u)_w A_w \phi_W + \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}} = S_{\phi,P} V_P \Leftrightarrow$$

$$\left[(\rho u)_e A_e + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] \phi_P = \left[(\rho u)_w A_w + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] \phi_W + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \phi_E + S_{\phi,P} V_P$$

Διακριτοποιημένη εξίσωση στην Περίπτωση 2:

$$(\rho u)_e A_e \phi_E - \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{EP}} - (\rho u)_w A_w \phi_P + \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}} = S_{\phi,P} V_P \Leftrightarrow$$

$$\left[-(\rho u)_w A_w + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] \phi_P = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \phi_W + \left[-(\rho u)_e A_e + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right] \phi_E + S_{\phi,P} V_P$$





Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Ανάντη Διαφορών

Γενική διακριτοποιημένη εξίσωση:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_{\phi,P} V_P$$

Όπου

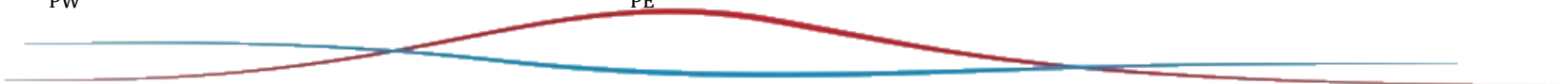
$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w$$

ΚΑΙ

Περίπτωση	α_W	α_E
Περίπτωση 1: $u_w > 0, u_e > 0$	$(\rho u)_w A_w + \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$
Περίπτωση 2: $u_w < 0, u_e < 0$	$\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}}$	$-(\rho u)_e A_e + \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}}$

Η' ΑΛΛΙΩΣ:

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} + \max[(\rho u)_w A_w, 0] \text{ και } a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} + \max[0, -(\rho u)_e A_e]$$



Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

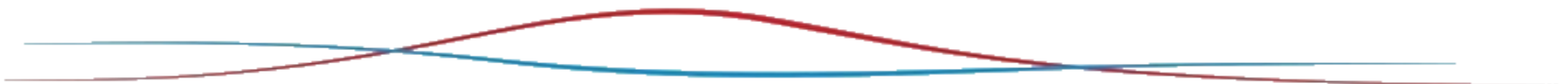
Σχήμα Ανάντη Διαφορών – Ευστάθεια και θέματα ακρίβειας

Το Σχήμα είναι ευσταθές άνευ όρων καθώς οι συντελεστές της εξίσωσης μεταφοράς θα είναι πάντα ομόσημοι. Επίσης, όταν το πρόβλημα συγκλίνει, δηλ. όταν ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας $(\rho u)_e A_e = (\rho u)_w A_w$ θα είναι $a_P = a_E + a_W$, που είναι το επιθυμητό για σταθερές επαναληπτικές λύσεις.

Ως προς τη μεταφορικότητα, το σχήμα λαμβάνει καλύτερα υπόψη την κατεύθυνση της ροής με αποτέλεσμα να ενσωματώνει καλύτερα την μεταφορικότητα σε σχέση με το σχήμα των κεντρικών διαφορών.

Ακρίβεια: Όπως δείχθηκε και στο κεφάλαιο των πεπερασμένων διαφορών, το Σχήμα είναι 1^{ης} τάξης ακρίβειας.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του σχήματος είναι ότι παράγει εσφαλμένα συμπεράσματα όταν η ροή δεν ευθυγραμμίζεται με τις πλεγματικές γραμμές. Σε αυτή την περίπτωση το ανάντη σχήμα προκαλεί εξάπλωση των κατανομών των μεταφερόμενων ιδιοτήτων (διασπορά της λύσης). Τέτοιου είδους σφάλμα είναι γνωστό ως ψευτοδιάχυση (false diffusion).





Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Σχήμα Ανάντη Διαφορών – Ψευτοδιάχυση (False diffusion)

Για την περίπτωση 1 ροής από τα δυτικά προς τα ανατολικά, σε σχέση με τις κεντρικές διαφορές, το ανάντη Σχήμα μας δίνει αυξημένους συντελεστές a_E και a_W κατά μία ποσότητα 0.5ρυ. Εμφανίζεται δηλ. ένας όρος ψευδούς διάχυσης ίσος με:

$\Delta D_e = 0.5\rho u \phi$ ο οποίος μπορεί να γραφεί:

$$\Delta D_e = 0.5\rho u \frac{\Delta x}{\Delta x} \phi = 0.5\rho u \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Όπου $\Delta \Gamma_e = 0.5\rho u \Delta x = 0.5Pe$

Από φυσική σκοπιά, ο Pe εκφράζει τη σχετική ένταση της συναγωγής προς τη διάχυση. Μεγάλος αριθμός Pe σημαίνει ότι η κυβερνούσα δύναμη είναι η συναγωγή, άρα η ανάντη είναι η πιο πιθανή μεταφερόμενη τιμή της ϕ . Οπότε μπορεί να αξιοποιηθεί το ανάντη Σχήμα. Ιδίως για $|Pe| > 2$, η ψευτοδιάχυση του ανάντη σχήματος «διορθώνει» την αφύσικη συμπεριφορά του Σχήματος Κεντρικών Διαφορών. Για την εξουδετέρωση της ψευτοδιάχυσης απαιτείται η πύκνωση του πλέγματος η οποία συχνά είναι αποτρεπτικά ακριβή (αύξηση του χρόνου υπολογισμών). Δοκιμές έχουν δείξει ότι για ροές υψηλού αριθμού Re , η ψευτοδιάχυση που εισάγεται από το ανάντη σχήμα μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να προκύπτουν λανθασμένα από φυσικής άποψης αποτελέσματα.

Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Υβριδικό Σχήμα

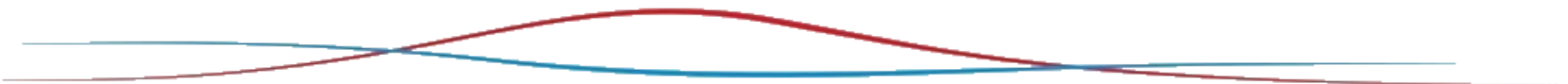
Το υβριδικό Σχήμα (Spalding, 1972) βασίζεται στο συνδυασμό του κεντρικού και του ανάντη Σχήματος. Το σχήμα κεντρικών διαφορών, με ακρίβεια 2^{ης} τάξης χρησιμοποιείται για μικρούς αριθμούς Pe ($Pe < 2$), ενώ το ανάντη σχήμα, με ακρίβεια 1^{ης} τάξης χρησιμοποιείται για μεγάλους αριθμούς Pe ($Pe \geq 2$). Για $Pe \geq 2$ λαμβάνονται οι αντίστοιχοι συντελεστές του ανάντη σχήματος ανάλογα με την κατεύθυνση της ροής της ποσότητας ϕ . Οι συντελεστές του υβριδικού σχήματος προκύπτουν ως ακολούθως:

$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w$$

$$a_W = \max \left[(\rho u)_w A_w, \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} + 0.5 (\rho u)_w A_w \right), 0 \right] \quad \text{ή} \quad a_W = \max \left[|0.5 (\rho u)_w A_w|, \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] + 0.5 (\rho u)_w A_w$$

$$a_E = \max \left[-(\rho u)_e A_e, \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} - 0.5 (\rho u)_e A_e \right), 0 \right] \quad \text{ή} \quad a_E = \max \left[|0.5 (\rho u)_e A_e|, \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right] - 0.5 (\rho u)_e A_e$$

Το υβριδικό σχήμα ικανοποιεί την απαίτηση για μεταφορικότητα χρησιμοποιώντας το ανάντη σχήμα για υψηλούς Pe. Παράγει ρεαλιστικές λύσεις από φυσική σκοπιά, και κρίνεται εξαιρετικά ευσταθές. Έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως και έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμο στην πρόβλεψη πραγματικών ροών. Μειονέκτημά του αποτελεί η ακρίβεια, αφού το Σ.Α του αναπτύγματος Taylor είναι 1^{ης} τάξης.





Χειρισμός όρων συναγωγής και διάχυσης

Υβριδικό Σχήμα – Γενίκευση στις τρεις διαστάσεις

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F$$

Μονοδιάστατη ροή	Διδιάστατη ροή	Τριδιάστατη ροή
$a_W \max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
$a_E \max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
$a_S -$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
$a_N -$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
$a_B -$	-	$\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
$a_T -$	-	$\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
$\Delta F \quad F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Έδρα	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta x_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta x_{PT}} A_t$



Χειρισμός του όρου πηγής της εξίσωσης μεταφοράς

Στη γενική περίπτωση, ο όρος πηγής είναι συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής ϕ . Για το χειρισμό του απαιτείται η **γραμμικοποίησή του ως ακολούθως**:

Κατάντη ανάπτυγμα Taylor της τιμής της πηγής (τιμή στην επόμενη επανάληψη σε σχέση με την τρέχουσα): $S_{\phi,P} = S_{\phi,P}^* + \left(\frac{dS}{d\phi}\right)^* (\phi_P - \phi_P^*) \Leftrightarrow S_{\phi,P} = S_u + S_P \phi_P$ (1)

Όπου:

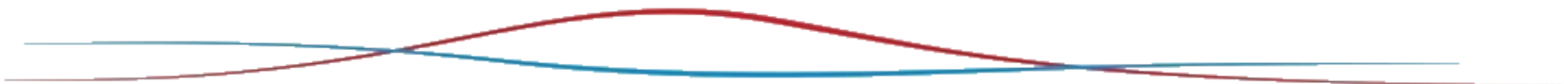
«*» σημαίνει την τρέχουσα επανάληψη της επαναληπτικής επίλυσης

$$S_P = \left(\frac{dS}{d\phi}\right)^*, \text{ και } S_u = S_{\phi,P}^* - S_P \phi_P^*$$

Με πολλαπλασιασμό του όγκου V_P , η (1) γίνεται:

$$S_{\phi,P} V_P = S U + S P * \phi_P, \text{ όπου:}$$

$$S U = S_u V_P \text{ και } S P = S_P V_P$$



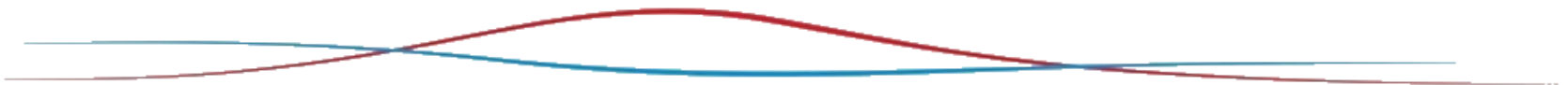


Χειρισμός του όρου πηγής της εξίσωσης μεταφοράς

Ο συντελεστής SP που πολλαπλασιάζει την τιμή του ϕ_p μεταφέρεται στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης μεταφοράς. Δεν θεωρείται γνωστό, συνεπώς κάνει το Σχήμα διακριτοποίησης πιο πεπλεγμένο.

Η γραμμικοποίηση του όρου πηγής γίνεται με αρνητική βαθμίδα ($\frac{dS}{d\phi} < 0$ δηλ. $S_P < 0$) έτσι ώστε όταν το SP μεταφερθεί στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης μεταφοράς, ο συντελεστής του ϕ_p , δηλ. ο όρος a_p -SP, να προκύπτει θετικός.

Η αρνητική βαθμίδα στη γραμμικοποίηση του όρου πηγής δεν είναι αυθαίρετη. Στα φαινόμενα μεταφοράς ρευστών, πράγματι η βαθμίδα της μεταφερόμενης ποσότητας είναι αρνητική καθώς η ροή κινείται αυθόρμητα από την περιοχή μεγαλύτερου προς χαμηλότερου δυναμικού ($\Delta\phi$). Η αρνητική βαθμίδα υπονοεί ότι θα πρέπει να υπάρχει ένας μηχανισμός απαγωγής της εξαρτημένης μεταβλητής, π.χ. της θερμότητας σε πρόβλημα με πηγή θερμότητας. Στην αντίθετη περίπτωση, το φυσικό σύστημα δεν ισορροπεί και δεν θα υπάρξει ποτέ λύση μόνιμης κατάστασης.



Τελική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς

Η τελική μορφή της διακριτοποιημένης κατά το υβριδικό Σχήμα εξίσωσης μεταφοράς, στην τρισδιάστατη περίπτωση θα είναι:

$$(a_P - SP)\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + a_T\varphi_T + a_B\varphi_B + SU$$

Όπου

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + \underbrace{(\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w}_{\text{x-διεύθυνση}} + \underbrace{(\rho u)_n A_n - (\rho u)_s A_s}_{\text{y-διεύθυνση}} + \underbrace{(\rho u)_t A_t - (\rho u)_b A_b}_{\text{z-διεύθυνση}}$$

$$a_E = \max \left[|0.5(\rho u)_e A_e|, \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right] - 0.5(\rho u)_e A_e$$

$$a_W = \max \left[|0.5(\rho u)_w A_w|, \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] + 0.5(\rho u)_w A_w$$

$$a_N = \max \left[|0.5(\rho u)_n A_n|, \frac{\Gamma_n A_n}{\Delta x_{PN}} \right] - 0.5(\rho u)_n A_n$$

$$a_S = \max \left[|0.5(\rho u)_s A_s|, \frac{\Gamma_s A_s}{\Delta x_{PS}} \right] + 0.5(\rho u)_s A_s$$

$$a_T = \max \left[|0.5(\rho u)_t A_t|, \frac{\Gamma_t A_t}{\Delta x_{PT}} \right] - 0.5(\rho u)_t A_t$$

$$a_B = \max \left[|0.5(\rho u)_b A_b|, \frac{\Gamma_b A_b}{\Delta x_{PB}} \right] + 0.5(\rho u)_b A_b$$



Συνθήκη συγκλίνουσας επαναληπτικής μεθόδου

Κριτήριο Scarborough

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις σε κάθε κομβικό σημείο εκπροσωπούν ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων που πρέπει να επιλυθεί. Κατά κανόνα, για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων εφαρμόζεται κάποια επαναληπτική μέθοδος. Η τελευταία σημαίνει ότι η επίλυση ξεκινά με μία αρχική (σχεδόν τυχαία) εκτίμηση της κατανομής της ϕ και ακολουθούν διαδοχικές ενημερώσεις μέχρι να προκύψει η συγκλίνουσα λύση. **Επαρκής συνθήκη για τη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου (Κριτήριο Scarborough):**

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p - S_p|} = \begin{cases} \leq 1, & \text{σε όλους τους κόμβους} \\ < 1, & \text{τουλάχιστον σε ένα κόμβο} \end{cases}$$

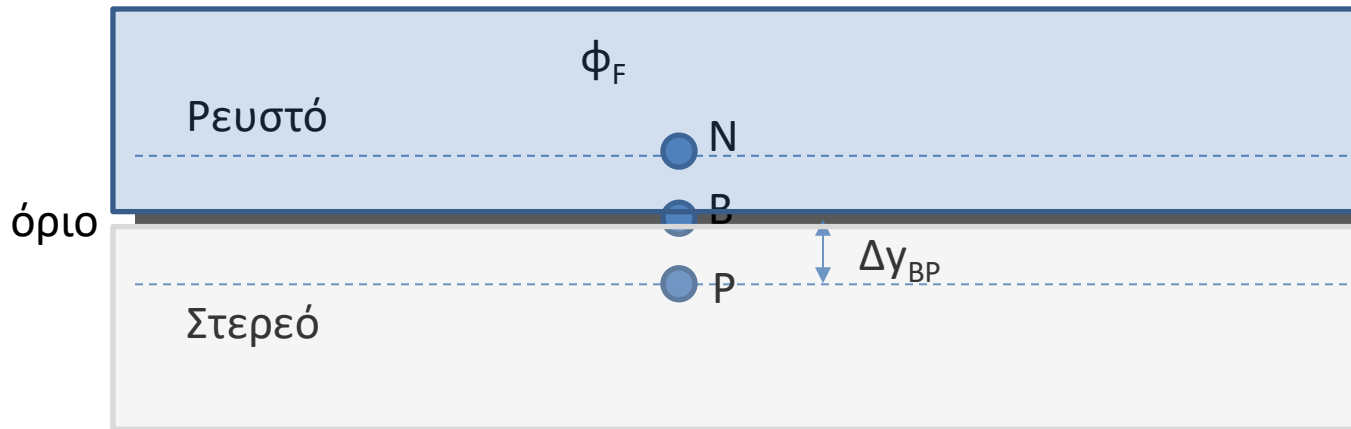
Όπου a_{nb} είναι οι συντελεστές όλων των γειτόνων κόμβων.

Επειδή το σύστημα των εξισώσεων θα πρέπει να έχει ισχυρή κύρια διαγώνιο, χρειαζόμαστε μεγάλες τιμές του παρονομαστή. Αυτό επιτυγχάνεται με $S_p < 0$. Το παραπάνω, διασφαλίζει π.χ. αν έχουμε μία ροή συναγωγής με οριακές θερμοκρασίες 500°C και 200°C, τότε η λύση (εσωτερικές τιμές της θερμοκρασίας) θα πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ των παραπάνω οριακών τιμών.

Κριτήριο του φραγμένου: (α) Κριτήριο Scarborough ΚΑΙ (β) οι συντελεστές της διακριτοποιημένης εξίσωσης είναι ομόσημοι (συνήθως θετικοί).

Μεταχείριση οριακών συνθηκών βαθμωτού μεγέθους

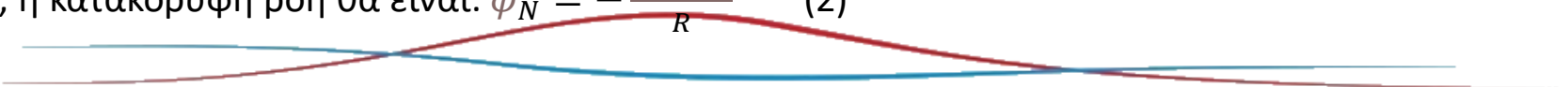
Η γενίκευση της μεταχείρισης των οριακών συνθηκών βασίζεται στη θεώρηση της οριακής συνθήκης ως ψευδοπηγή. Για παράδειγμα, έστω ότι επιλύεται το πρόβλημα διάχυσης της ποσότητας ϕ διαμέσου του στερεού τοίχου και εν συνεχεία της συναγωγής στο ρευστό στο παρακάτω σχήμα:



Στη γενική διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς (στον κατακόρυφο άξονα) προστίθεται στο δεξιό σκέλος ένας όρος ψευδοπηγής, ο οποίος γραμμικοποιείται ως εξής:

$$S_{BC} = SU_{BC} + SP_{BC}\phi_P \quad (1)$$

Η φυσική υπαγορεύει ότι κοντά στο όριο (Κόμβος N) θα υπάρχει αντίσταση R στη ροή σύμφωνα με την οποία, η κατακόρυφη ροή θα είναι: $\dot{\phi}_N = -\frac{\phi_P - \phi_F}{R}$ (2)





Μεταχείριση οριακών συνθηκών βαθμωτού μεγέθους

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$SP_{BC} = -\frac{1}{R} \text{ και } SU_{BC} = \frac{\varphi_F}{R}$$

Όπου R είναι η ολική αντίσταση στη ροή, η οποία στο **σχήμα Κεντρικών Διαφορών** εκφράζεται ως εξής:

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}} + \rho u A}, \text{ αν B=Ανάντη όριο}$$

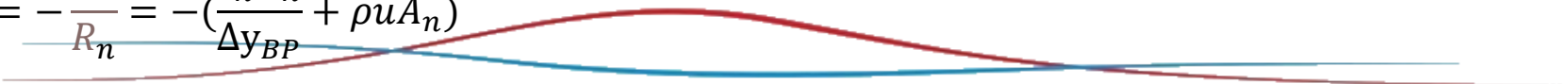
$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}} - \rho u A}, \text{ αν B=Κατάντη όριο}$$

Οπότε, π.χ. για το ανάντη όριο:

$$SU_{BC} = \frac{\varphi_F}{R_n} = \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{BP}} + \rho u A_n \right) \varphi_B \quad (\text{επειδή } \phi_B = \phi_F \text{ λόγω αδιαπέρατου ορίου}).$$

ΚΑΙ

$$SP_{BC} = -\frac{1}{R_n} = -\left(\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{BP}} + \rho u A_n \right)$$





Μεταχείριση οριακών συνθηκών βαθμωτού μεγέθους

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$SP_{BC} = -\frac{1}{R} \text{ και } SU_{BC} = \frac{\varphi_F}{R}$$

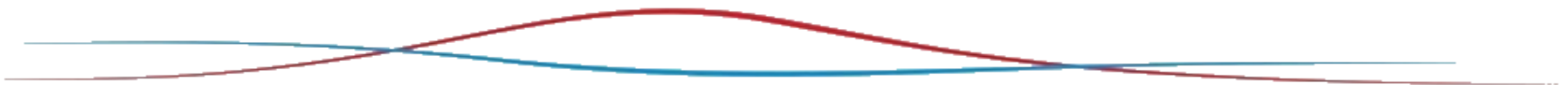
Όπου R είναι η ολική αντίσταση στη ροή, η οποία **στο Ανάντη και στο Υβριδικό Σχήμα** εκφράζεται ως εξής:

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}} + \rho u A}, \text{ αν } B=\text{Ανάντη όριο και } u_w > 0, u_e > 0$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}}}, \text{ αν } B=\text{Κατάντη όριο και } u_w > 0, u_e > 0$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}}}, \text{ αν } B=\text{Ανάντη όριο και } u_w < 0, u_e < 0$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma_A}{\Delta y_{BP}} - \rho u A}, \text{ αν } B=\text{Κατάντη όριο και } u_w < 0, u_e < 0$$





Μεταχείριση οριακών συνθηκών βαθμωτού μεγέθους

Εφαρμογή στη ροή θερμότητας:

$\Phi = T$

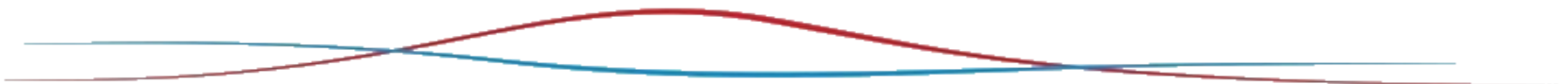
Τύπος οριακής συνθήκης	SP_{BC}	SU_{BC}
Σταθερή θερμοκρασία T_B	$-\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{BP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n T_B}{\Delta y_{BP}}$
Σταθερή ροή	0	$\frac{\dot{Q}_B''}{C_p} A_n$
Συναγωγή θερμότητας	$-\frac{1}{R_n}$	$\frac{T_F}{R_n}$

Όπου

$\dot{Q}_B''$ ροή θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας.

Γ_n είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του στερεού k ή λ (W/mK)

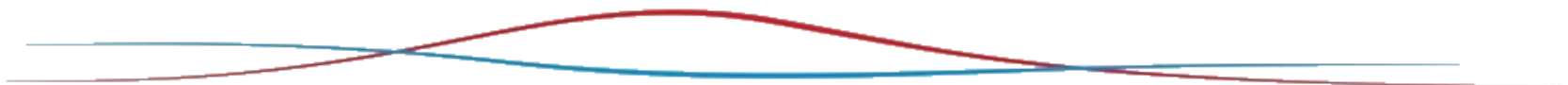
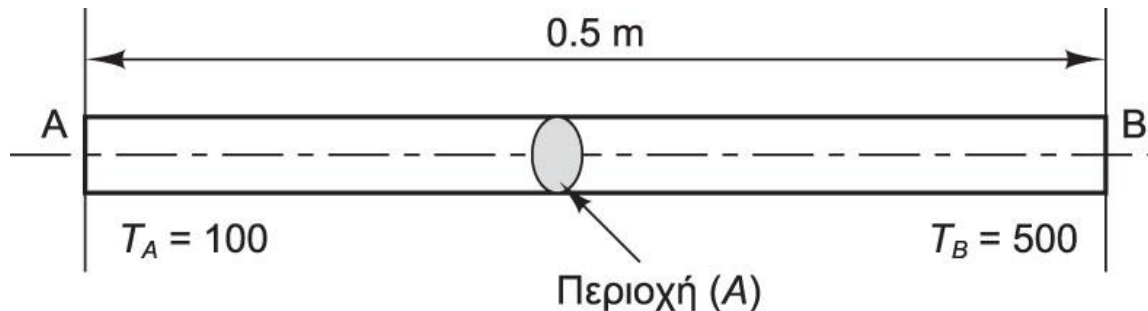
R_n είναι η συνολική θερμική αντίσταση.



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

Οι θερμοκρασίες στα άκρα μίας ράβδου μήκους $L=0.5\text{m}$ και διατομής $A=0.01\text{ m}^2$ είναι $T_A=100\text{ }^\circ\text{C}$, και $T_B=500\text{ }^\circ\text{C}$. Αν ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας της ράβδου είναι $k=1000\text{ W/(m}^\circ\text{C)}$, να χαραχθεί (σε κοινό σύστημα αξόνων) η κατανομή της θερμοκρασίας από το ένα άκρο στο άλλο σύμφωνα με:

- (α) Τη μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου με χωρικό βήμα διακριτοποίησης $\Delta x=0.1\text{ m}$.
- (β) Την αναλυτική λύση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας με αγωγή (χωρίς πηγή).



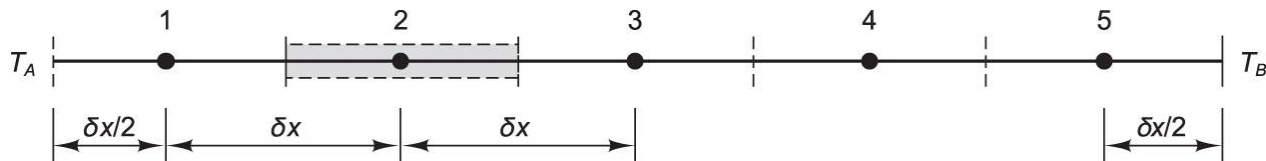
Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(α) Μέθοδος Α: Μέθοδος πεπερασμένων όγκων.

Καταρχήν η κυβερνούσα εξίσωση της ροής θερμότητας (χωρίς πηγή) είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Χωρική διακριτοποίηση του πεδίου ροής:

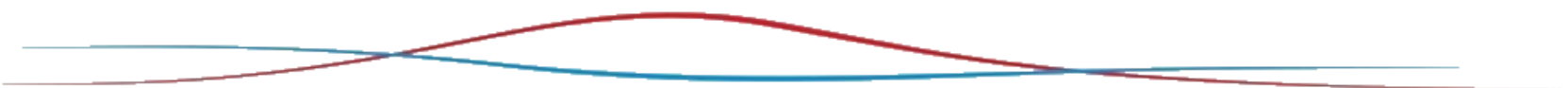


Ο διαχωρισμός κατά $\Delta x = 0.1$ οδηγεί σε 5 διαστήματα τα οποία θεωρούνται ως υπολογιστικά κελιά με κεντρικούς κόμβους τους 1,2,3,4,5 και μέτωπα τις διακεκομμένες κάθετες γραμμές. Στα όρια είναι γνωστές οι τιμές της θερμοκρασίας στα μέτωπα T_A και T_B .

Η διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς (μονοδιάστατο πρόβλημα) είναι:

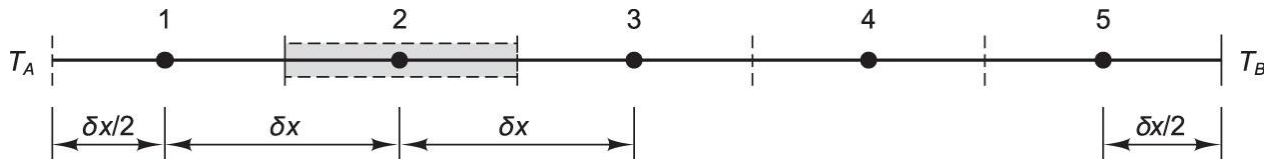
$$(a_P - \cancel{SP} - \cancel{SP_{BC}})T_P = a_W T_W + a_E T_E + \cancel{SU} + \cancel{SU_{BC}}$$

$\downarrow$ 0 παντού
 $\downarrow$ 0 παντού



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(α) Μέθοδος Α: Μέθοδος πεπερασμένων όγκων.



Για τους ενδιάμεσους κόμβους 2,3,4, θα είναι:

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} = \frac{kA}{\Delta x} = 100$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} = \frac{kA}{\Delta x} = 100$$

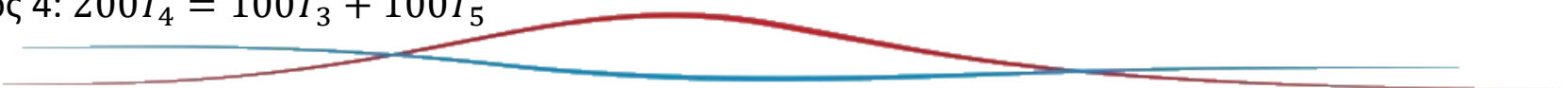
$$a_P = a_W + a_E = 200 \text{ (δεν υπάρχει πηγή και δεν υπάρχουν όροι συναγωγής)}$$

Δηλ. η εξίσωση μεταφοράς θα είναι:

$$\text{Κόμβος 2: } 200T_2 = 100T_1 + 100T_3$$

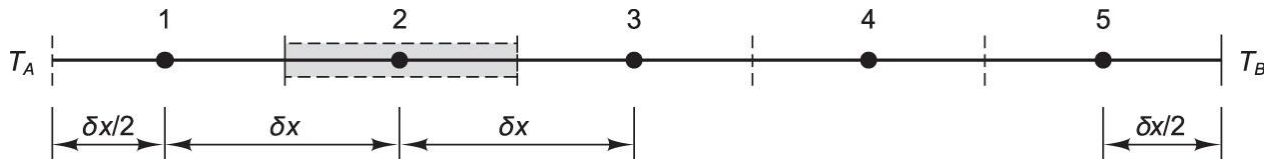
$$\text{Κόμβος 3: } 200T_3 = 100T_2 + 100T_4$$

$$\text{Κόμβος 4: } 200T_4 = 100T_3 + 100T_5$$



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(α) Μέθοδος Α: Μέθοδος πεπερασμένων όγκων.



Για τον κόμβο 1 (υπάρχει ψευτοπηγή σταθ. θερμοκρασίας στο δυτικό μέτωπο), οπότε οι συντελεστές της εξίσωσης μεταφοράς γίνονται:

$$a_W = 0$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} = \frac{kA}{\Delta x} = 100$$

$$SP_{BC} = -\frac{\Gamma_w A_w}{\frac{\Delta x}{2}} = -\frac{2kA}{\Delta x} = -200$$

$$SU_{BC} = \frac{\Gamma_w A_w T_A}{\frac{\Delta x}{2}} = 200T_A$$

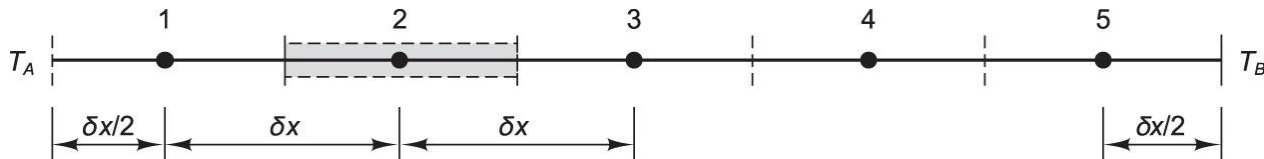
$$a_p - SP_{BC} = a_W + a_E - SP_{BC} = 300$$

$$300T_P = 100T_E + 200T_A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300T_1 = 100T_2 + 200T_A$$

Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(α) Μέθοδος Α: Μέθοδος πεπερασμένων όγκων.



Για τον κόμβο 5 (υπάρχει ψευτοπηγή σταθ. θερμοκρασίας στο ανατολικό μέτωπο), οπότε οι συντελεστές της εξίσωσης μεταφοράς γίνονται:

$$a_E = 0$$

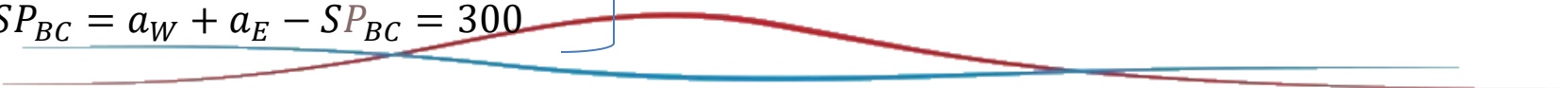
$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} = \frac{kA}{\Delta x} = 100$$

$$SP_{BC} = -\frac{\Gamma_e A_e}{\frac{\Delta x}{2}} = -\frac{2kA}{\Delta x} = -200$$

$$SU_{BC} = \frac{\Gamma_e A_e T_B}{\frac{\Delta x}{2}} = 200T_B$$

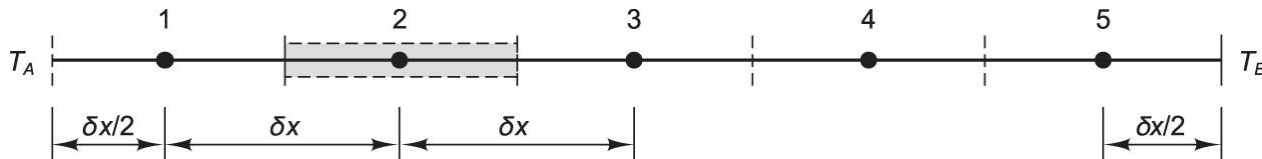
$$a_p - SP_{BC} = a_W + a_E - SP_{BC} = 300$$

$$300T_P = 100T_W + 200T_B \Leftrightarrow 300T_5 = 100T_4 + 200T_B$$



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(α) Μέθοδος Α: Μέθοδος πεπερασμένων όγκων.



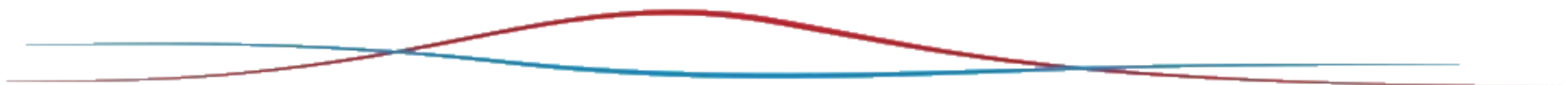
Οπότε, για το πεδίο ροής αρκεί να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix}$$



Αποτελέσματα		
	x (m)	
TA	100	0
T1	140	0,05
T2	220	0,15
T3	300	0,25
T4	380	0,35
T5	460	0,45
TB	500	0,5

Βλ. συνοδευτικό excel "FVM_examples"



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας χωρίς πηγή

(β) Μέθοδος Β: Αναλυτική λύση.

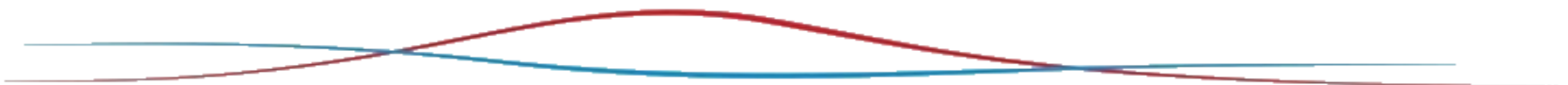
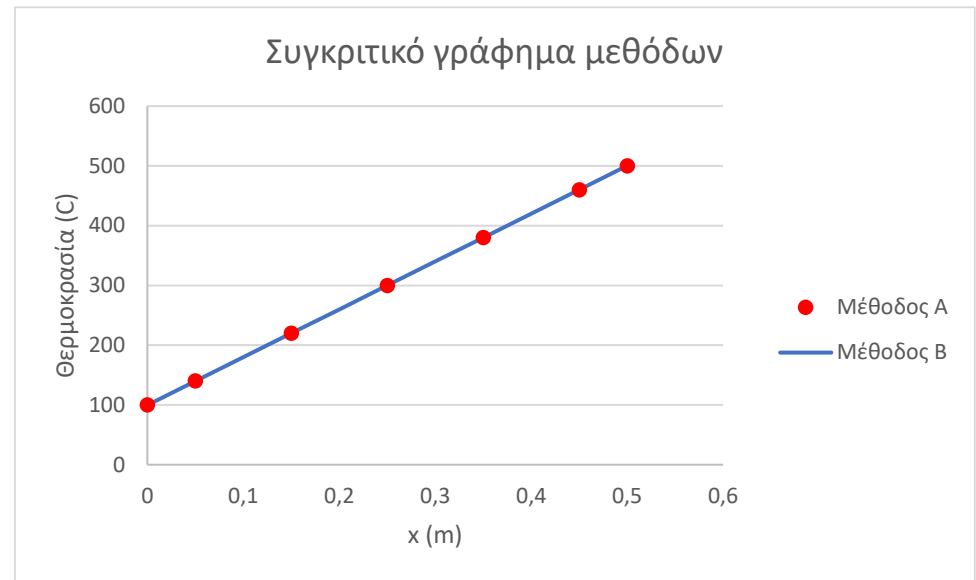
Βλ. συνοδευτικό excel “FVM_examples”

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow T = \frac{c_1}{k} x + c_2$$

Οριακές συνθήκες:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow T=T_A \\ x=L \Rightarrow T=T_B \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_1 = \frac{(T_B - T_A)}{L} k \text{ και} \\ c_2 = T_A \end{array}$$

$$\text{Οπότε: } T = \frac{T_B - T_A}{L} x + T_A = 800x + 100$$

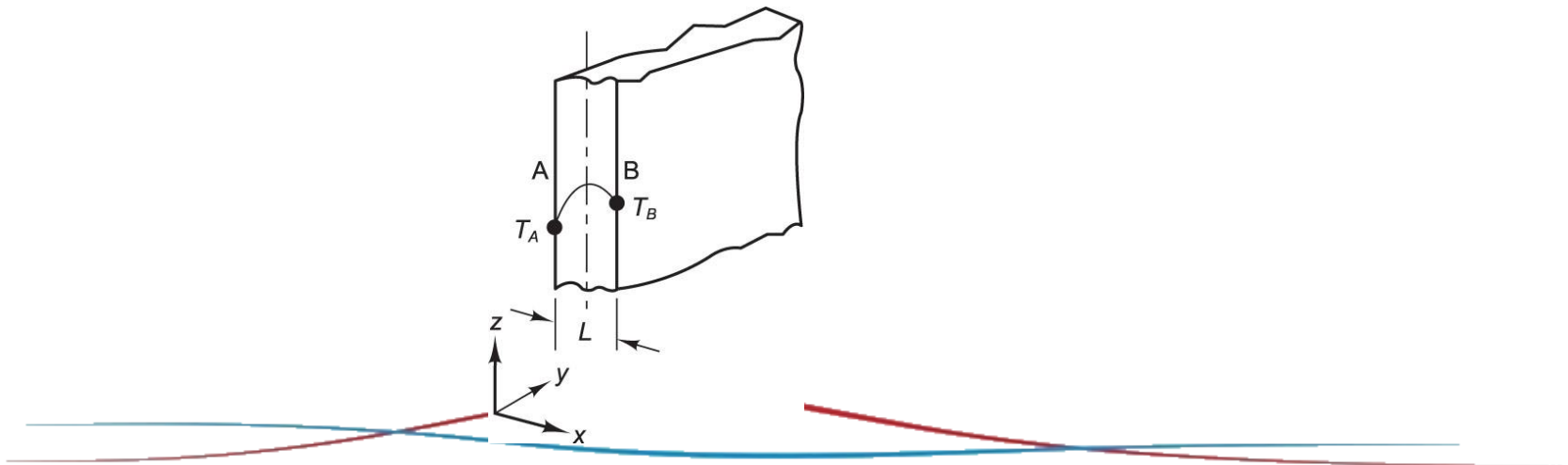


Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

Οι θερμοκρασίες στις έδρες A και B της ευμέγεθους πλάκας, πάχους $L=2\text{cm}$ του σχήματος είναι $T_A=100^\circ\text{C}$ και $T_B=200^\circ\text{C}$, αντίστοιχα. Η πλάκα έχει συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k=0.5\text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ και ομοιόμορφη παραγωγή θερμότητας $q=1000\text{ kW}/\text{m}^3$. Με την υπόθεση ότι οι διαστάσεις στις διευθύνσεις y και z είναι τόσο μεγάλες ώστε οι κλίσεις θερμοκρασίας είναι σημαντικές μόνο στη διεύθυνση x , να υπολογιστεί η κατανομή της θερμοκρασίας (στη διεύθυνση x) σε μόνιμη κατάσταση, με εφαρμογή και συγκριτική γραφική απεικόνιση των παρακάτω μεθόδων:

(α) Τη μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

(β) Την αναλυτική λύση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας με αγωγή και πηγή.



Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

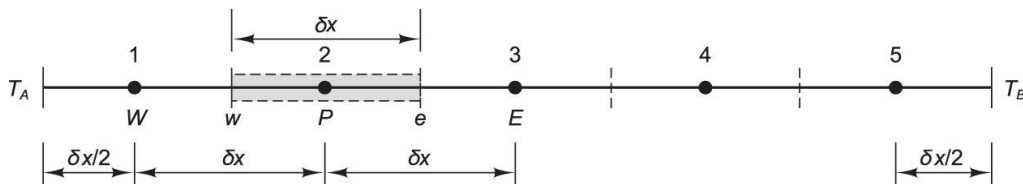
(α) **Μέθοδος Α: πεπερασμένων όγκων ελέγχου** στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

Βλ. Excel “FVM_examples”

$$\text{Διέπουσα εξίσωση της ροής: } \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0$$

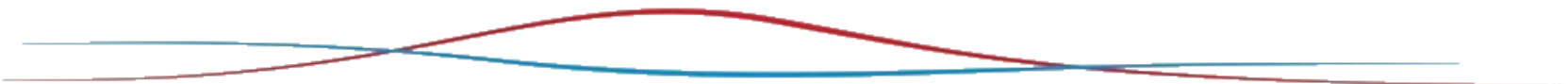
N=5 υπολογιστικά κελιά σημαίνει:

- Διάστημα διακριτοποίησης: $\Delta x = L/5 = 0.004 \text{ m}$.
- Πλήθος υπολογιστικών κόμβων: $n = N = 5$.



Γενική εξίσωση μεταφοράς (μονοδιάστατο πρόβλημα, μόνιμη κατάσταση):

$$(a_P - SP - SP_{BC})T_P = a_W T_W + a_E T_E + SU + SU_{BC}$$





Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

(α) **Μέθοδος Α: πεπερασμένων όγκων ελέγχου** στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

Γενική εξίσωση μεταφοράς (μονοδιάστατο πρόβλημα, μόνιμη κατάσταση):

$$(a_P - SP - SP_{BC})T_P = a_W T_W + a_E T_E + SU + SU_{BC}$$

Στους ενδιάμεσους κόμβους 2,3,4:

$$a_W = \frac{kA}{\Delta x}, a_E = \frac{kA}{\Delta x}, a_P = a_W + a_E = \frac{2kA}{\Delta x}$$

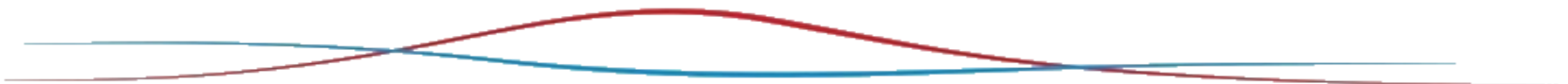
$$SP = 0 \text{ (ομοιόμορφη πηγή θερμότητας)}$$

$$SU = S_u V_P = qA\Delta x$$

$$SP_{BC} = 0, SU_{BC} = 0$$

Οπότε, η εξίσωση μεταφοράς γίνεται:

$$250T_P = 125T_E + 125T_W + 4000$$





Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

(α) **Μέθοδος Α: πεπερασμένων όγκων ελέγχου** στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

Γενική εξίσωση μεταφοράς (μονοδιάστατο πρόβλημα, μόνιμη κατάσταση):

$$(a_P - SP - SP_{BC})T_P = a_W T_W + a_E T_E + SU + SU_{BC}$$

Στον δυτικό οριακό κόμβο 1:

$$a_W = 0, a_E = \frac{kA}{\Delta x}, a_P = a_E = \frac{kA}{\Delta x}$$

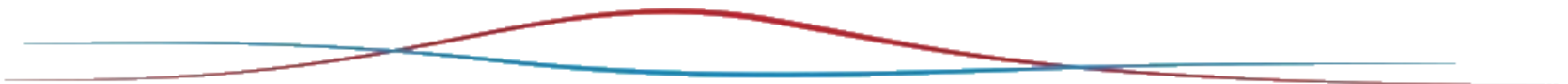
$$SP = 0 \text{ (ομοιόμορφη πηγή θερμότητας)}$$

$$SU = S_u V_P = qA\Delta x$$

$$SP_{BC} = -\frac{kA}{\frac{\Delta x}{2}}, SU_{BC} = \frac{kAT_A}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Οπότε, η εξίσωση μεταφοράς γίνεται:

$$375T_P = 125T_E + 29000$$





Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

(α) **Μέθοδος Α: πεπερασμένων όγκων ελέγχου** στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

Γενική εξίσωση μεταφοράς (μονοδιάστατο πρόβλημα, μόνιμη κατάσταση):

$$(a_P - SP - SP_{BC})T_P = a_W T_W + a_E T_E + SU + SU_{BC}$$

Στον ανατολικό οριακό κόμβο 5:

$$a_W = \frac{kA}{\Delta x}, a_E = 0, a_P = a_W = \frac{kA}{\Delta x}$$

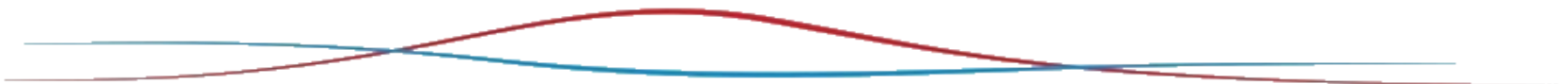
$$SP = 0 \text{ (ομοιόμορφη πηγή θερμότητας)}$$

$$SU = S_u V_P = qA\Delta x$$

$$SP_{BC} = -\frac{kA}{\frac{\Delta x}{2}}, SU_{BC} = \frac{kAT_B}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Οπότε, η εξίσωση μεταφοράς γίνεται:

$$375T_P = 125T_W + 54000$$





Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

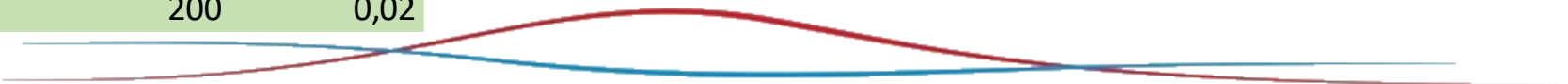
(α) **Μέθοδος Α: πεπερασμένων όγκων ελέγχου** στην περίπτωση εφαρμογής 5 υπολογιστικών κελιών.

Πίνακας συντελεστών αλγεβρικού συστήματος:

					Διάνυσμα σταθερών
375	-125	0	0	0	29000
-125	250	-125	0	0	4000
0	-125	250	-125	0	4000
0	0	-125	250	-125	4000
0	0	0	-125	375	54000

Λύση:

Λύση	T	x(m)
TA	100	0
T1	150	0,002
T2	218	0,006
T3	254	0,01
T4	258	0,014
T5	230	0,018
TB	200	0,02





Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

(β) Μέθοδος Β: Αναλυτική λύση

Διπλή ολοκλήρωση της διέπουσας εξίσωσης:

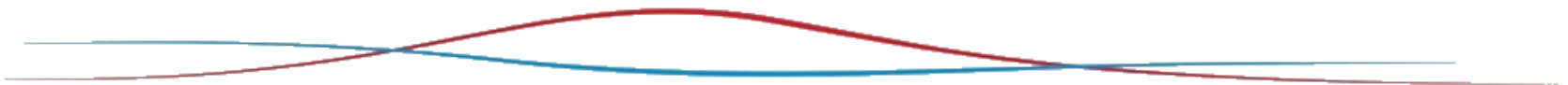
$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + \frac{c_1x}{k} + c_2$$

Όπου c_1 και c_2 οι σταθερές ολοκλήρωσης, που προσδιορίζονται με αξιοποίηση των οριακών συνθηκών:

$$x=0 \Rightarrow T=T_A, \text{ και } x=L \Rightarrow T=T_B$$

Οπότε, η εξίσωση κατανομής θερμοκρασίας κατά μήκος του πάχους της πλάκας προκύπτει:

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$$

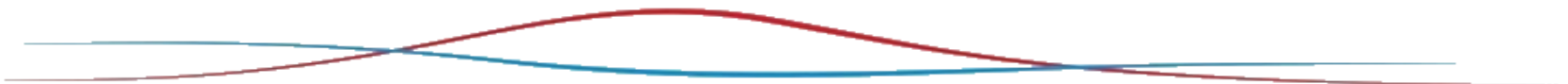
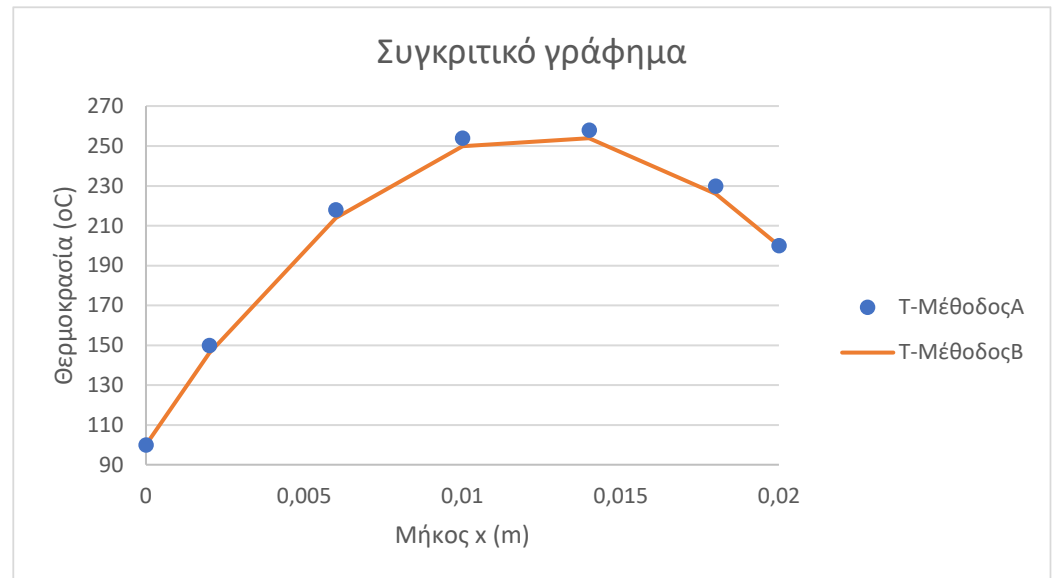


Άσκηση: Αγωγή θερμότητας με πηγή

(β) Μέθοδος Β: Αναλυτική λύση

Με επίλυση της εξίσωσης στους κόμβους της μεθόδου Α προκύπτει:

x(m)	Μέθοδος Β	Μέθοδος Α	
	T (οC)	T (οC)	Σφάλμα (%)
0	100	100	0
0,002	146	150	2,739726027
0,006	214	218	1,869158879
0,01	250	254	1,6
0,014	254	258	1,57480315
0,018	226	230	1,769911504
0,02	200	200	2,84217E-14

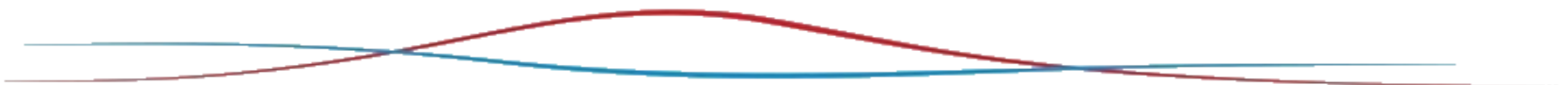
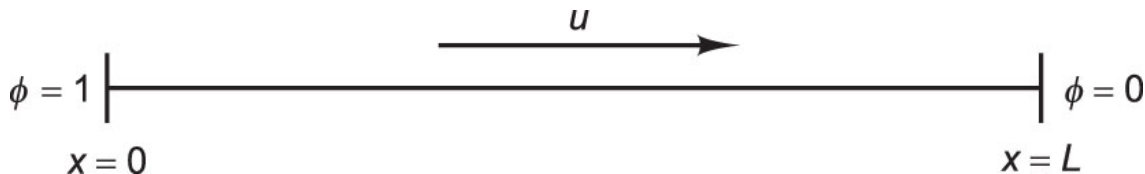


Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Μία ποσότητα ϕ μεταφέρεται μέσω συναγωγής και διάχυσης στο μονοδιάστατο χώρο του παρακάτω σχήματος. Οι οριακές συνθήκες είναι $\phi_0 = 1$ (στη θέση $x=0$) και $\phi_L = 0$ (στη θέση $x=L$). Με διακριτοποίηση του πεδίου ροής σε 5 ισαπέχοντα κελιά, να υπολογιστεί η κατανομή της ϕ , με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών και με το Υβριδικό Σχήμα, για δύο περιπτώσεις ταχύτητας: (1) $u=0.1\text{m/s}$, (2) $u=2.5\text{m/s}$. Να συγκριθούν τα αποτελέσματα με την αναλυτική λύση η οποία δίδεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1}$$

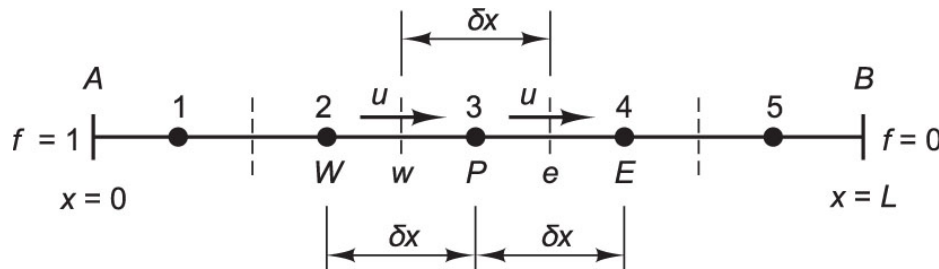
Δίδονται: $L=1\text{ m}$, $\rho=1\text{ kg/m}^3$, $\Gamma=0.1\text{ kg/ms}$.



Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Χωρική διακριτοποίηση

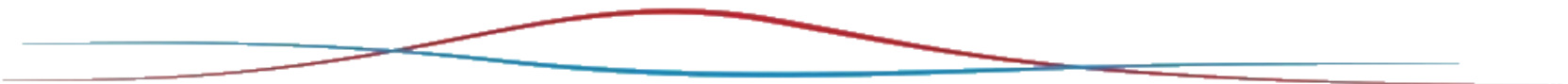
Διαχωρισμός σε 5 ισαπέχοντα κελιά, δηλ. 5 κεντρικοί κόμβοι όπως φαίνεται στο Σχήμα. Μήκος του κάθε όγκου (κελιού) $\Delta x = 0.2 \text{ m}$.



Διέπουσα εξίσωση:

$$(a_P - SP - SP_{BC})\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + SU + SU_{BC}$$

Όπου: $a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w = a_E + a_W$ (λόγω σταθερής ταχύτητας).





Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Κεντρικές διαφορές

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{EP}} - 0.5(\rho u)_e A_e$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} + 0.5(\rho u)_w A_w$$

$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w$$

Με οριακές συνθήκες:

$$SP_{BC} = -\frac{1}{R_{\square}} \text{ και } SU_{BC} = \frac{\varphi_F}{R_{\square}}$$

Όπου R είναι η ολική αντίσταση στη ροή, η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}} + \rho u A}, \text{ αν B=}\underline{\text{Ανάντη όριο}} \text{ (κόμβος 1)}$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}} - \rho u A}, \text{ αν B=}\underline{\text{Κατάντη όριο}} \text{ (κόμβος 5)}$$





Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Κεντρικές διαφορές

Εφαρμογή της διέπουσας εξίσωσης στους διάφορους κόμβους:

	Ενδιάμεσοι κόμβοι	Δυτικό όριο (Κόμβος 1)	Ανατολικό όριο (Κόμβος 5)
α_E	0,45	0,45	0
α_W	0,55	0	0,55
α_P	1	0,45	0,55
SP	0	0	0
SU	0	0	0
SP_BC	0	-1,1	-0,9
SU_BC	0	1,1	0

Άρα, το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων θα είναι:

Πίνακας συντελεστών							Σταθερές
Κόμβος	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5		
1	1,55	-0,45	0	0	0		
2	-0,55	1	-0,45	0	0		
3	0	-0,55	1	-0,45	0		
4	0	0	-0,55	1	-0,45		
5	0	0	0	-0,55	1,45		



Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Κεντρικές διαφορές

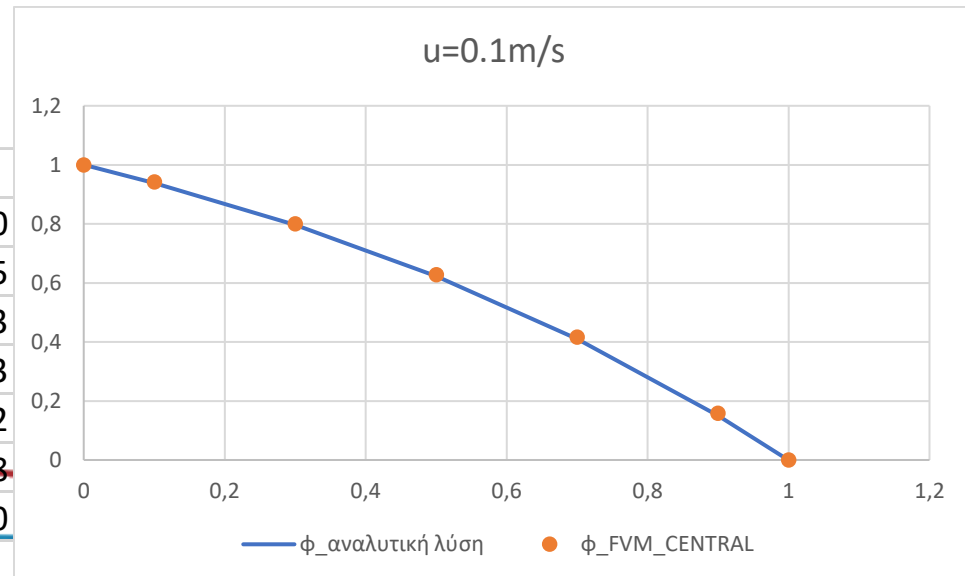
Επίλυση του συστήματος (βλ. Excel “FVM_examples”):

Αποτελέσματα

x(m)	ϕ
0	1
0,1	0,942109959
0,3	0,800600969
0,5	0,627645536
0,7	0,416255564
0,9	0,157890041
1	0

Σύγκριση με την αναλυτική λύση:

x(m)	$\phi_{\text{αναλυτική λύση}}$	$\phi_{\text{FVM_CENTRAL}}$	Σφάλμα(%)
0	1	1	0
0,1	0,938792975	0,94210996	0,35
0,3	0,796390323	0,80060097	0,53
0,5	0,622459331	0,62764554	0,83
0,7	0,410019538	0,41625556	1,52
0,9	0,150544988	0,15789004	4,88
1	0	0	0

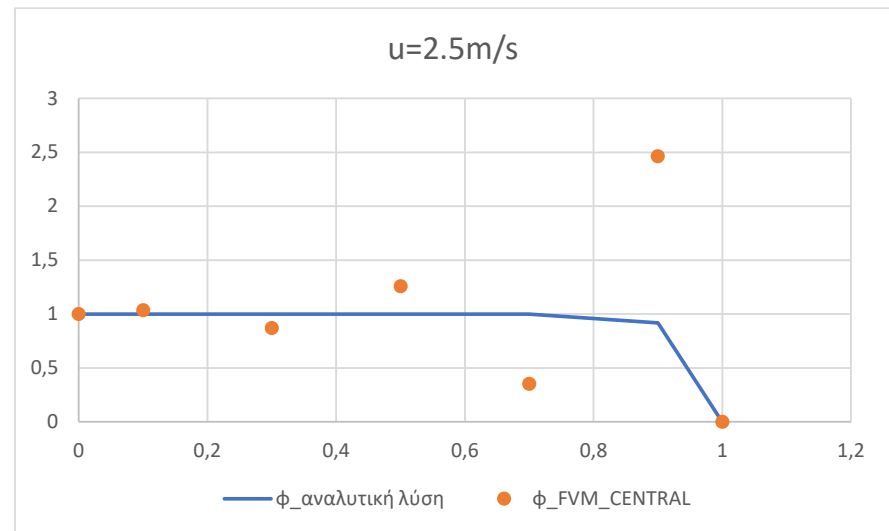


Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

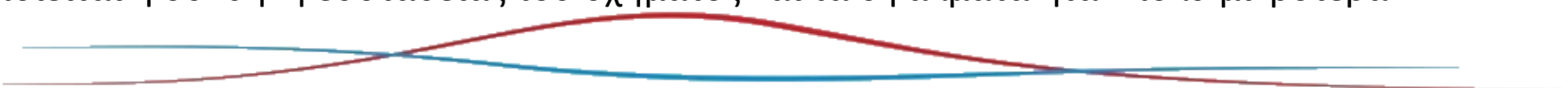
Κεντρικές διαφορές

Η διαδικασία υπολογισμών επαναλαμβάνεται όπως παραπάνω για $u=2.5\text{m/s}$ και προκύπτουν:

$x(\text{m})$	$\phi_{\text{αναλυτική λ}}$	$\phi_{\text{FVM_CENT}}$	Σφάλμα(%)
0	1	1	0
0,1	1	1,0356305	3,56
0,3	0,999999975	0,86935484	13,06
0,5	0,999996273	1,25733138	25,73
0,7	0,999446916	0,35205279	64,78
0,9	0,917915001	2,4643695	168,47
1	7,21645E-15	0	0



Εμφανίζονται έντονες ταλαντώσεις σε σχέση με την περίπτωση $u=0.1\text{m/s}$. Ο λόγος είναι ότι στην παρούσα περίπτωση είναι $Re=\rho u \Delta x / \Gamma = 5$, ενώ στην προηγούμενη περίπτωση ήταν $Re=0.2$. Όπως αποδείχτηκε στη θεωρία, όταν $Re > 2$ το σχήμα κεντρικών διαφορών δεν ευσταθεί και αποκλίνει. Αυτό επαληθεύεται στην παρούσα περίπτωση. Αντίθετα, στην προηγούμενη περίπτωση ($u=0.1\text{m/s}$) ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας του σχήματος και τα σφάλματα ήταν πολύ μικρότερα.





Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Υβριδικό σχήμα

$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w$$

$$a_E = \max \left[|0.5(\rho u)_e A_e|, \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right] - 0.5(\rho u)_e A_e$$

$$a_W = \max \left[|0.5(\rho u)_w A_w|, \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{PW}} \right] + 0.5(\rho u)_w A_w$$

Με οριακές συνθήκες:

$$SP_{BC} = -\frac{1}{R_{\square}} \text{ και } SU_{BC} = \frac{\varphi_F}{R_{\square}}$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}} + \rho u A}, \text{ αν B=Ανάπτυξη όριο και } u_w > 0, u_e > 0 \text{ (κόμβος 1)}$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}}}, \text{ αν B=Κατάπτυξη όριο και } u_w > 0, u_e > 0 \text{ (κόμβος 5)}$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}}}, \text{ αν B=Ανάπτυξη όριο και } u_w < 0, u_e < 0$$

$$R = \frac{1}{\frac{\Gamma A}{\Delta y_{BP}} - \rho u A}, \text{ αν B=Κατάπτυξη όριο και } u_w < 0, u_e < 0$$



Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Υβριδικό σχήμα

Εφαρμογή της διέπουσας εξίσωσης στους διαφόρους κόμβους

	Ενδιάμεσοι κόμβοι	Δυτικό όριο (Κόμβος 1)	Ανατολικό όριο (Κόμβος 5)
αE	0,45	0,45	0
αW	0,55	0	0,55
αP	1	0,45	0,55
SP	0	0	0
SU	0	0	0
SP_BC	0	-1,1	-1
SU_BC	0	1,1	0

Και το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων γίνεται:

Πίνακας συντελεστών							Σταθερές
Κόμβος	α1	α2	α3	α4	α5		
1	1,55	-0,45	0	0	0		1,1
2	-0,55	1	-0,45	0	0		0
3	0	-0,55	1	-0,45	0		0
4	0	0	-0,55	1	-0,45		0
5	0	0	0	-0,55	1,55		0

Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

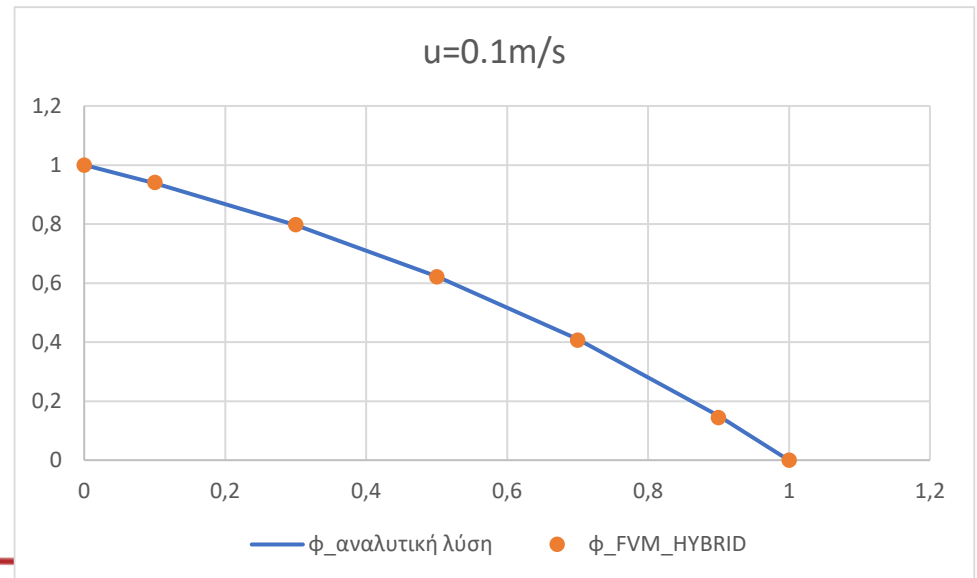
Υβριδικό σχήμα

Επίλυση του συστήματος (βλ. Excel “FVM_examples”):

Αποτελέσματα		
x(m)	ϕ	
0		1
0,1	0,941181269	
0,3	0,79740215	
0,5	0,621672116	
0,7	0,406890963	
0,9	0,144380664	
1		0

Σύγκριση με την αναλυτική λύση:

x(m)	$\phi_{\text{αναλυτική λ}}$	$\phi_{\text{FVM_HYBR}}$	Σφάλμα(%)
0	1	1	0
0,1	0,938792975	0,94118127	0,25
0,3	0,796390323	0,79740215	0,13
0,5	0,622459331	0,62167212	0,13
0,7	0,410019538	0,40689096	0,76
0,9	0,150544988	0,14438066	4,09
1	0	0	0

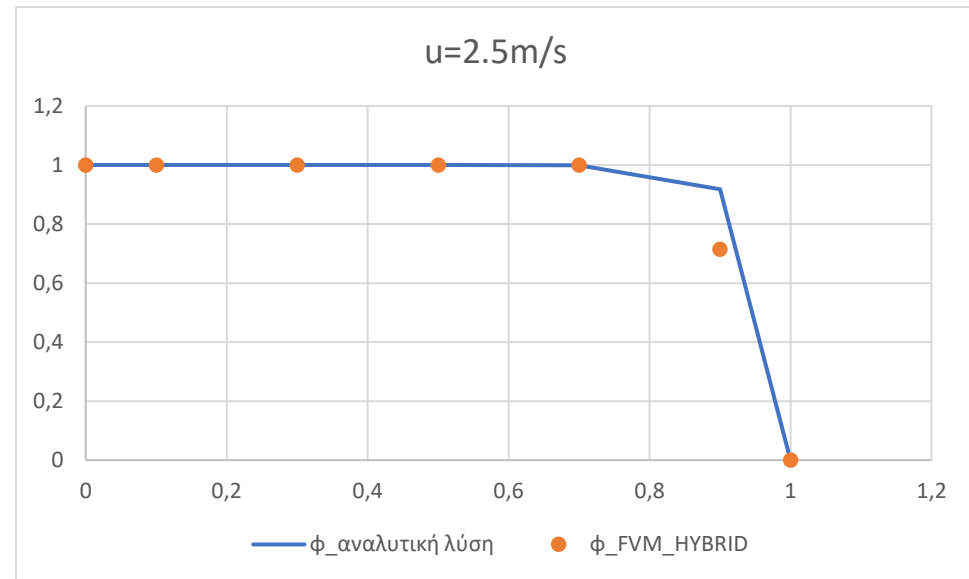


Άσκηση: Αγωγή και συναγωγή χωρίς πηγή

Υβριδικό σχήμα

Η διαδικασία υπολογισμών επαναλαμβάνεται όπως παραπάνω για $u=2.5\text{m/s}$ και προκύπτουν:

$x(\text{m})$	$\phi_{\text{αναλυτική λ}}$	$\phi_{\text{FVM_HYBRID}}$	Σφάλμα(%)
0	1	1	0
0,1	1	1	0,00
0,3	0,999999975	1	0,00
0,5	0,999996273	1	0,00
0,7	0,999446916	1	0,06
0,9	0,917915001	0,71428571	22,18
1	7,21645E-15	0	0



Παρατηρείται η δραματική βελτίωση της ακρίβειας της πρόβλεψης σε σχέση με το Σχήμα Κεντρικών Διαφορών. Ο λόγος είναι ότι όπως αποδείχθηκε παραπάνω στη θεωρία, το υβριδικό σχήμα εφαρμόζει το σχήμα κεντρικών διαφορών για $|Pe| \leq 2$, ενώ όπου αυτό δεν ισχύει εφαρμόζεται το ανάντη σχήμα το οποίο δουλεύει πολύ καλά για μεγάλες τιμές Pe , όταν δηλ. έχουμε ισχυρά συναγωγική ροή όπως εδώ για $u=2.5\text{m/s}$.

