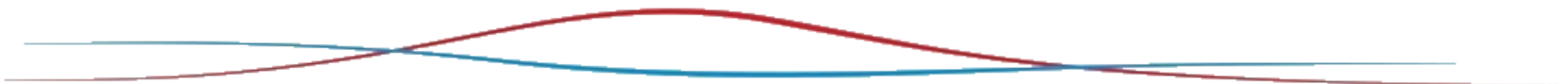




Τυρβώδης ροή

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ενεργειακή Κατεύθυνση
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής





Τι είναι η τύρβη

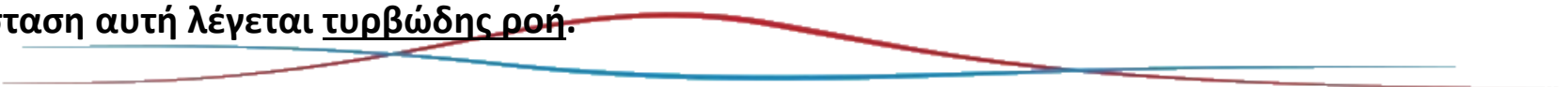
Ο δείκτης ελέγχου του είδους ροής, στρωτή ή τυρβώδης, είναι ο αδιάστατος αριθμός Reynolds:

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu}$$

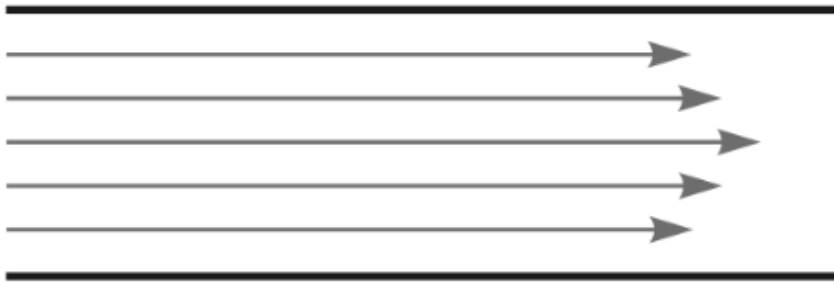
Όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού (kg/m^3), u η ταχύτητα (m/s), μ το δυναμικό ιξώδες ή συνεκτικότητα (kg/(ms)) και x είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος (m) του πεδίου ροής (π.χ. σε πρόβλημα ροής σε σωλήνα είναι η διάμετρος του σωλήνα).

Εκφράζει την σχετική επίδραση των δυνάμεων αδράνειας (συναγωγή στον αριθμητή) και των ιξωδών δυνάμεων (στον παρονομαστή). Όσο αυξάνει ο Reynolds τόσο αυξάνεται η επίδραση των αδρανειακών δυνάμεων σε σχέση με τις ιξώδεις. **Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds**, κάτω από μία κρίσιμη τιμή Re_{crit} **υπερτερούν οι ιξώδεις δυνάμεις και η ροή είναι ομαλή** με τα στρώματα ρευστού να γλιστρούν το ένα πλάι στο άλλο. Σε αυτή την περίπτωση, και με την υπόθεση ότι έχουμε σταθερές οριακές συνθήκες (σταθ. Ταχύτητα εισόδου), **οι ιδιότητες της ροής παραμένουν σταθερές, και έχουμε στρωτή ροή**.

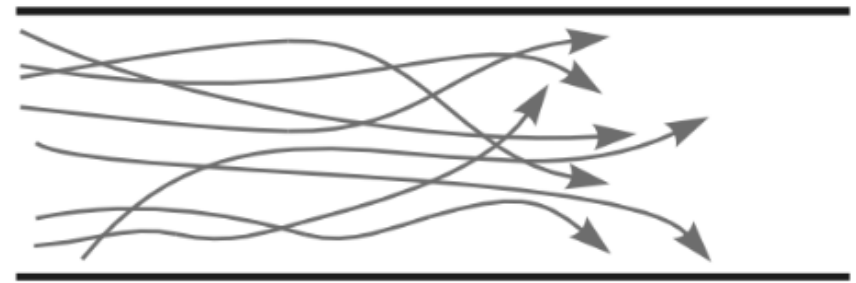
Στην περίπτωση, π.χ. αύξησης της ταχύτητας του ρευστού, έτσι που $Re > Re_{crit}$, **οι αδρανειακές δυνάμεις υπερτερούν έναντι των ιξωδών και αρχίζουν να εμφανίζονται μεταβολές των ιδιοτήτων της ροής με τυχαίο τρόπο, δηλ. η συμπεριφορά της ροής είναι τυχαία και χαοτική. Σε αυτή την περίπτωση, η ροή είναι πάντα μεταβατική ακόμα και με σταθερές χρονικά οριακές συνθήκες. Η κατάσταση αυτή λέγεται τυρβώδης ροή**.



Τι είναι η τύρβη



στρωτή ροή

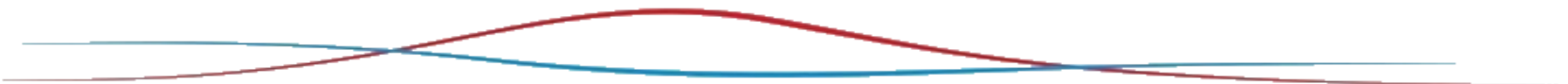


τυρβώδης ροή

Δηλ. κατά την μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή, υπάρχει μετάβαση από την «τάξη» στο «χάος». Όταν εμφανίζεται τύρβη, η ταχύτητα του ρευστού (η κάθε χωρική συνιστώσα της ταχύτητας) είναι τώρα το άθροισμα δύο χρονικά επηρεαζόμενων συνιστωσών ως εξής:

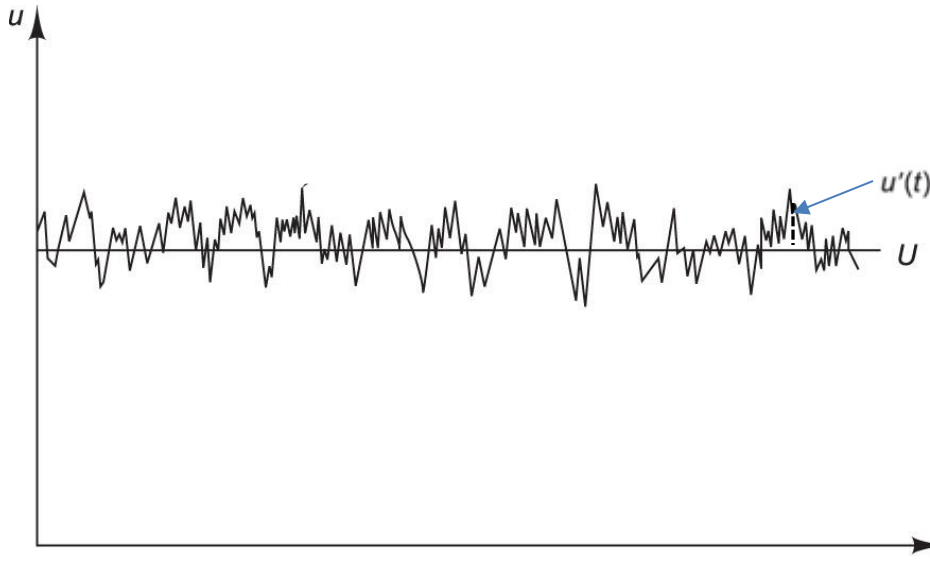
$$u(t) = U + u'(t),$$

Όπου U είναι η χρονικά μέση τιμή της ταχύτητας και $u'(t)$ είναι η διακυμαινόμενη συνιστώσα ταχύτητας.

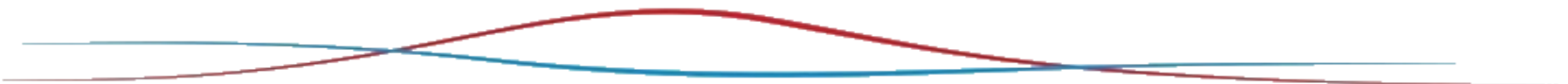


Τι είναι η τύρβη

Για παράδειγμα μία τυπική μέτρηση της ταχύτητας σε ένα σημείο του πεδίου ροής μπορεί να επιμεριστεί στην μέση τιμή και στην διακυμαινόμενη τιμή και αναπαρίσταται ως ακολούθως:



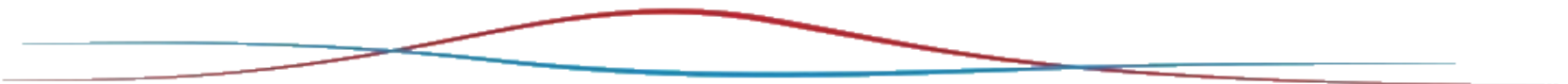
Ακόμη και σε ροές όπου οι μέσες ταχύτητες και πιέσεις μεταβάλλονται μόνο σε μία ή δύο χωρικές συντεταγμένες, οι τυρβώδεις διακυμάνσεις εμφανίζουν έναν τρισδιάστατο χωρικό χαρακτήρα. Επιπλέον, οι αναπαραστάσεις των τυρβωδών ροών αποκαλύπτουν δομές στροβιλότητας με εμφάνιση δινών σε ευρύ φάσμα κλιμάκων μήκους (length scales). Εκλαϊκευμένα, η κλίμακα μήκους της δίνης είναι το σχετικό μέγεθος της δίνης σε σχέση με άλλες στο πεδίο ροής.





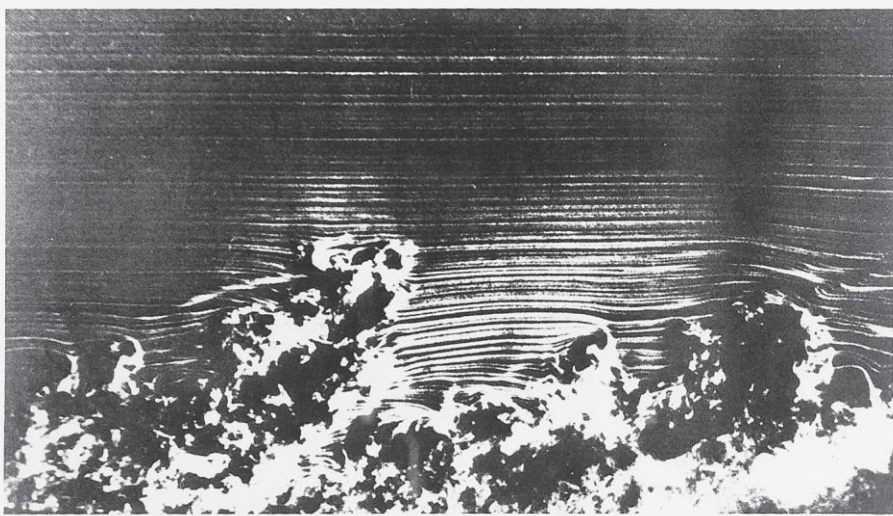
Τι είναι η τύρβη

Το βασικότερο χαρακτηριστικό της τυρβώδους ροής είναι η μεταφορά ενέργειας στις μικρότερες χωρικές κλίμακες κατά μήκος ενός συνεχούς φάσματος κυματικού αριθμού, δηλ. πρόκειται για τρισδιάστατη μη γραμμική διεργασία. Σύμφωνα με την θεώρηση της «δίνης» (eddy concept), η δίνη μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια **τυπική τυρβώδης δομή, που καλύπτει ένα εύρος μηκών κύματος μεγάλων και μικρών δινών που συνυπάρχουν σε ένα όγκο ρευστού. Τα δομικά χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής είναι οι δίνες και οι ανακυκλοφορίες.** Αναλογικά με το μοριακό ιξώδες, η τυρβώδης ροή περιγράφεται από το τυρβώδες ιξώδες, που εκπροσωπεί τοπική ιδιότητα του ρευστού. Οι δίνες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα «κουβάρι» στροβίλων που τεντώνεται προς μια προτιμώμενη διεύθυνση από τη μέση ροή και προς μια τυχαία διεύθυνση από τον ένα στρόβιλο στον άλλο. Ο μηχανισμός αυτός λέγεται «τέντωμα των στροβίλων» (vortex stretching) που σε τελική ανάλυση, οδηγεί στην διάσπαση των μεγάλων δινών σε μικρότερες, με άλλα λόγια **η διεργασία παίρνει τη μορφή ενός «καταρράκτη ενέργειας».** Αφού οι δίνες συγκρίσιμου μεγέθους ανταλλάσσουν ενέργεια μεταξύ τους, **η κινητική ενέργεια της μέσης ροής προκύπτει από τις μεγαλύτερες δίνες.** Στη συνέχεια, το ποσό αυτό ενέργειας μεταφέρεται στις γειτονικές δίνες μικρότερης κλίμακας μήκους, συνεχίζει προς όλο και μικρότερες δίνες, ενώ η ελάχιστη κλίμακα μήκους προσεγγίζεται όταν οι δίνες χάνουν ενέργεια από την άμεση δράση των ιξωδών τάσεων, η οποία τελικά μετατρέπεται σε εσωτερική θερμική ενέργεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι **το ιξώδες δεν παίζει κανένα ρόλο στο τέντωμα των στροβίλων αλλά ούτε και καθορίζει το ποσό της αποτιθέμενης ενέργειας, απλώς καθορίζει τις μικρότερες κλίμακες στις οποίες καταλήγει η ενεργειακή απόθεση. Αυτές που καθορίζουν το ρυθμό με τον οποίο η κινητική ενέργεια της μέσης ροής τροφοδοτείται στην τυρβώδη κίνηση είναι οι δίνες μεγάλης κλίμακας. Συνεπώς, οι μεγαλύτερες δίνες είναι υπεύθυνες για την μεταφορά ορμής και θερμότητας και για το λόγο αυτό πρέπει να προσομοιώνονται κατάλληλα με τη χρήση ενός μοντέλου τύρβης.**



Τι είναι η τύρβη

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το τυρβώδες οριακό στρώμα σε ροή πάνω από επίπεδη πλάκα. Παρουσιάζονται δίνες με ευρύ φάσμα κλιμάκων μήκους, από συγκρίσιμες με τα μήκη των ορίων του πεδίου, μέτριες κλίμακες έως μικρές κλίμακες μήκους.

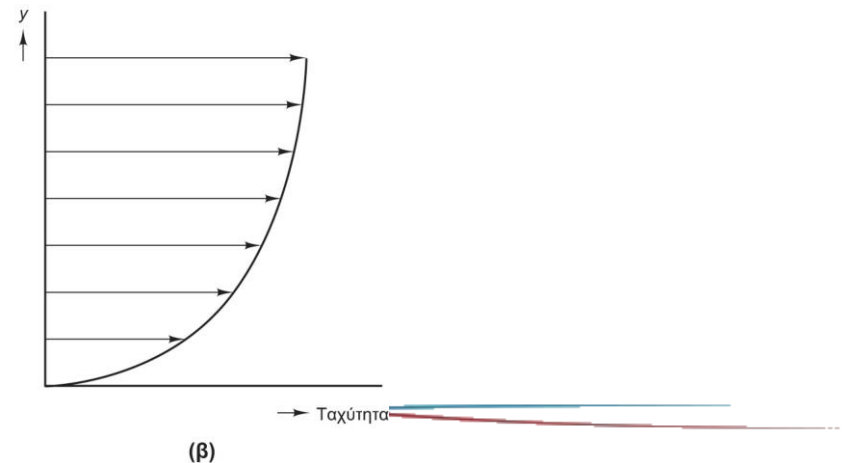
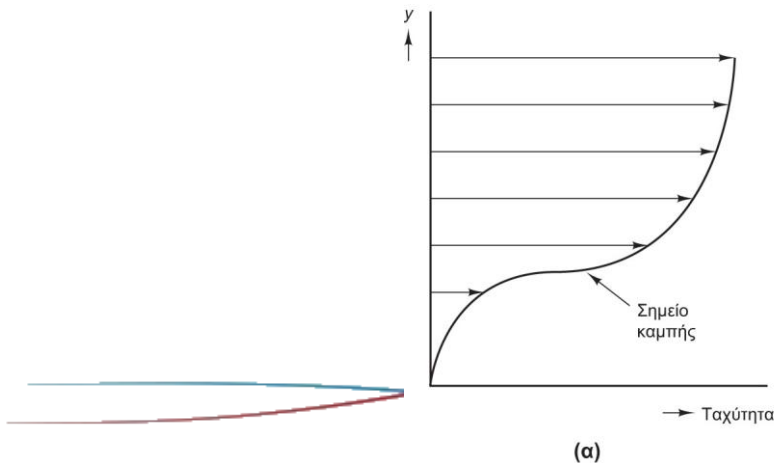


Στην τυρβώδη ροή, τα σωματίδια ρευστού τα οποία αρχικά βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους μπορούν να πλησιάσουν το ένα στο άλλο μέσω των στροβιλωδών κινήσεων. Έτσι, η θερμότητα, η μάζα και η ορμή ανταλλάσσονται πολύ αποτελεσματικά (δηλ. τα φαινόμενα που αναπτύσσονται οφείλουν την ύπαρξή τους στις «μεγαλύτερες δίνες»). Αυτή η αποτελεσματική ανάμιξη προκαλεί την εμφάνιση μεγάλων τιμών συντελεστών διάχυσης για τη μάζα, ορμή και θερμότητα.

Μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή

Η αρχική αιτία της μετάβασης από την στρωτή στην τυρβώδη ροή μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας υπόψη τη σταθερότητα των στρωτών ροών σε μικρές διαταραχές. Η μετάβαση (transition) σχετίζεται με την υδροδυναμική ευστάθεια της στρωτής ροής, το πότε δηλαδή η στρωτή ροή αρχίζει να «καταστρέφεται» από την επιβολή διαταραχών. Στην περίπτωση αυτή λειτουργούν δύο μηχανισμοί αστάθειας:

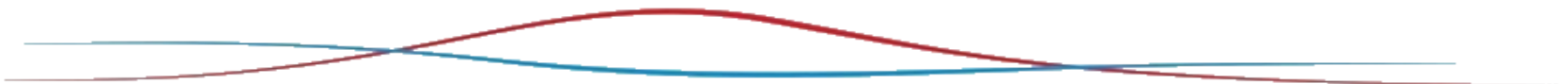
- Αστάθεια μηδενικού ιξώδους (inviscid instability) (Σχήμα (α)): Ροή που η κατανομή ταχύτητας παρουσιάζει σημείο καμπής. Συναντάται π.χ. στον απόρρου στα κατάντη εμποδίου, σε ροές δέσμης, σε οριακό στρώμα με έντονη κλίση πίεσης, κ.α.
- Αστάθεια με ύπαρξη ιξώδους (Σχήμα (β)): Ροή με κατανομή ταχύτητας χωρίς σημείο καμπής. Ροή κοντά σε στερεά τοιχώματα, οριακά στρώματα χωρίς έντονες κλίσεις πίεσης.



Μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή

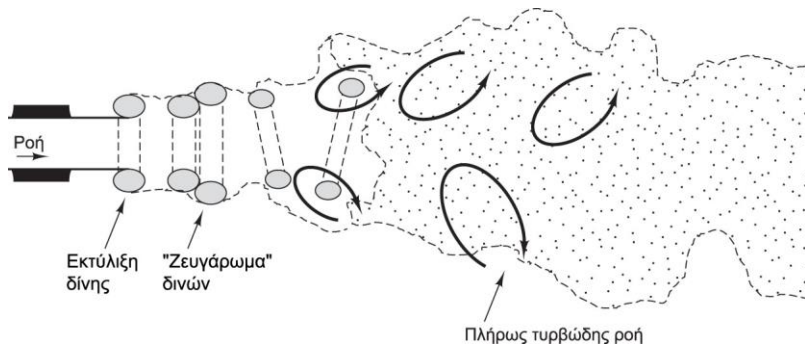
Το σημείο πρωτοεμφάνισης της αστάθειας είναι πάντα στα ανάντη του σημείου μετάβασης. Η απόσταση μεταξύ του σημείου αστάθειας ($Re=Re_{x,crit}$) και του σημείου μετάβασης ($Re=Re_{x,tr}$), δηλ. το μήκος μετάβασης, εξαρτάται από τον βαθμό ενίσχυσης των ασταθών διαταραχών. Το μήκος ή η περιοχή ή το πάχος μετάβασης είναι μία μεγάλη επιστημονική πρόκληση, και έχουν γίνει πολλά πειράματα και μαθηματικές προσεγγίσεις για την ακριβή πρόβλεψη. Μία προσέγγιση πρόβλεψης είναι η γραμμική θεωρία υδροδυναμικής αστάθειας. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποια λεπτομερής θεωρία που να περιγράφει επακριβώς την πορεία που οδηγεί από την αρχική αστάθεια στην πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Πολλά μαθηματικά μοντέλα πρόβλεψης της περιοχής μετάβασης βασίζονται στην πειραματική παρατήρηση της συμπεριφοράς της ροής σε τυπικές αντιπροσωπευτικές ροές. Τέτοιες ενδεικτικές ροές, που έχουν μελετηθεί εκτενώς, είναι:

- Ροή δέσμης (jet flow).
- Οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας (boundary layer).
- Ροή σε αγωγό (pipe flow).

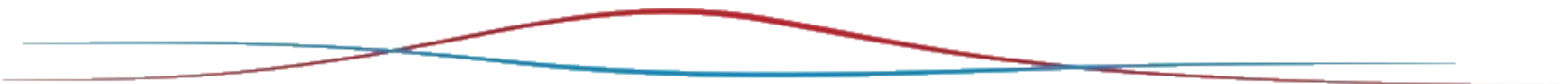


Ροή δέσμης (ροή με σημείο καμπής)

Οι ροές με σημεία καμπής πρακτικά ενισχύουν διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος σε όλους τους αριθμούς $Re > 10$. Η διεργασία μετάβασης απεικονίζεται παρακάτω:



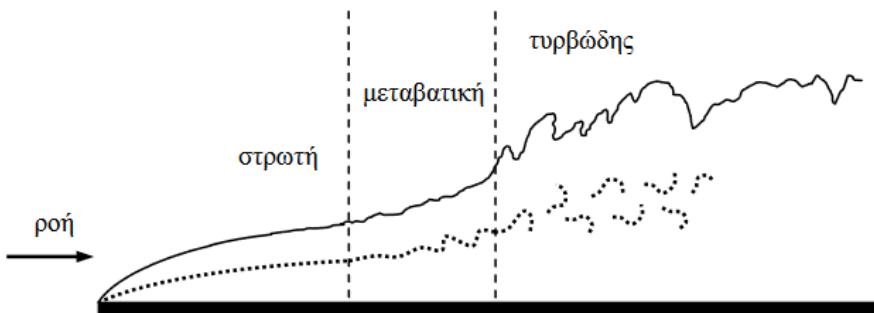
Η αρχικώς στρωτή ροή στην έξοδο της οπής, προκαλεί εκτύλιξη δίνης πολύ κοντά στην οπή. Η διαταραχή αυτή, λόγω αδράνειας, προκαλεί τη δημιουργία δίνης μεγαλύτερης ισχύος μέσω του «ζευγαρώματος» των δινών. Εν συνεχεία, σε μικρή απόσταση οι διαταραχές προκαλούν έντονη παραμόρφωση των δινών (τεντώματα) καθιστώντας τις λιγότερο διακριτές. Έτσι, η ροή τελικά διασπάται με όρους μεγάλου αριθμού δινών μικρής κλίμακας μήκους και η ροή υφίσταται ταχεία μετάβαση στην πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Παρόμοια φαινόμενα εμφανίζονται και σε ροές με στρώματα ανάμιξης και σε απόρρους κατάντη εμποδίων (ιδίως μη καμπυλόγραμμων) με αποτέλεσμα την μετάβαση και την εμφάνιση τύρβης.



Ροή οριακού στρώματος (ροή απουσία σημείου καμπής)

Μετάβαση κατά μήκος της κύριας διεύθυνσης της ροής (η μετάβαση στην κατακόρυφη διεύθυνση κοντά σε στερεά όρια συζητείται σε επόμενη ενότητα)

Η μετάβαση μπορεί να απεικονιστεί ικανοποιητικά με όρους σταδιακής αύξησης του πάχους του οριακού στρώματος όπως παρακάτω:

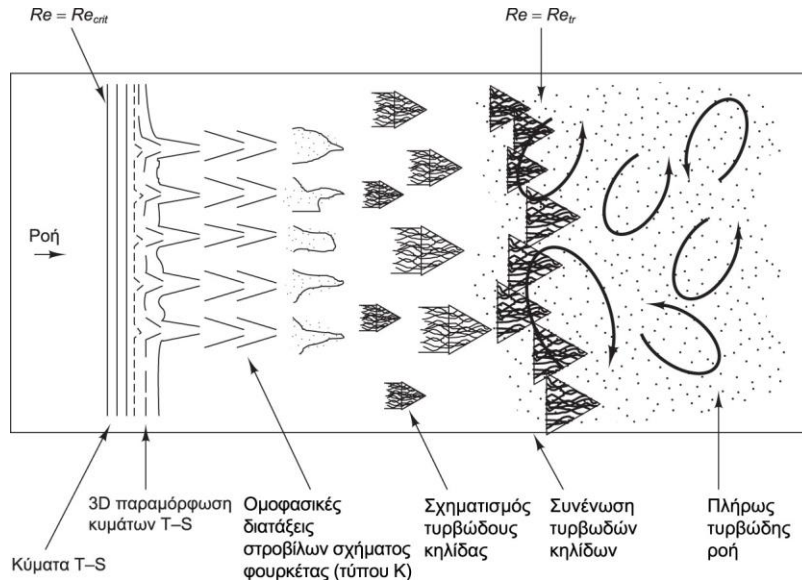


Κοντά στην είσοδο της ροής από αριστερά (χείλος προσβολής), η εισερχόμενη ροή είναι στρωτή, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις η ιξώδης διαταραχή που προκαλείται από την «τριβή» με το στερεό όριο οδηγεί σε αύξηση των διατμητικών τάσεων, επομένως η ροή αρχίζει να γίνεται μεταβατική, τείνοντας προς την πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη.

Πολυάριθμα πειράματα του συγκεκριμένου είδους ροής καταδεικνύουν ότι η αρχική γραμμική αστάθεια εμφανίζεται για $Re_{x,crit} \approx 91.000$. Από εκεί και μετά οι διαταραχές αρχίζουν και μεγεθύνονται στη διεύθυνση της ροής.

Ροή οριακού στρώματος (ροή απουσία σημείου καμπής)

Μία σχεδιαστική άποψη των διεργασιών μετάβασης

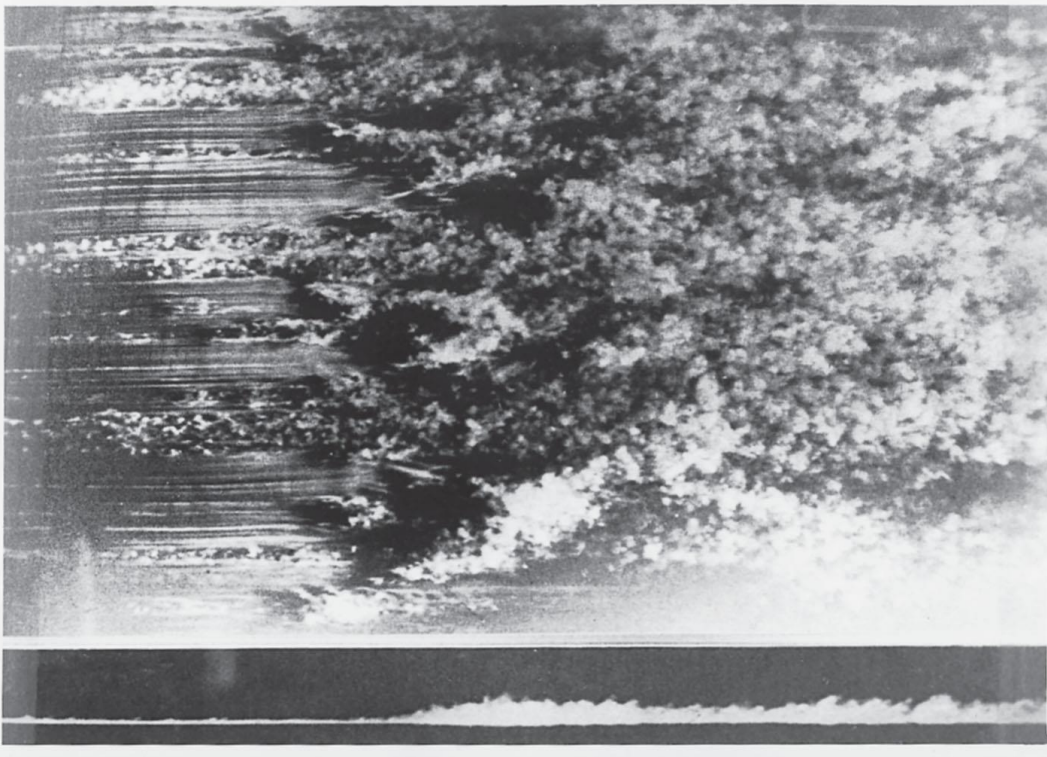


Επακόλουθο της αρχικής γραμμικής διαταραχής είναι η εμφάνιση αρχικά διατεταγμένων δινών, καλούμενες ως ομοφασικές (παρομοίωση: αρχικά καλά «στοιχισμένες» δίνες σαν «άγημα στρατιωτών») σχήματος φουρκέτας (τύπου K). Λόγω της διάδοσης της διατμητικής διαταραχής, ακολουθεί μία αλυσιδωτή διάσπαση του στρώματος διάτμησης σε μικρότερες μονάδες με εμφάνιση τριγωνικών τυρβωδών κηλίδων οι οποίες συμπαρασύρονται με τη ροή προς μία κατάσταση συνένωσής τους προς την πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη.

Ροή οριακού στρώματος (ροή απουσία σημείου καμπής)

Το σημείο μετάβασης της ροής οριακού στρώματος είναι $Re_{x,tr} \approx 5 \cdot 10^5$. Δηλ. η περιοχή μετάβασης είναι:
 $91.000 < Re < 5 \cdot 10^5$

Παρακάτω δίδεται σχηματική απεικόνιση σχετικού πειράματος, όπου φαίνεται η σταδιακή συνένωση των τυρβωδών κηλίδων και μετάβαση σε πλήρη τύρβη σε ένα οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα (ας παρατηρηθεί η στρωτή ροή κοντά στο τοίχωμα):



Ένα βιντεάκι οπτικοποίησης της μετάβασης σε ροή πάνω σε επίπεδη πλάκα.

<https://www.youtube.com/watch?v=4Jz1LG7Pe94&t=89s>



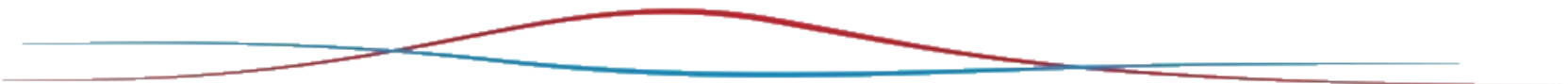
Ροή σε αγωγό (ροή απουσία σημείου καμπής)

Η περιοχή μετάβασης είναι: $2000 < Re < 10^5$

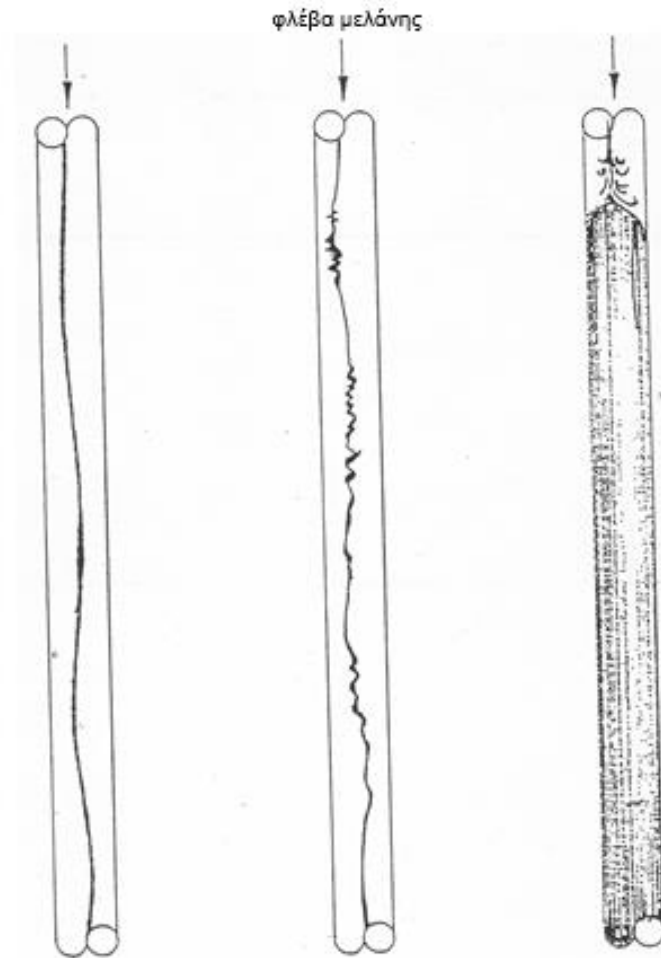
Πειραματικές διαδικασίες φανερώνουν τον ακόλουθο μηχανισμό σταδιακής ανάπτυξης τύρβης:

- Εμφάνιση τυρβωδών κηλίδων κοντά στα στερεά όρια
- Διόγκωση και συνένωση των τυρβωδών κηλίδων
- Σταδιακή κατάληψη της διατομής του αγωγού από τις ενωμένες κηλίδες (τυρβώδεις θύλακες)

Σε βιομηχανικούς αγωγούς και σε $Re=2000$, λαμβάνει χώρα διακεκομμένος σχηματισμός τυρβωδών θυλάκων οδηγώντας σε εναλλασσόμενες τυρβώδεις και στρωτές περιοχές κατά μήκος του σωλήνα. Σε $Re > 2300$, οι τυρβώδεις θύλακες ενώνονται και το σύνολο του αγωγού καταλαμβάνεται από την τυρβώδη ροή.



Ροή σε αγωγό (ροή απουσία σημείου καμπής)



α) Στρωτή ροή
Ελαφρά συστροφή του
νήματος της μελάνης
αλλά χωρίς διαταραχές

β) Μεταβατική ζώνη
Διακοπτόμενες ταλα-
ντώσεις στροβίλων

γ) Πλήρως τυρβώδης ροή
Γρήγορη ανάμιξη μελά-
νης





Η εξέλιξη της προσομοίωσης της τύρβης

Η βασική έρευνα επικεντρώνεται στην ανάπτυξη μοντέλων για την επίλυση βασικών χαρακτηριστικών της διεργασίας μετάβασης δηλ. (α) ενίσχυση των αρχικά μικρών διαταραχών, (β) ανάπτυξη περιοχών με συγκεντρωμένες δομές στροβιλότητας, (γ) σχηματισμός έντονων κινήσεων μικρής κλίμακας, (δ) συνένωση των περιοχών κινήσεων μικρής κλίμακας σε πλήρως τυρβώδη ροή.

Είναι αξιοσημείωτο πάντως ότι **ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ (ακόμα) κάποια καθολική θεωρία μετάβασης!** Οι εξελίξεις στον τομέα των υπολογιστών έχουν συνεισφέρει στην προσομοίωση της μετάβασης με επίλυση των πλήρως χρονικά μεταβαλλόμενων εξισώσεων Navier-Stokes αλλά μόνο για απλές γεωμετρίες. Λόγω της υψηλότερης απαίτησης σε υπολογιστικούς πόρους της πλήρους επίλυσης των εξισώσεων ορμής (*φανταστείτε, προσπαθούμε να λύσουμε ένα έντονα μεταβατικό φαινόμενο με ακαθόριστες κινήσεις σε μικρό χώρο. Η ακριβής επίλυση απαιτεί μεγάλη διακριτοποίηση στο χώρο και στο χρόνο, πράγμα που οδηγεί σε απαγορευτικά υψηλό υπολογιστικό κόστος*), έχουν προταθεί εναλλακτικές θεωρίες που βασίζονται στην αξιοποίηση ημιεμπειρικών εξισώσεων της περιοχής μετάβασης ή μοντέλα σύζευξης ροής σχεδόν μηδενικού ιξώδους (μακριά από το τοίχωμα) και της ροής οριακού στρώματος (κοντά στο τοίχωμα) βασισμένης σε ανάλυση γραμμικής ευστάθειας.

Σε επίπεδο εφαρμοσμένης έρευνας, η τεχνική CFD συχνά αγνοεί πλήρως την περιοχή μετάβασης και επικεντρώνεται στην επίλυση της πλήρους στρωτής ή πλήρως τυρβώδους ροής. Για πρακτικούς σκοπούς, η προσέγγιση είναι αποδεκτή αφού η περιοχή μετάβασης αποτελεί ένα μικρό μέρος του πεδίου ροής, οπότε τα σφάλματα που προκύπτουν (από την αγνόηση της λεπτομερούς δομής της ροής) είναι σχετικά μικρά.



Στατιστικοί δείκτες χαρακτηρισμού της τύρβης

Όπως προαναφέρθηκε, η εμφάνιση τύρβης συνοδεύεται από την εμφάνιση διακυμάνσεων των υδροδυναμικών ιδιοτήτων της ροής. Συνεπακόλουθο αυτής είναι και οι λοιπές μεταβλητές ϕ να εμφανίζουν διακυμάνσεις. Δηλ. όλες οι ϕ θα επιμερίζονται στη μέση και στη διακυμαινόμενη συνιστώσα:

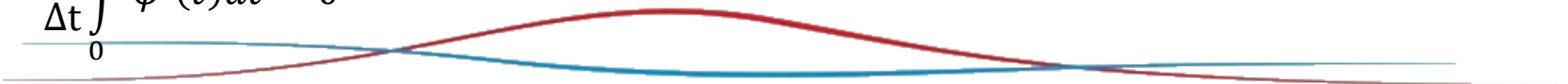
$$\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t),$$

Όπου Φ είναι η μέση τιμή της ιδιότητας ϕ και $\varphi'(t)$ είναι η διακυμαινόμενη συνιστώσα.

Η χρονικά μέση τιμή είναι:

$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt$, με Δt το χρονικό βήμα μεγαλύτερο από την χρονική κλίμακα όπου εμφανίζονται οι βραδύτερες μεταβολές της ϕ , δηλ. ο χρόνος που αρχίζει και προκύπτει μια σχεδόν μόνιμη κατάσταση. Σε χρονο-εξαρτώμενες ροές ως μέση τιμή μιας μεταβλητής ϕ σε χρόνο t λαμβάνεται ο μέσος όρος των στιγμιαίων τιμών της μεταβλητής, γνωστός ως συνολικός μέσος. Εξ' ορισμού, ο χρονικός μέσος όρος των διακυμάνσεων ϕ' είναι μηδέν:

$$\overline{\varphi'(t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt = 0$$



Στατιστικοί δείκτες χαρακτηρισμού της τύρβης

Οι βασικοί δείκτες που χρησιμοποιούνται για την ποσοτικοποίηση των διακυμάνσεων φ' γύρω από μία μέση τιμή Φ είναι η **μεταβλητότητα** και η **μέση τετραγωνική ρίζα (rms)**.

Μεταβλητότητα: $\overline{(\varphi')^2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\varphi')^2 dt$

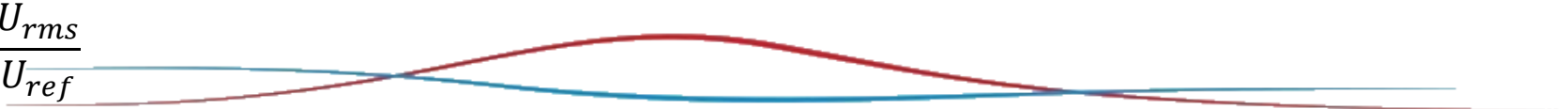
RMS: $\varphi_{rms} = (\overline{(\varphi')^2})^{1/2}$ (λέγεται και «**ενεργός ιδιότητα**», π.χ. για την ταχύτητα λέγεται «ενεργός ταχύτητα»).

Εν γένει οι rms τιμές είναι χρήσιμες διότι εκφράζουν τον μέσο όρο των διακυμάνσεων της ιδιότητας, συνεπώς αποτελούν εύχρηστο εργαλείο εκπροσώπησης πάρα πολλών τιμών από έναν μ.ο. αυτών.

Η μεταβλητότητα των συνιστωσών ταχύτητας συνθέτουν την έννοια της μέσης κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας που εμπεριέχεται στις αντίστοιχες διακυμάνσεις της ταχύτητας. Η ολική **κινητική ενέργεια της τύρβης** σε κάποια θέση του πεδίου ροής είναι:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \text{ (όπου } u, v, w, \text{ οι συνιστώσες ταχύτητας στην } x, y, z \text{ διεύθυνση, αντιστοίχως).}$$

Ορίζεται η **ένταση της τύρβης** T_u , ως μέτρο αξιολόγησης του μεγέθους της διακύμανσης της ταχύτητας, και υπολογίζεται ως η κανονικοποιημένη ως προς μία μέση ταχύτητα U_{ref} μέση ενεργός ταχύτητα, δηλ.:

$$T_u = \frac{\overline{U}_{rms}}{U_{ref}}$$




Στατιστικοί δείκτες χαρακτηρισμού της τύρβης

$$T_u = \frac{\bar{U}_{rms}}{U_{ref}}$$

Όμως η μέση ενεργός ταχύτητα είναι:

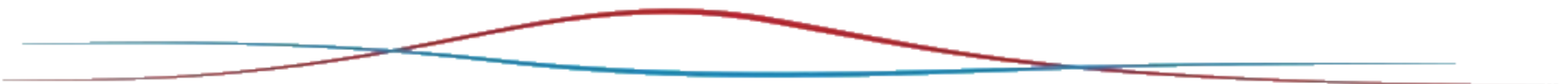
$$\bar{U}_{rms} = (\overline{U'^2})^{1/2} = \left(\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{3} \right)^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\bar{U}_{rms} = \left(\frac{2k}{3} \right)^{1/2}$$

Συνεπώς, η **ένταση της τύρβης** είναι:

$$T_u = \frac{1}{U_{ref}} \left(\frac{2k}{3} \right)^{1/2}$$

Όπου U_{ref} είναι μία ταχύτητα αναφοράς που μπορεί π.χ. να είναι η χωρικά μέση ταχύτητα εισόδου σε ένα αγωγό.



Στατιστικοί δείκτες χαρακτηρισμού της τύρβης

Ορίζεται η **δεύτερη ροπή** μεταξύ διακυμαινόμενων μεταβλητών π.χ. φ' και ψ' ως εξής:

$$\overline{\varphi'\psi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t)\psi'(t)dt$$

Αν οι διακυμάνσεις της ταχύτητας σε διαφορετικές κατευθύνσεις ήταν ανεξάρτητες τότε οι τιμές των δεύτερων ροπών ταχύτητας, $\overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{w'v'}$, θα ήταν μηδενικές. Όμως, η τύρβη συνδέεται με εμφάνιση ροϊκών δομών στροβιλότητας, και οι επαγόμενες συνιστώσες ταχύτητας δεν είναι ανεξάρτητες, άρα οι δεύτερες ροπές είναι μη μηδενικές. **Οι δεύτερες ροπές εμφανίζονται στις εξισώσεις Navier-Stokes για την διακυμαινόμενη συνιστώσα ταχύτητας, και εκπροσωπούν μεταφορά τυρβώδους ορμής εισάγοντας επιπρόσθετες τυρβώδεις διατμητικές τάσεις.** Επίσης, το τυρβώδες υδροδυναμικό πεδίο εισάγει και ροπές πίεσης-ταχύτητας που παίζουν ρόλο στη διάχυση της τυρβώδους ενέργειας στο πεδίο ροής. Υπάρχουν και ροπές ανώτερης τάξης, π.χ. οι ροπές 3^{ης} και 4^{ης} τάξης σχετίζονται με την λοξότητα (ασυμμετρία) και την κύρτωση.

Με βάση τον ορισμό των δεύτερων ροπών, η τυρβώδης ροή διακρίνεται σε:

- **Ισότροπη**, όταν δεν υπάρχουν προτιμητέες διευθύνσεις της διακύμανσης της ταχύτητας, δηλ. όταν $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ και $\overline{u'_i u'_j} = 0$ όπου $i=x,y,z, j=x,y,z, i \neq j$.
- **Ανισότροπη**, όταν όλοι οι όροι δεύτερων ροπών (τάσεις) είναι σημαντικοί και υπάρχουν προτιμητέες διευθύνσεις της διακύμανσης, δηλ. μη μηδενικές ροπές και ισχύει $\overline{u'_i u'_j} < 0$.

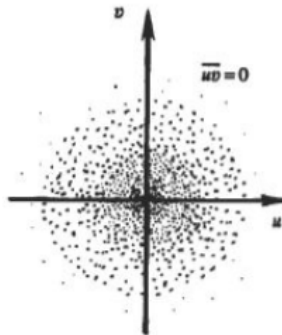
Ισότροπη και ανισότροπη τύρβη

Επειδή οι εξισώσεις ορμής μπορούν να γραφούν για τις μέσες διακυμαινόμενες συνιστώσες ταχύτητας, προκύπτει ο τανυστής των διακυμαινόμενων τάσεων (τάσεις Reynolds):

Reynolds stress tensor:

$$\begin{pmatrix} -\rho_0 \overline{u'u'} & -\rho_0 \overline{u'v'} & -\rho_0 \overline{u'w'} \\ -\rho_0 \overline{v'u'} & -\rho_0 \overline{v'v'} & -\rho_0 \overline{v'w'} \\ -\rho_0 \overline{w'u'} & -\rho_0 \overline{w'v'} & -\rho_0 \overline{w'w'} \end{pmatrix}$$

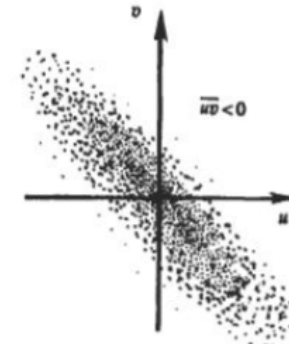
Ρυθμός μεταβολής της μέσης ορμής
λόγω τυρβώδους ροής



Isotropic

Αν οι διαταραχές της ταχύτητας είναι πλήρως ισοτροπικές (δεν υπάρχουν προτιμητέες διευθύνσεις, οι μη-διαγώνιοι όροι φεύγουν (μέση τιμή των $u'v'$ είναι μηδέν) και

$$\rho_0 \overline{u'u'} = \rho_0 \overline{v'v'} = \rho_0 \overline{w'w'}$$



Anisotropic

Στην περίπτωση ανισοτροπικής τύρβης, όλοι οι όροι μπορεί να είναι σημαντικοί και υπάρχουν προτιμητέες διευθύνσεις (στο παραπάνω παράδειγμα θετικά u' σχετίζονται με αρνητικά v' και το αντίστροφο, ώστε $\overline{u'v'} < 0$)



Η ροή κοντά σε τοίχωμα

(Μετάβαση στην τυρβώδη ροή στην κατακόρυφη διεύθυνση)

Στη ροή πάνω από ένα στερεό όριο, ο αριθμός Reynolds είναι:

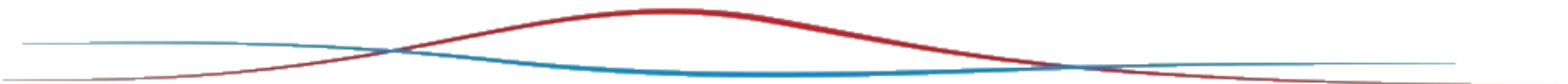
$$Re_y = \frac{\rho U y}{\mu} = \frac{U y}{\nu}$$

Όπου y είναι η κατακόρυφη απόσταση από το τοίχωμα. Είναι φανερό ότι όσο απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα (όσο αυξάνει το y) αυξάνεται ο αριθμός Re δηλ. η ροή κυριαρχείται από τις αδρανειακές δυνάμεις. Αντίθετα, κοντά στο τοίχωμα (μείωση του y) μειώνεται ο αριθμός Re και πολύ κοντά στο τοίχωμα οι ιξώδεις δυνάμεις αρχίζουν να γίνονται κυριαρχικές. Άρα, η ροή πάνω από ένα τοίχωμα μπορεί να διακριθεί στα ακόλουθα στρώματα:

A. Ιξώδες υπόστρωμα (Viscous sublayer) (Κυριαρχικές ιξώδεις δυνάμεις), στρωτή ροή πολύ κοντά στο τοίχωμα.

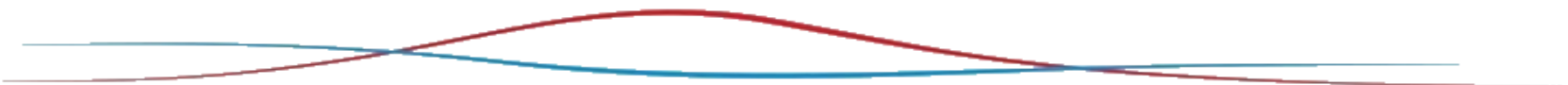
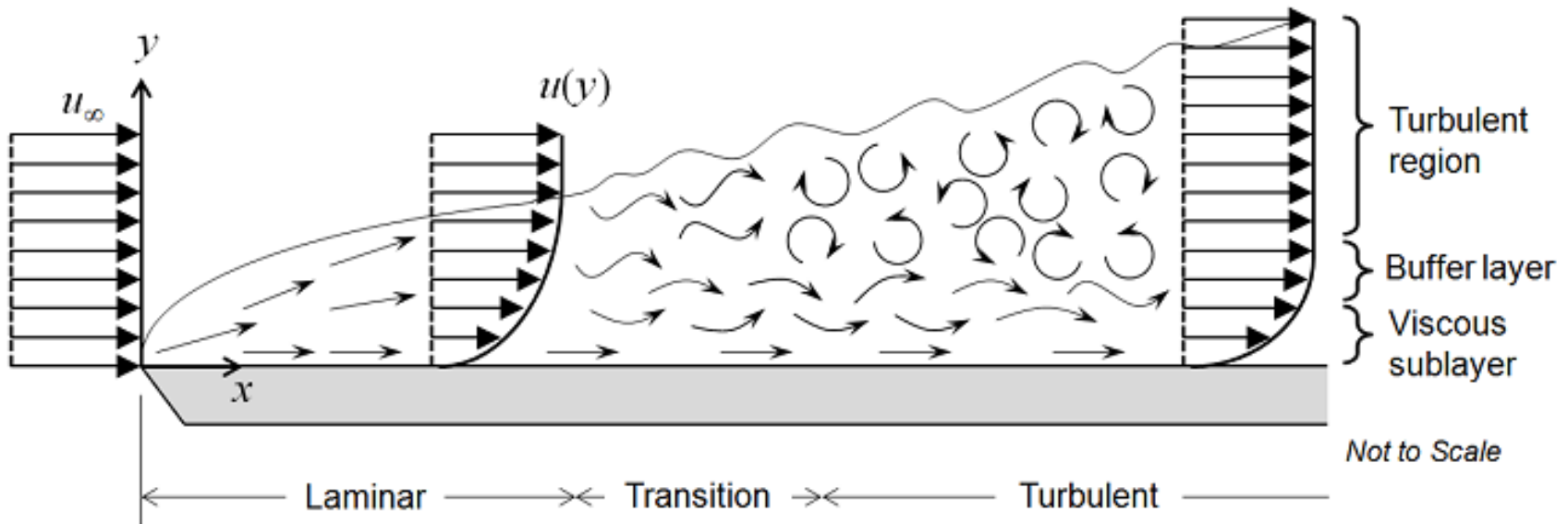
B. Περιοχή μετάβασης (Buffer layer) (Ισοδύναμη επίδραση ιξωδών και αδρανειακών δυνάμεων). Εμφανίζονται οι πρώτες αστάθειες ροής (διακυμάνσεις ταχύτητας).

Γ. Τυρβώδες στρώμα (turbulent region) (Κυριαρχικές αδρανειακές δυνάμεις – τυρβώδης ροή).



Η ροή κοντά σε τοίχωμα

Μια σχηματική αναπαράσταση της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη στην οριζόντια και στην κατακόρυφη διεύθυνση σε ροή οριακού στρώματος.



Συναρτήσεις τοίχου

Για την επίλυση κοντά στο τοίχωμα εφαρμόζονται οι λεγόμενες συναρτήσεις τοίχου (wall functions).

A. Κοντά στο τοίχωμα, εντός του στρωτού υποστρώματος, η διατμητική τάση είναι:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$$

Όπου U είναι η μέση ταχύτητα της ροής. Εύκολα, η παραπάνω σχέση δίνει:

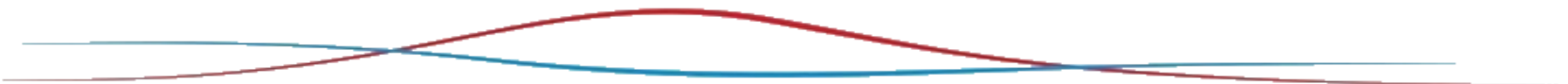
$$U = \frac{\tau_w y}{\mu}$$

Επίσης, ορίζεται η ταχύτητα τριβής κοντά στο τοίχωμα:

$$u_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \Leftrightarrow \tau_w = \rho u_*^2$$

Οπότε, η μέση ταχύτητα θα είναι: $U = \frac{\rho u_*^2 y}{\mu}$

Ορίζεται η αδιάστατη ταχύτητα $u^+ = \frac{U}{u_*} = \frac{\rho u_* y}{\mu}$



Συναρτήσεις τοίχου

A. Κοντά στο τοίχωμα, εντός του στρωτού υποστρώματος

Ορίζεται η αδιάστατη ταχύτητα $u^+ = \frac{U}{u_*} = \frac{\rho u_* y}{\mu}$

Ο όρος $\frac{\rho u_* y}{\mu}$ είναι ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Reynolds, που συμβατικά συμβολίζεται ως:

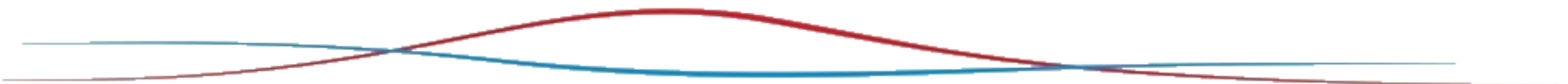
$$y^+ = \frac{\rho u_* y}{\mu}$$

Οπότε, η αδιάστατη ταχύτητα κοντά στο τοίχωμα θα είναι:

$$u^+ = y^+$$

Δηλ. στο στρωτό υπόστρωμα, υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της ταχύτητας και της απόστασης από το τοίχωμα. Για το λόγο αυτό το στρώμα του ρευστού πολύ κοντά στο τοίχωμα λέγεται και γραμμικό υπόστρωμα.

Το γραμμικό υπόστρωμα έχει πλάτος συνήθως $y^+ < 5$ (αν και στη βιβλιογραφία είναι αποδεκτό και $y^+ < 11.63$).





Συναρτήσεις τοίχου

Β. Εκτός του στρωτού υποστρώματος Για $30 < y^+ < 500$

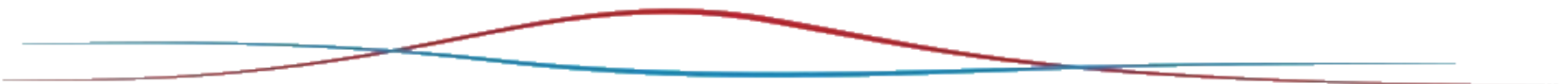
Αρχίζει η μεγαλύτερη συνεισφορά των τυρβωδών τάσεων. Η διατμητική τάση μεταβάλλεται βραδέως με την απόσταση από το τοίχωμα, ενώ εντός της περιοχής θεωρείται σταθερή και ίση με τη διατμητική τάση στο τοίχωμα. Έπειτα από διαστατική ανάλυση προκύπτει:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

Όπου $\kappa = 0.4187$ είναι η σταθερά του Von Karman και E μία συνάρτηση της τραχύτητας και των διατμητικών τάσεων ($E=9.8$ για λεία τοιχώματα). Λόγω της λογαριθμικής συσχέτισης ταχύτητας και απόστασης, η συγκεκριμένη περιοχή λέγεται **στρώμα λογαριθμικού νόμου**.

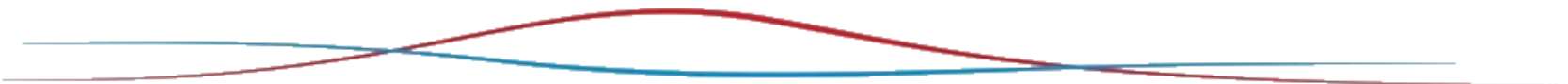
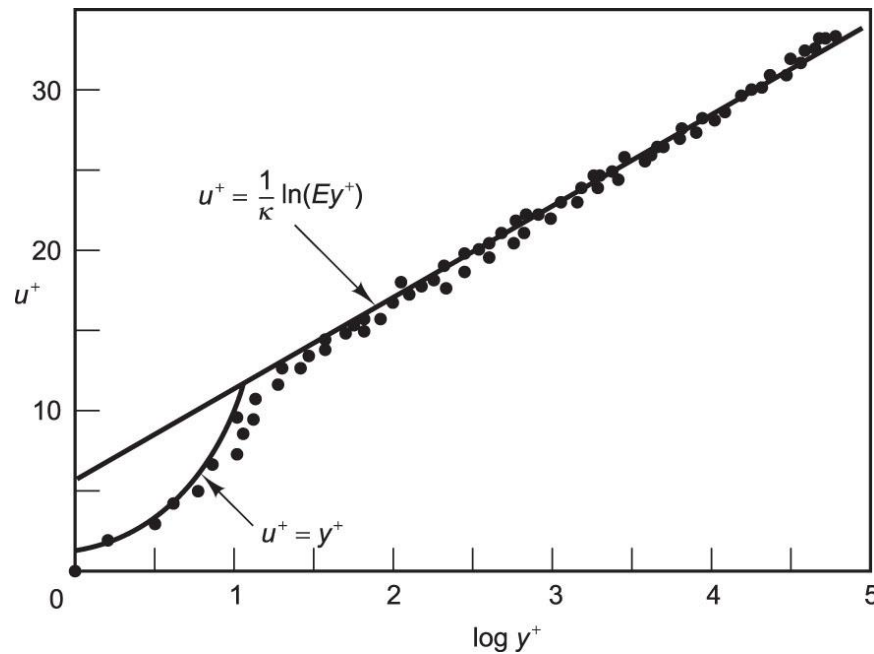
Γ. Εξωτερικό στρώμα για $y^+ > 500$

Περιοχή νόμου του απόρρου, όπου: $\frac{U_{max}-U}{u_*} = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A$, όπου δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος και A μία σταθερά.



Συναρτήσεις τοίχου

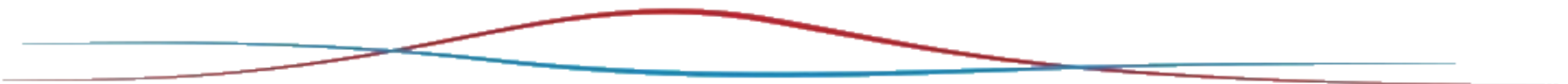
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συμφωνία των συναρτήσεων τοίχου με πειραματικά δεδομένα σε ροή κοντά σε τοίχωμα.



Συναρτήσεις τοίχου

Συνοψίζοντας, το τυρβώδες οριακό στρώμα κοντά στη στερεή επιφάνεια αποτελείται από δύο περιοχές:

- ❑ Εσωτερική περιοχή (inner layer): 10-20% δ , όπου η διατμητική τάση είναι σχεδόν σταθερή και ίση με τη διατμητική τάση στο τοίχωμα (τ_w). Εντός της περιοχής αυτής υπάρχουν 3 ζώνες:
 - Γραμμικό υπόστρωμα (linear layer): Κυριαρχούν οι ιξώδεις δυνάμεις.
 - Στρώμα προσαρμογής: Οι ιξώδεις και τυρβώδεις τάσεις είναι παρόμοιου μεγέθους.
 - Στρώμα λογαριθμικού νόμου (log-law): Κυριαρχούν οι τυρβώδεις τάσεις (τάσεις Reynolds).
- ❑ Εξωτερική περιοχή (outer layer)-στρώμα νόμου απόρρου: Μακριά από το τοίχωμα κυριαρχούν οι αδρανειακές δυνάμεις, περιοχή ελεύθερη από άμεσες ιξώδεις επιδράσεις.



Συναρτήσεις τοίχου

Προσαρμογή στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου

Οι συναρτήσεις τοίχου προσαρμόζονται με όρους οριακής συνθήκης (ψευδοπηγής) της ταχύτητας:

$$S_{u,BC} = SU_{u,BC} + SP_{u,BC} * u$$

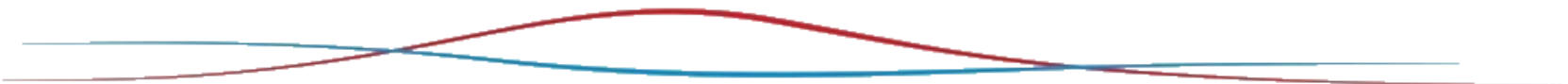
Όπου $SU_{u,BC}=0$

$$\text{Και } SP_{u,BC} = \begin{cases} -\frac{\mu}{y} A_n, & y^+ \leq 5 \\ -\frac{\rho u_* \kappa (u_P - u_s)}{\ln(Ey^+)}, & y^+ > 5 \end{cases}$$

Όπου u_s είναι η ταχύτητα του τοιχώματος.

Προφανώς, όταν λύνουμε στρωτή ροή στο σύνολο του πεδίου ροής τότε εφαρμόζεται η συνάρτηση μόνο του πρώτου κλάδου της κλαδικής συνάρτησης παραπάνω.

Τα εμπορικά λογισμικά CFD ενσωματώνουν τις συναρτήσεις τοίχου και αρκεί απλώς να δώσουμε την ταχύτητα του στερεού ορίου.





Μαθηματικοποίηση της τυρβώδους ροής

Αντικατάσταση της κάθε συνιστώσας ταχύτητας (σε τριασδιάστατη ροή) και της πίεσης στις εξισώσεις Navier-Stokes, από το άθροισμα της μέσης και της διακυμαινόμενης συνιστώσας. Οι εξισώσεις ορμής γίνονται:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(U)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(V)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(W)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right]$$

Προκύπτουν οι πρόσθετες τάσεις των διακυμαινόμενων τιμών (τάσεις Reynolds):

Ορθές τάσεις:

$$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2}, \tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}, \tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$$

Διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$$

$$\tau_{xz} = -\rho \overline{u'w'}$$

$$\tau_{yz} = -\rho \overline{v'w'}$$

Στην τυρβώδη ροή, οι διατμητικές τάσεις παραπάνω είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ιξώδεις τάσεις.

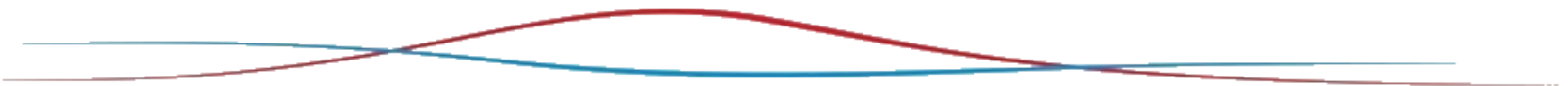
Οι εξισώσεις αυτές, καθώς εκφράζονται συναρτήσει των χρονικά μέσων τιμών των διακυμάνσεων λέγονται **Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)**.



Μαθηματικοποίηση της τυρβώδους ροής

Παρόμοιοι όροι τυρβώδους μεταφοράς προκύπτουν στην εξίσωση μεταφοράς μιας τυχαίας βαθμωτής ποσότητας ϕ . Η σταθμισμένη στο χρόνο εξίσωση μεταφοράς γράφεται:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi \mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad} \Phi) + \frac{\partial \overline{u' \phi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' \phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' \phi'}}{\partial z} + S_\Phi$$





Μοντέλα τύρβης

Διακρίνονται οι παρακάτω μέθοδοι:

A. Μοντέλα τύρβης για εξισώσεις RANS: Επικεντρώνονται στη μέση ροή και στις επιδράσεις της τύρβης στη μέση ροή. Στις χρονικά μέσες μορφές των εξισώσεων ροής (Reynolds-averaged) εμφανίζονται πρόσθετοι όροι λόγω των αλληλεπιδράσεων διαφόρων τυρβωδών διακυμάνσεων. Οι πρόσθετοι αυτοί όροι πρέπει και αυτοί να προσομοιωθούν. Για την προσομοίωσή τους εισάγεται κάποιο μοντέλο τύρβης. Το πιο κλασικό είναι το μοντέλο k-ε. Τα μοντέλα τύρβης RANS προτιμούνται για πρακτικούς σκοπούς σχεδιασμού καθώς δεν απαιτούν υπέρογκο υπολογιστικό φόρτο ενώ δίνουν υπολογισμούς αποδεκτής ακρίβειας.

B. Μοντέλα μεγάλων δινών (Large Eddy Simulation-LES): Ενδιάμεση μορφή υπολογισμών η οποία βασίζεται στην ανίχνευση της συμπεριφοράς και ανάπτυξης των μεγαλύτερων δινών. Η μέθοδος ενσωματώνει ένα χωρικό φίλτρο στις μεταβατικές εξισώσεις Navier-Stokes, το οποίο επιλύεται για τις μεγαλύτερες δίνες και καθόλου για τις μικρότερες. Έτσι γίνεται επίλυση της μέσης ροής ΚΑΙ της ροής των μεγάλων δινών. Οι επιδράσεις των μικρότερων δινών συμπεριλαμβάνονται μέσω ενός μοντέλου υποπλεγματικής κλίμακας. Λόγω της απαίτησης επίλυσης του προβλήματος σε μη μόνιμη κατάσταση αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος. Αποδίδουν γενικά μεγαλύτερη ακρίβεια από τα μοντέλα RANS.

Γ. Άμεση αριθμητική προσομοίωση (Direct Numerical Simulation-DNS): Υπολογισμός της μέσης ροής και όλων των διακυμάνσεων της τυρβώδους ταχύτητας. Απαιτούν επίλυση σε μη μόνιμη κατάσταση και πολύ πυκνό πλέγμα για την επίλυση δινών μικρών κλιμάκων μήκους. Υψηλό υπολογιστικό κόστος αλλά εν γένει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τα μοντέλα RANS.



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS

Βασίζονται στην παραδοχή ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ της δράσης των ιξωδών τάσεων και των τάσεων Reynolds στη μέση ροή. Και οι δύο τύποι τάσεων εμφανίζονται στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης ορμής, ενώ στον Νόμο Newton για το ιξώδες για ασυμπίεστο ρευστό θα είναι:

$$\tau_{ij} = \mu S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

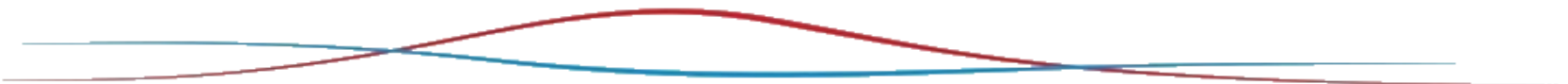
Όπου S_{ij} είναι ο ρυθμός παραμόρφωσης.

Κατ' αναλογία με τον νόμο Newton, οι τυρβώδεις τάσεις αυξάνουν με την αύξηση του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης. Πρώτος ο Boussinesq το 1877 πρότεινε ότι οι τάσεις Reynolds είναι ανάλογες προς τους μέσους ρυθμούς παραμόρφωσης (δηλ. πρότεινε ένα τρόπο σύζευξης της μέσης ροής με το πεδίο διακυμάνσεων) με την παρακάτω εξίσωση:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

Όπου

k είναι η κινητική ενέργεια της τύρβης: $k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

Όπου

k είναι η κινητική ενέργεια της τύρβης: $k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$

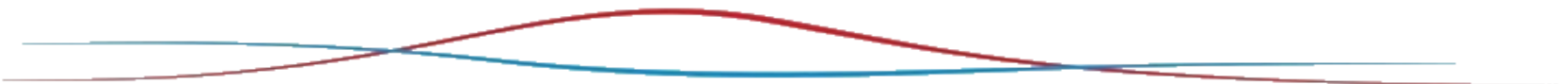
δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$)

μ_t (Pa*s) είναι το τυρβώδες ιξώδες.

Η τυρβώδης μεταφορά των λοιπών μεταβλητών, π.χ. θερμότητα, χημικό είδος, μοντελοποιείται ανάλογα με τα παραπάνω, δηλ. λαμβάνεται ως ανάλογη της κλίσης της μέσης τιμής της μεταφερόμενης ποσότητας:

$$-\rho \overline{u'_i \varphi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Όπου $\Gamma_t = \mu_t / \sigma_t$ είναι η διαχυτότητα της τύρβης. Η σύνδεση με τις εξισώσεις ορμής γίνεται μέσω ενός αριθμού Prandtl σ_t . Πολλά πειράματα έχουν αποδείξει ότι $\sigma_t \cong \sigma_{\alpha\theta}$.



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο μήκους ανάμιξης Prandtl

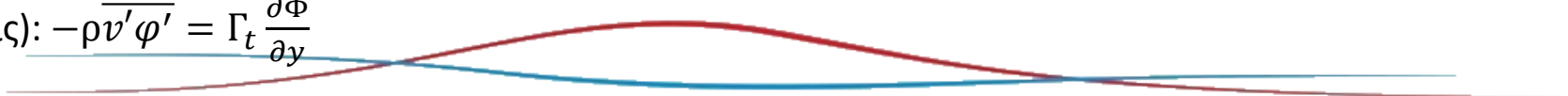
Βασίζεται στη συσχέτιση του τυρβώδους κινηματικού ιξώδους με την κλίμακα τυρβώδους ταχύτητας και την κλίμακα τυρβώδους μήκους, και στο γεγονός ότι από φυσικής σκοπιάς το μεγαλύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας της τύρβης περιέχεται στις μεγαλύτερες δίνες. Αυτό σημαίνει ότι η κλίμακα μήκους είναι το καθοριστικό μέγεθος ερμηνείας της αλληλεπίδρασης των δινών με τη μέση ροή. Με την παραδοχή ότι οι μεγαλύτερες δίνες επηρεάζουν τη μέση ροή, το μοντέλο επιχειρεί να συνδέσει την κλίμακα ταχύτητας με τις ιδιότητες της μέσης ροής. Καταρχήν θεωρείται ότι η κυβερνούσα κλίση της μέσης ταχύτητας είναι μόνο αυτή στην κατακόρυφη διεύθυνση, συνεπώς το κινηματικό ιξώδες θα είναι:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{όπου } l_m \text{ είναι η κλίμακα μήκους})$$

Συνεπώς, η εξίσωση Boussinesq για τις τυρβώδεις τάσεις δίνει:

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

Είναι φανερό ότι το συγκεκριμένο μοντέλο επειδή αγνοεί τις τυρβώδεις διαταραχές στις διάφορες διευθύνσεις δουλεύει σχετικά καλά σε απλές ροές π.χ. ελεύθερες ροές και οριακά στρώματα, χωρίς πολύπλοκες γεωμετρίες. Οι άλλες βαθμωτές ποσότητες λύνονται από την εξίσωση (μόνο κατακόρυφες κλίσεις):

$$-\rho \overline{v'\phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$


Μοντέλα τύρβης

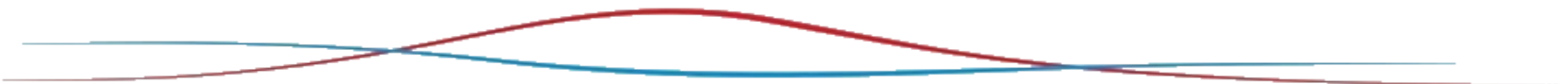
Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο μήκους ανάμιξης Prandtl

Πλεονεκτήματα:

- Εύκολο στην εφαρμογή
- Μικρό υπολογιστικό κόστος
- Καλή ακρίβεια για λεπτά διατμητικά στρώματα π.χ. δέσμες, απόρρους και οριακά στρώματα.

Μειονεκτήματα:

- Δεν μπορεί σε καμμία περίπτωση να δώσει λύση σε ροές με αποκόλληση και ανακυκλοφορία.
- Υπολογίζει μόνο ιδιότητες μέσης ροής και την τυρβώδη διατμητική τάση.



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο k-ε

Το μοντέλο εισάγει δύο νέες ιδιότητες ροής:

- Κινητική ενέργεια της τύρβης, k .
- Ρυθμός απορρόφησης της κινητικής ενέργειας της τύρβης, ε .

Διέπουσες εξισώσεις:

Κινητική ενέργεια της τύρβης

$$\rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_B - \rho \varepsilon + S_k$$

Ρυθμός απορρόφησης

$$\rho u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \rho \varepsilon + C_3 G_B) + S_\varepsilon$$

Όπου μ_t είναι το δυναμικό τυρβώδες ιξώδες και υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο k-ε

Όπου $S_{\bar{k}}$ και S_{ε} είναι οι όροι πηγής/καταβόθρας και $P_{\bar{k}}$ είναι ο ρυθμός παραγωγής της κινητικής ενέργειας λόγω βαθμίδων ταχύτητας, που υπολογίζεται με βάση την υπόθεση Boussinesq:

$$P_{\bar{k}} = \mu_t S^2$$

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Όπου S είναι ο τανυστής του μέσου ρυθμού καταπόνησης. Ο όρος G_B στις εξισώσεις (2.8) και (2.9) αντιπροσωπεύει το ρυθμό παραγωγής της κινητικής ενέργειας λόγω άνωσης και ορίζεται ως εξής:

$$G_B = -\beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο k-ε

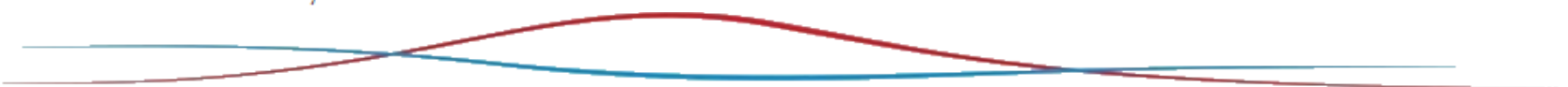
Όπου β είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής, g_i είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην i διεύθυνση, T η θερμοκρασία και Pr_t είναι ο τυρβώδης αριθμός Prandtl για την θερμική ενέργεια και λαμβάνεται ίσος με 0.85.

Συντελεστής επίδρασης της άνωσης (για μη ισοθερμοκρασιακή ροή):

$$C_3 = \tanh \left| \frac{u_i}{u_j} \right|$$

Όπου u_i, u_j είναι η παράλληλη και η κάθετη προς την επιτάχυνση της βαρύτητας (g_i) συνιστώσα ταχύτητας, αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό, όποτε γεννιέται ανωστική διάτμηση κάθετη προς την βαρύτητα ο παράγοντας C_3 μηδενίζεται, ενώ στην αντίθετη κατάσταση λαμβάνει την τιμή 1.0. Τέλος, οι εμπειρικές σταθερές του μοντέλου είναι:

$$C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$$





Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο k-ε

Ένα σημείο ειδικού χειρισμού του μοντέλου είναι ότι πολύ συχνά, οι τιμές εισόδου των k και ε δεν είναι δεδομένες. Συνήθως, υιοθετούνται εξισώσεις κατανομών των k και ε , των οποίων οι χαρακτηριστικές παράμετροι εκτιμώνται μέσα από σύγκριση με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα π.χ. στην είσοδο του πεδίου ροής. Αν δεν διαθέτουμε τίποτα δεδομένο για τις συνθήκες εισόδου τότε μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω εξισώσεις για την εκτίμηση των k και ε στην είσοδο:

$$k_{in} = \frac{2}{3} (U_{ref} T_u)^2$$

$$\varepsilon_{in} = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / l$$

$$l = 0.07L$$

Όπου L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος π.χ. η διάμετρος αγωγού.

Κοντά στο τοίχωμα, στην περιοχή $30 < y^+ < 500$, αναπτύσσονται οι συναρτήσεις τοίχου για τις παραμέτρους της τύρβης ως εξής:

$$k_w = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \text{ και } \varepsilon_w = \frac{u_*^3}{\kappa y}$$

Άρα, το απλό μοντέλο k-ε δουλεύει καλά για ροές υψηλού Reynolds και σε περιοχές αρκετά μετά το ιξώδες υπόστρωμα. Για χαμηλούς Reynolds εφαρμόζονται παραλλαγές του k-ε με ειδικό χειρισμό στις συναρτήσεις τοίχου.

Μοντέλα τύρβης

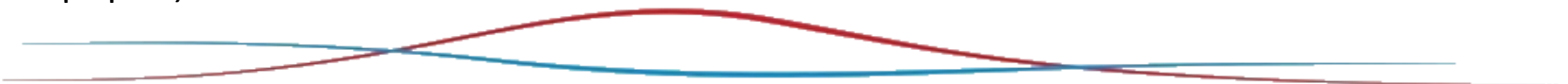
Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο k-ε

Πλεονεκτήματα:

- Απλό μοντέλο που απαιτεί μόνο αρχικές και/ή οριακές συνθήκες.
- Πολύ καλή απόδοση για πλήθος ροών.
- Καθιερωμένο. Είναι το πιο πιστοποιημένο μοντέλο τύρβης.

Μειονεκτήματα:

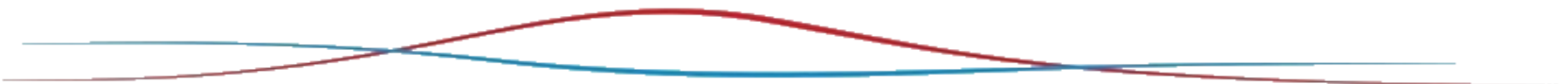
- Μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με το μοντέλο μήκους ανάμιξης.
- Χαμηλή ακρίβεια πρόβλεψης σε κάποιες περιπτώσεις όπως:
 - Ροές με πρόσθετες μεγάλες τάσεις π.χ. συστροφικές ροές.
 - Περιστροφικές ροές.
 - Ροές λόγω ανισοτροπίας ορθών τάσεων Reynolds π.χ. ανεπτυγμένες ροές σε μη κυκλικούς αγωγούς.



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Παραλλαγές μοντέλου k-ε

Οι πιο διαδεδομένες τροποποιήσεις των εξισώσεων των k και ε είναι η έκδοση του Standard k-ε χαμηλού αριθμού Reynolds (Low Reynolds, LR k-ε) και το RNG k-ε. Επιπλέον, εισάγονται νέες μέθοδοι χειρισμού κοντά στον τοίχο για την προσομοίωση των ιξωδών επιδράσεων, π.χ. το μοντέλο two-layer. Τόσο στην περίπτωση ενός LR k-ε μοντέλου όσο και στην περίπτωση ενός two-layer μοντέλου ακολουθούνται ειδικές τεχνικές γένεσης πλέγματος κοντά στους τοίχους, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη το ιξώδες υπόστρωμα. Η «αιχμαλώτιση» των ιξωδών επιδράσεων γίνεται είτε με την εφαρμογή συναρτήσεων απόρριψης (dumping functions) στις εμπειρικές σταθερές του μοντέλου (LR k-ε) είτε με την εφαρμογή μοντέλων τοίχου για τον διαχωρισμό του πεδίου στην περιοχή ιξώδους και στην περιοχή τυρβώδους ροής (two-layer μοντέλα). Οι προαναφερόμενες τεχνικές μπορούν θεωρητικά να οδηγήσουν σε πιο ακριβείς προβλέψεις σε σχέση με το Standard k-ε υψηλού αριθμού Reynolds. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν έρευνες που μαρτυρούν ότι για ειδικές περιπτώσεις εξαναγκασμένης συναγωγής σε κοιλότητες, τα υψηλού αριθμού Reynolds μοντέλα παρουσιάζουν μικρότερες αποκλίσεις.

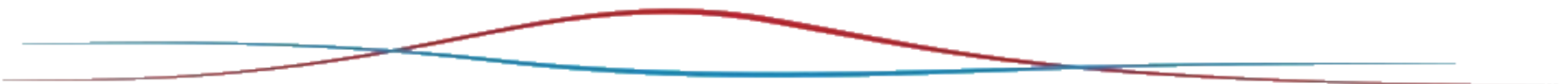


Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο τάσεων Reynolds (RSM)

Το μοντέλο των τάσεων Reynolds (RSM, Reynolds Stress Model) εγκαταλείπει την υπόθεση ισότροπης τύρβης, και για το κλείσιμο των εξισώσεων RANS επιλύονται οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds μαζί με μία εξίσωση για τον ρυθμό απορρόφησης, συνεπώς προστίθενται 7 επιπλέον εξισώσεις στο αλγεβρικό σύστημα. Λαμβάνοντας υπόψη τις τάσεις Reynolds αναμένεται ακριβής πρόβλεψη ροής που κυριαρχείται από καμπύλωση των ροϊκών γραμμών, βίαιη καταπόνηση και περιστροφή, συνεπώς δίνει την δυνατότητα αξιόπιστου υπολογισμού πολύπλοκων ροών. Παρ' όλα αυτά, η αξιοπιστία της πρόβλεψης περιορίζεται από τις παραδοχές κλεισίματος του μοντέλου, οι οποίες αντικατοπτρίζονται κυρίως στους όρους των ρυθμών καταπόνησης και απορρόφησης.

Οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds προκύπτουν από τις στιγμιαίες εκφράσεις των εξισώσεων διατήρησης της ορμής. Η διαδικασία βασίζεται στον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων μεταφοράς ορμής με έναν παράγοντα διακύμανσης και στη συνέχεια ο υπολογισμός της μέσης τιμής κατά Reynolds του γινομένου. Το κυριότερο μειονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι πολλοί από τους όρους των αμιγών εξισώσεων είναι άγνωστοι και εκτιμώνται βάσει παραδοχών.



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο τάσεων Reynolds

Οι εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds σε μόνιμες συνθήκες γράφονται στη μορφή:

$$\rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) = D_{T,ij} + D_{L,ij} + P_{ij} + G_{B,ij} + \Pi_{ij} + \varepsilon_{ij} + F_{ij} + ST$$

Όπου $D_{T,ij}$ είναι ο συντελεστής τυρβώδους διάχυσης, $D_{L,ij}$ ο συντελεστής μοριακής διάχυσης, P_{ij} ο ρυθμός παραγωγής λόγω διάτμησης, $G_{B,ij}$ ο ρυθμός παραγωγής λόγω άνωσης, Π_{ij} ο ρυθμός παραγωγής λόγω καταπόνησης, ε_{ij} ο ρυθμός απορρόφησης, F_{ij} ο ρυθμός παραγωγής λόγω περιστροφής και ST ο όρος πηγής.

Το μοντέλο χρησιμοποιεί τις αμειγείς εξισώσεις παραγωγής λόγω μοριακής διάχυσης, καταπόνησης και περιστροφής ως ακολούθως:

$$D_{L,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]$$

$$\Pi_{ij} = p \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

$$F_{ij} = -2\rho\Omega_k (\overline{u'_j u'_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \varepsilon_{jkm})$$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο τάσεων Reynolds

οι υπόλοιποι όροι μοντελοποιούνται όπως περιγράφεται παρακάτω:

Τυρβώδης διάχυση

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right], \quad \sigma_k = 0.82$$

Καταπόνηση

Για την μοντελοποίηση του όρου καταπόνησης χρησιμοποιείται το μοντέλο γραμμικής καταπόνησης [42], σύμφωνα με το οποίο η συνισταμένη καταπόνηση είναι αποτέλεσμα βραδείας καταπόνησης (ανάκτηση ισοτροπίας), βίαιης καταπόνησης και καταπόνησης λόγω ανάκλασης (τοίχος):

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,slow} + \Pi_{ij,rapid} + \Pi_{ij,wall}$$

Όπου

$$\Pi_{ij,slow} = -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} [\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k]$$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το μοντέλο τάσεων Reynolds

$$\Pi_{ij,rapid} = -C_2[(P_{ij} + F_{ij} + G_{B,ij} - \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j})) - \frac{1}{3} \delta_{ij} (P_{kk} + G_{B,kk} - \rho u_k \frac{\partial \overline{u'_k u'_k}}{\partial x_k})]$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij,wall} = & C_1' \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u'_k u'_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_i u'_k} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{u'_j u'_k} n_i n_k) \frac{C_i k^{3/2}}{\varepsilon d} + \\ & + C_2' (\Pi_{km,rapid} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Pi_{ik,rapid} n_j n_k - \frac{3}{2} \Pi_{jk,rapid} n_i n_k) \frac{C_i k^{3/2}}{\varepsilon d} \end{aligned}$$

Πλεονεκτήματα:

- Πιθανώς το πιο γενικό από τα κλασικά μοντέλα
- Αρκούν μόνο οι αρχικές και/ή οριακές συνθήκες.
- Μεγάλη ακρίβεια σε πολύπλοκες περιστροφικές ροές.

Μειονεκτήματα:

- Πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος
- Λιγότερο πιστοποιημένο από το k-ε

Ανωση

$$G_{B,ij} = -\frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} (g_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i})$$

Ρυθμός απορρόφησης

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \rho \varepsilon \delta_{ij}$$

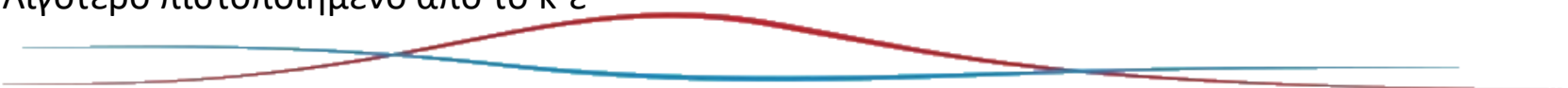
Κινητική ενέργεια

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

Μεταφορά της κινητικής ενέργειας και του ρυθμού απορρόφησης

$$\rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j}] + \frac{1}{2} (P_{ii} + G_{B,ii}) - \rho \varepsilon + S_k$$

$$\rho u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] + C_{\varepsilon 1} \frac{1}{2} [P_{ii} + C_{\varepsilon 3} G_{B,ii}] \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon$$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το επανακανονικοποιημένο RNG k-ε μοντέλο

Το RNG k-ε (Renormalization Group) μοντέλο ακολουθεί μια διαδικασία σχολαστικής στατιστικής επεξεργασίας και διαφέρει από το Standard k-ε στο ότι περιλαμβάνει έναν πρόσθετο όρο στην εξίσωση του ϵ που βελτιώνει την ακρίβεια της πρόβλεψης σε περιοχές βίαιης καταπόνησης. Χρησιμοποιεί αναλυτικές εξισώσεις υπολογισμού των τυρβωδών αριθμών Prandtl και λαμβάνει υπόψη περιοχές χαμηλού αριθμού Reynolds με την εισαγωγή μιας πρόσθετης διαφορικής εξίσωσης για τον υπολογισμό του τυρβώδους ιξώδους.

Διέπουσες εξισώσεις

$$\rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (a_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j}) + P_k + G_B - \rho \epsilon + S_k$$

$$\rho u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (a_\epsilon \mu_{eff} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}) + C_1 \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_3 G_B) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon + S_\epsilon$$

Όπου οι όροι P_k και G_B υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη ενότητα, ενώ οι ποσότητες a_k και a_ϵ είναι οι αντίστροφοι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl ($a_k = 1/\sigma_k$, $a_\epsilon = 1/\sigma_\epsilon$). Το ενεργό ιξώδες μ_{eff} υπολογίζεται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση (differential viscosity model):

$$\frac{\partial}{\partial \hat{v}} \left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right) = 1.72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}}$$



Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το επανακανονικοποιημένο RNG k-ε μοντέλο

Όπου $\hat{\nu}$ είναι το ενεργό ιξώδες ανηγμένο προς το δυναμικό μοριακό ιξώδες $\hat{\nu} = \mu_{eff} / \mu$ και $C_v = 100$. Η εξίσωση (2.18) ολοκληρώνεται για την επίτευξη της κατά το δυνατό καλύτερης περιγραφής των μεταβολών των μεταφερόμενων ποσοτήτων της τύρβης συναρτήσει του αριθμού Reynolds (ή της κλίμακας μήκους), οπότε συνεισφέρει στην καλύτερη διαχείριση της ροής στις περιοχές χαμηλού αριθμού Reynolds, π.χ. κοντά σε τοίχους. Στις περιοχές υψηλού αριθμού Reynolds, η λύση της (2.18) είναι η εξίσωση (2.10) με $C_\mu = 0.0845$.

Οι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl υπολογίζονται με βάση την παρακάτω έκφραση:

$$\left| \frac{a - 1.3929}{a_0 - 1.3929} \right|^{0.621} \left| \frac{a + 2.3929}{a_0 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu}{\mu_{eff}} \quad (2.19)$$

Όπου $a_0 = 1$. Στις περιοχές υψηλού αριθμού Reynolds (πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη) είναι $\mu / \mu_{eff} \ll 1$ και η εξίσωση (2.19) δίνει $a = a_k = a_\epsilon = 1.3929$, δηλ. $\sigma_k = \sigma_\epsilon = 0.718$.

Μοντέλα τύρβης

Μοντέλα τύρβης RANS – Το επανακανονικοποιημένο RNG k-ε μοντέλο

Η κυριότερη διαφορά από το Standard k-ε μοντέλο είναι ο πρόσθετος όρος R_ϵ στην εξίσωση (2.17), ο οποίος ορίζεται ως ακολούθως:

$$R_\epsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \epsilon^2}{1 + 0.012 \eta^3} \frac{1}{k}$$

Όπου $\eta = Sk / \epsilon$ και $\eta_0 = 4.38$. Στις περιοχές όπου $\eta < \eta_0$ είναι $R_\epsilon > 0$ και προκύπτουν παρόμοια αποτελέσματα με το Standard k-ε. Αντίθετα, στις περιοχές μεγάλης καταπόνησης, δηλ. $\eta > \eta_0$, η αρνητική τιμή του R_ϵ οδηγεί στην αύξηση του ρυθμού απορρόφησης και συνεπώς στην μείωση της κινητικής ενέργειας της τύρβης, οπότε υπολογίζεται χαμηλότερο τυρβώδες ιξώδες σε σχέση με το Standard k-ε μοντέλο. Τέλος, οι σταθερές του μοντέλου είναι:

$$C_1 = 1.42, C_2 = 1.68$$

το RNG k-ε αναμένεται να είναι αποδοτικότερο σε ροές που υφίστανται βίαιη καταπόνηση και έντονη καμπύλωση των ροϊκών γραμμών

