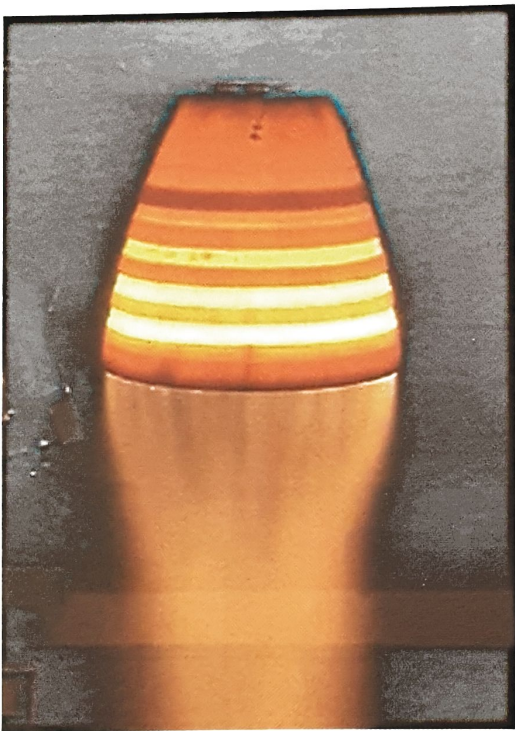


3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: Ακροφύσια

3.1 Μονοδιάστατη Ισεντροπική Ροή

Γενικά, ο ρόλος ενός ακροφυσίου είναι η επιτάχυνση της ροής. Ειδικότερα, τα ακροφυσίων αεροστρόβιλων και πυραύλων είναι η αύξηση της δύναμης ώσης, [Παράγραφος 2.17]. Σε κάθε τύπο ακροφυσίου, η επιτάχυνση και η ώθηση μεγιστοποιούνται εάν επιτευχθεί ισεντροπική λειτουργία και το αέριο εκτονωθεί εντός του ακροφυσίου στην ατμοσφαιρική πίεση.

Υπερηχητική ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων μπορεί να επιτευχθεί με συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο. Αποδεικνύεται ότι για υπερηχητικές πτήσεις με αριθμό $M < 2$ το συγκλίνον ακροφύσιο, επιτυγχάνει παρόμοια ώση με το συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο, λαμβανομένου υπόψη και του όρου της πίεσης (σχέση (5-25)). Εάν λοιπόν ισχύει $M < 2$, το συγκλίνον ακροφύσιο είναι προτιμότερο επειδή αποφεύγεται ο σχηματισμός κρουστικού κύματος ενώ ταυτόχρονα πρόκειται για απλούστερη και περισσότερο εύχρηστη κατασκευή. Συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο χρησιμοποιείται οπωσδήποτε στους πυραύλους λόγω των πολύ μεγάλων λόγων πίεσεων και ταχυτήτων εξαγωγής των καυσαερίων. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των ακροφυσίων πυραύλων είναι ο μεγάλος λόγος των διατομών εισαγωγής/εξαγωγής, (~10 έως 20), (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Ερυθροπυρομένο αποκλίνον τμήμα συγκλίνοντος-αποκλίνοντος ακροφυσίου πυραύλου

Σ' αυτή την Παράγραφο θα μελετηθεί η ροή μέσα από ένα συγκλίνοντα-αποκλίνοντα αγωγό. Από την αρχή διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\begin{aligned} (2-67) \Rightarrow \dot{m} = \rho \cdot A \cdot \vec{V} = \text{σταθ.} \Rightarrow d(\dot{m}) = d(\rho A \vec{V}) \Rightarrow 0 = A \vec{V} d\rho + \rho d(A \vec{V}) \Rightarrow \\ \Rightarrow A \vec{V} d\rho + \rho A d\vec{V} + \rho \vec{V} dA = 0 \Rightarrow (\text{διαιρώντας με } \rho A \vec{V}) \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{d\vec{V}}{\vec{V}} = 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για σταθεροποιημένη ροή, $w=0$, $q=0$ και $pe=0$, προκύπτει:

$$(2-76A) \Rightarrow h_{\text{oin}} = h_{\text{out}} \Rightarrow h_{\text{in}} + \frac{\vec{V}_{\text{in}}^2}{2} = h_{\text{out}} + \frac{\vec{V}_{\text{out}}^2}{2} \Rightarrow h + \frac{\vec{V}^2}{2} = \text{σταθ.} \Rightarrow dh + \vec{V} d\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2^{\text{η}} \text{ σχέση του Gibbs: } Tds = dh - v dP \Rightarrow (ds=0 \text{ γιατί ισεντροπική μεταβολή}) \Rightarrow dh - v dP = 0 \Rightarrow dh = \frac{1}{\rho} dP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{\rho} + \vec{V} d\vec{V} = 0 \quad (3-2)$$

η οποία είναι η διαφορική μορφή της **εξίσωσης Bernoulli**, [Παράγραφος 2.14]. Η σχέση (3-1) γράφεται:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{d\vec{V}}{\vec{V}} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{d\vec{V}}{\vec{V}} \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{\vec{V}d\vec{V}}{\vec{V}^2} \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{\vec{V}d\vec{V}}{\vec{V}^2} - \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow$$

$$(3-2) \Rightarrow \frac{dP}{\rho} + \vec{V} d\vec{V} = 0 \Rightarrow -\vec{V} d\vec{V} = \frac{dP}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho} \cdot \frac{1}{\vec{V}} - \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho} \cdot \left(\frac{1}{\vec{V}^2} - \frac{d\rho}{dP} \right)$$

Ισχύει όμως για την ταχύτητα του ήχου για τυχαίο ρευστό:

$$a^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \Rightarrow \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho} \cdot \left(\frac{1}{\vec{V}^2} - \frac{1}{a^2} \right) \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho \vec{V}^2} \cdot \left(1 - \frac{\vec{V}^2}{a^2} \right) \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho \vec{V}^2} \cdot (1 - M^2) \quad (3-3)$$

Διεξάγεται διερεύνηση της σχέσης (3-3) για να εξεταστεί πως μεταβάλλεται η **πίεση** κατά μήκος του συγκλίνοντα-αποκλίνοντα αγωγού:

$$\begin{array}{l} \text{υποηχητική } M < 1 \Rightarrow 1 - M^2 > 0 \Rightarrow dA \text{ και } dP \text{ ίδιο πρόσημο} \\ \text{σε συγκλίνων αγωγό: } dA < 0 \Rightarrow dP < 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \Rightarrow \text{πίεση μειώνεται}$$

$$\begin{array}{l} \text{υποηχητική } M < 1 \Rightarrow 1 - M^2 > 0 \Rightarrow dA \text{ και } dP \text{ ίδιο πρόσημο} \\ \text{σε αποκλίνων αγωγό: } dA > 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \Rightarrow dP > 0 \Rightarrow \text{πίεση αυξάνεται}$$

$$\begin{array}{l} \text{υπερηχητική } M > 1 \Rightarrow 1 - M^2 < 0 \Rightarrow dA \text{ και } dP \text{ αντίθετο πρόσημο} \\ \text{σε συγκλίνων αγωγό: } dA < 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \Rightarrow dP > 0 \Rightarrow \text{πίεση αυξάνεται}$$

$$\begin{array}{l} \text{υπερηχητική } M > 1 \Rightarrow 1 - M^2 < 0 \Rightarrow dA \text{ και } dP \text{ αντίθετο πρόσημο} \\ \text{σε αποκλίνων αγωγό: } dA > 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \Rightarrow dP < 0 \Rightarrow \text{πίεση μειώνεται}$$

Η σχέση (3-2) γράφεται:

$$\frac{dP}{\rho} + \vec{V} d\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{\rho} = -\vec{V} d\vec{V} \Rightarrow \rho \vec{V} = -\frac{dP}{d\vec{V}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right.$$

$$(3-3) \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho \vec{V}^2} \cdot (1 - M^2) \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho \vec{V} \vec{V}} \cdot (1 - M^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dP}{-\frac{dP}{d\vec{V}} \cdot \vec{V}} \cdot (1 - M^2) \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\vec{V}}{\vec{V}} (1 - M^2) \quad (3-4)$$

Διεξάγεται διερεύνηση της σχέσης (3-4) για να εξεταστεί τι γίνεται με την ταχύτητα κατά μήκος του συγκλίνοντα/αποκλίνοντα αγωγού:

υποηχητική $M < 1 \Rightarrow 1 - M^2 > 0 \Rightarrow dA$ και $d\vec{V}$ αντίθετο πρόσημο
σε συγκλίνων αγωγό: $dA < 0 \Rightarrow d\vec{V} > 0 \Rightarrow$ ταχύτητα αυξάνεται

υποηχητική $M < 1 \Rightarrow 1 - M^2 > 0 \Rightarrow dA$ και $d\vec{V}$ αντίθετο πρόσημο
σε αποκλίνων αγωγό: $dA > 0 \Rightarrow d\vec{V} < 0 \Rightarrow$ ταχύτητα μειώνεται

υπερηχητική $M > 1 \Rightarrow 1 - M^2 < 0 \Rightarrow dA$ και $d\vec{V}$ ίδιο πρόσημο
σε συγκλίνων αγωγό: $dA < 0 \Rightarrow d\vec{V} < 0 \Rightarrow$ ταχύτητα μειώνεται

υπερηχητική $M > 1 \Rightarrow 1 - M^2 < 0 \Rightarrow dA$ και $d\vec{V}$ ίδιο πρόσημο
σε αποκλίνων αγωγό: $dA > 0 \Rightarrow d\vec{V} > 0 \Rightarrow$ ταχύτητα αυξάνεται

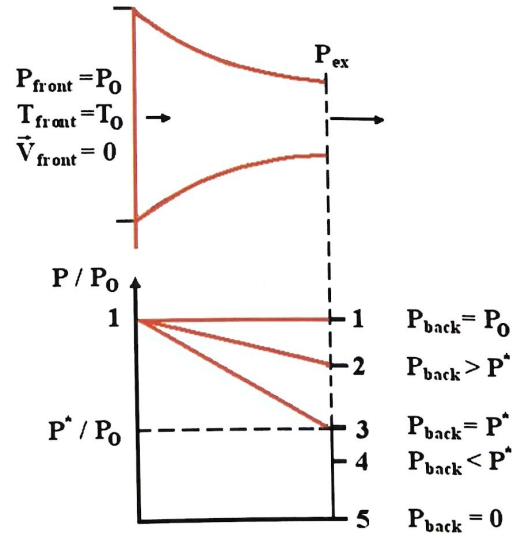
Παρατήρηση: Επειδή στις περισσότερες κοινές εφαρμογές οι ταχύτητες που συναντώνται είναι κατά πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του ήχου και, επομένως, η αναπαράσταση ενός ακροφυσίου ως συγκλίνοντα αγωγού είναι η συνηθέστερη.

3.2 Ακροφύσιο (Συγκλίνων Αγωγός)

Στην Παράγραφο αυτή μελετάται η υποηχητική ροή διαμέσου ενός συγκλίνοντα αγωγού (ακροφύσιο, nozzle) και συγκεκριμένα η μεταβολή της ταχύτητας, της παροχής μάζας και της πίεσης κατά μήκος του ακροφυσίου συναρτήσει της πίεσης επιστροφής (ή αντίθλιψη, back pressure) P_{back} , η οποία είναι η πίεση που επικρατεί στην περιοχή εκτόνωσης του ακροφυσίου, Σχήμα 3.2.

Στην είσοδο του ακροφυσίου εφαρμόζεται μια δεξαμενή εισόδου πίεσης P_{front} και θερμοκρασίας T_{front} . Η δεξαμενή είναι αρκετά μεγάλη, οπότε η ταχύτητα εισόδου στο ακροφύσιο θεωρείται αμελητέα.

Επειδή η ταχύτητα του ρευστού στη δεξαμενή είναι ουσιαστικά μηδενική και η ροή διαμέσου του ακροφυσίου είναι ισεντροπική, η πίεση και η ολική (ανακοπής) θερμοκρασία του ρευστού σε οποιαδήποτε διατομή του ακροφυσίου θα είναι ίσες με την πίεση και τη θερμοκρασία της δεξαμενής, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2: Η επίδραση της P_{back} στην κατανομή της πίεσης κατά μήκος συγκλίνοντος ακροφυσίου

Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται η επίδραση που έχει η μείωση της πίεσης επιστροφής, P_{back} στην κατανομή της πίεσης κατά μήκος του ακροφυσίου. Όταν η $P_{back} = P_{o1} = P_{front}$, τότε η ροή σταματά. Καθώς η πίεση επιστροφής P_{back} μειώνεται τείνοντας στην P_{o2} , η πίεση του εξωτερικού επιπέδου P_{oex} θα πέσει επίσης σε P_{o2} . Αυτό προκαλεί τη μείωση της πίεσης κατά μήκος του ακροφυσίου στη κατεύθυνση της ροής. Όταν η πίεση επιστροφής P_{back} μειωθεί περισσότερο τείνοντας στην $P_{o3} (= P^*)$ που είναι η πίεση που απαιτείται για να αυξηθεί η ταχύτητα του

ρευστού στην ταχύτητα του ήχου στο εξωτερικό επίπεδο ή στο λαιμό), η παροχή μάζας μεγιστοποιείται. Τότε η ροή είναι φραγμένη, (choked). Αν συνεχιστεί η μείωση της πίεσης επιστροφής έως την τιμή P_{o4} ή και παρακάτω δεν παρατηρούνται μεταβολές στη κατανομή της πίεσης κατά μήκος του ακροφυσίου. Για μόνιμη ροή όπως αυτή μέσα στο ακροφυσίου, ισχύει για την παροχή μάζας:

$$\begin{aligned}
 (2-67) &\Rightarrow \dot{m} = \rho A \bar{V} \\
 (2-28) &\Rightarrow P = \rho RT \quad \Rightarrow \dot{m} = \frac{P}{RT} A \bar{V} \\
 (2-180) &\Rightarrow M = \frac{\bar{V}}{a} \Rightarrow \bar{V} = Ma \Rightarrow \bar{V} = M \sqrt{\gamma RT} \quad \Rightarrow \dot{m} = P A M \sqrt{\frac{\gamma}{RT}} \\
 (2-182) &\Rightarrow \frac{T_o}{T} = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \cdot M^2 \Rightarrow T = \frac{T_o}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \cdot M^2} \\
 (2-183) &\Rightarrow \frac{P_o}{P} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \cdot M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow P = \frac{P_o}{\left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \cdot M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \\
 &\Rightarrow \dot{m} = \frac{A M P_o \sqrt{\gamma/(RT_o)}}{\left[1 + (\gamma-1)M^2/2\right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}} \quad (3-5)
 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (3-5) προκύπτει ότι η παροχή μάζας ενός ακροφυσίου είναι συνάρτηση των ιδιοτήτων ανακοπής του ρευστού, του εμβαδού της επιφάνειας ροής και του αριθμού Mach, ενώ ισχύει για κάθε διατομή.

Αποδεικνύεται ότι η μέγιστη παροχή μάζας επιτυγχάνεται όταν $M=1$ και η απόδειξη γίνεται με παραγωγή της σχέσης (3-5) ως προς M και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με μηδέν με δεδομένη την επιφάνεια ροής A , την T_o και P_o . Είναι γνωστό όμως ότι η μόνη εγκάρσια τομή του ακροφυσίου στην οποία ο αριθμός $Mach$ μπορεί και ισούται με τη μονάδα είναι αυτή της ελάχιστης επιφάνειας ροής (λαιμός), η παροχή μάζας διαμέσου ενός ακροφυσίου θα μεγιστοποιείται όταν στο λαιμό θα ισχύει: $M=1$.

Εάν συμβολίσουμε με A^* τη διατομή του λαιμού και αντικαταστήσουμε στη σχέση (3-5) την τιμή $M=1$, προκύπτει ότι η μέγιστη παροχή μάζας για δεδομένο ιδανικό αέριο είναι:

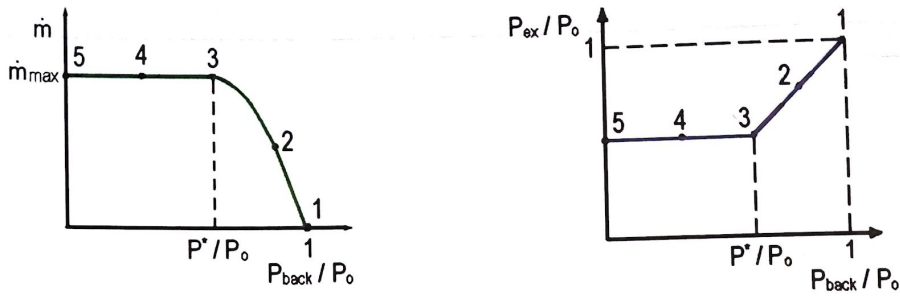
$$\dot{m}_{max} = A^* P_o \sqrt{\frac{\gamma}{RT_o}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3-6)$$

για $\gamma=1.4$ η (3-6) $\Rightarrow \dot{m}_{max} = 0.0404 A^* P_o / T_o$ (3-7)

Από τη σχέση (3-7) προκύπτει ότι η μέγιστη παροχή μάζας εξαρτάται από την πίεση ανακοπής, τη θερμοκρασία ανακοπής και το εμβαδό της διατομής του λαιμού.

Από τη γραφική παράσταση της παροχής \dot{m} σαν συνάρτηση του λόγου P_{back}/P_o για ένα συγκλίνον ακροφύσιο, (Σχήμα 3.3), παρατηρείται ότι η παροχή μάζας αυξάνεται καθώς ο λόγος P_{back}/P_o μειώνεται και αποκτά μια μέγιστη τιμή $P_{back} = P^*$, στην οποία παραμένει σταθερή για τις τιμές P_{back}/P_o που είναι μικρότερες από αυτόν το κρίσιμο λόγο. Το Σχήμα 3.3 δείχνει ακόμα την επίδραση της πίεσης, επιστροφής στην πίεση εξόδου του ακροφυσίου P_{oex} , δηλαδή ισχύει:

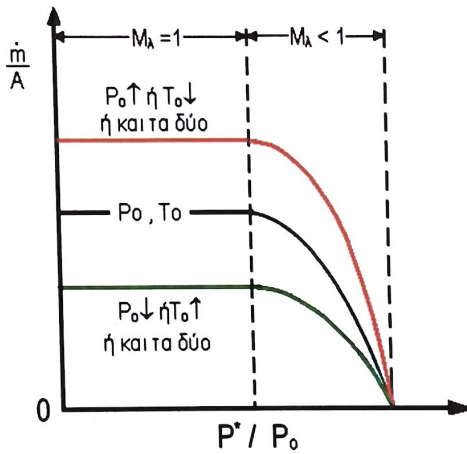
- Για $P_{back} \geq P^*$: $P_{oex} = P_{back}$ και
- Για $P_{back} < P^*$: $P_{oex} = P^*$, $M=1$ στο εξωτερικό επίπεδο και $\dot{m} = \dot{m}_{max}$



Σχήμα 3.3: Επίδραση της P_{back} στην παροχή μάζας και στην P_{oex} ενός ακροφυσίου

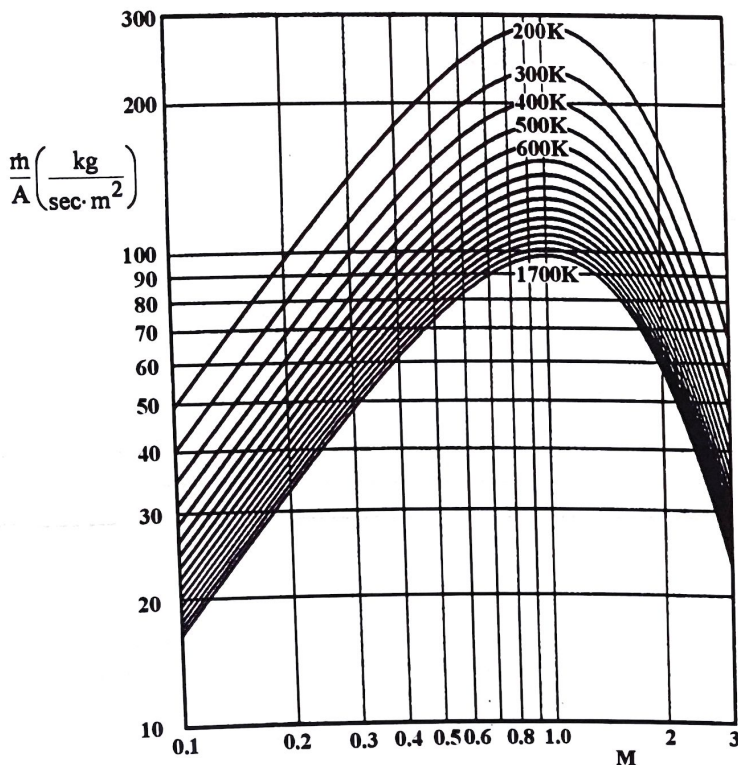
Παρατήρηση: Επειδή η ταχύτητα της ροής στο λαιμό για τη μέγιστη παροχή μάζας είναι ίση με αυτή του ήχου, είναι αδύνατο να γίνει αντιληπτή στην είσοδο του ακροφυσίου μια πίεση επιστροφής μικρότερη από την κρίσιμη, οπότε η παροχή στην περίπτωση αυτή παραμένει αμετάβλητη.

Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζεται η μεταβολή της παροχής μάζας μέσα σ' ένα συγκλίνον ακροφύσιο συναρτήσει της πίεσης ανακοπής P_o και έμμεσα της θερμοκρασίας ανακοπής T_o . Αύξηση της P_o (ή μείωση της T_o ή και τα δύο) θα οδηγήσει σε αύξηση της ροής μάζας διαμέσου του συγκλίνοντος ακροφυσίου, ενώ μείωση της P_o (ή αύξηση της T_o ή και τα δύο) θα τη μειώσει.



Σχήμα 3.4: Μεταβολή της παροχής μάζας συναρτήσει των ιδιοτήτων ανακοπής στην είσοδο του ακροφυσίου

Για την περίπτωση τελείου αερίου με $\gamma=1.4$ και για $P=1bar$, η μεταβολή της παροχής της μάζας ανά μονάδα επιφανείας με τον αριθμό Mach και για διάφορες τιμές της ολικής θερμοκρασίας, φαίνεται στο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Μεταβολή της παροχής μάζας ανά μονάδα επιφανείας συναρτήσει του αριθμού Mach, [Mattingly [40]]

όπου $\rho_c = P_c/RT$ και $\bar{V}_c = \sqrt{2c_p(T_{04} - T_c)}$ από τη σχέση (3-10) ή $\bar{V}_c = \sqrt{\gamma RT_c}$.

Η τιμή αυτή είναι προσεγγιστική γιατί δεν λαμβάνεται υπόψη το πάχος των οριακών στρωμάτων. Επιπλέον παρατηρήθηκε πως η συνθήκη $M=1$, υλοποιείται κατάντη σ' ένα επίπεδο έξω από την έξοδο του ακροφύσιου εκεί όπου η ροή γίνεται μη αντιστρεπτή. Στην πράξη το απαιτούμενο εμβαδόν διατομής που δίνει τις ζητούμενες συνθήκες λειτουργίας του κινητήρα μπορεί να προσδιοριστεί με τη **μέθοδο δοκιμής και επαλήθευσης** (try and error method). Η τιμή του η_j εξαρτάται από πλήθος παραγόντων μεταξύ αυτών το μήκος του αγωγού εξόδου, τα συστήματα που παρεμβάλλονται στην ροή και δημιουργούν απώλειες πίεσης, το πόσο της στροβιλότητας που εισάγει στην ροή ο στρόβιλος κ.α.

Μια τυπική τιμή για το $\eta_j = 0.95$.

3.3 Κρουστικά Κύματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο 3.3, σε μία υπερηχητική ροή, είτε σε αγωγούς σταθερής διατομής είτε σε συγκλίνοντα-αποκλίνοντα ακροφύσια, μπορεί να εμφανισθεί σε κάποιο σημείο μία απότομη ασυνέχεια της ροής λόγω μετάπτωσης της υπερηχητικής ροής σε υποηχητική. Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται με τον όρο κρουστικό κύμα και μπορεί να εμφανισθεί είτε η ροή είναι αδιαβατική (Fanno), [Παράγραφος 3.4.5] είτε με ταυτόχρονη μετάδοση θερμότητας (Rayleigh), [Παράγραφος 3.4.4]. Κρουστικά κύματα δεν μπορούν να εμφανισθούν σε υποηχητική ροή, γιατί κάτι τέτοιο θα συνιστούσε παραβίαση του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής, [Παράγραφος 3.4.1].

Το κρουστικό κύμα (shock wave) είναι μια επιφάνεια ασυνέχειας της ροής, πολύ μικρού πάχους (της τάξης της μέσης ελεύθερης διαδρομής των μορίων του αερίου, δηλαδή $\sim 10^{-5}$ έως $\sim 10^{-3}$ mm) στην υπερηχητική ροή, μετά από την οποία η ταχύτητα γίνεται υποηχητική. Το κρουστικό κύμα εμφανίζεται σε υπερηχητικές ταχύτητες και σε επιβραδύνουσες ροές. Ένα κρουστικό κύμα μπορεί να

- σχηματισθεί και να διατηρηθεί σε μία ορισμένη θέση της υπερηχητικής ροής, εφόσον η ροή είναι μόνιμη ή
- μπορεί να μετακινείται εάν η ροή είναι μη μόνιμη, όπως π.χ. κατά μία απότομη διακοπή της ροής σε αγωγό με μία βαλβίδα ή κατά μία εκρηκτική έκλυση ενέργειας σε ένα σημείο της ροής.

Το κρουστικό κύμα είναι ένα κύμα συμπίεσης, δηλαδή κατά μήκος του και στην κατεύθυνση της σχετικής του κίνησης παρατηρείται αύξηση της στατικής πίεσης, θερμοκρασίας και της πυκνότητας, σχεδόν στιγμιαία. Αντίθετα, κατά μήκος του παρατηρείται μείωση της ολικής πίεσης εξαιτίας της κατανάλωσης της κινητικής ενέργειας με αντίστοιχη αύξηση της εντροπίας. Όμως, δεν υπάρχει ροή θερμότητας μεταξύ κρουστικού κύματος και περιβάλλοντος και επομένως δεν υφίσταται μεταβολή της θερμοκρασίας ανακοπής πριν και μετά το κρουστικό κύμα. Μεταξύ των ορίων ενός κρουστικού κύματος ισχύουν οι αρχές διατήρησης μάζας, ενέργειας και ορμής ενώ η εντροπία αυξάνεται, δηλαδή η ροή μπορεί να είναι ισεντροπική πριν και μέχρι το μέτωπο του κρουστικού κύματος και μπορεί επίσης να είναι ισεντροπική μετά το κρουστικό κύμα αλλά με σημαντικά αυξημένη τιμή εντροπίας. Επειδή η ροή εντός του κρουστικού κύματος δεν είναι ισεντροπική, συμβαίνει σημαντική μείωση της πίεσης ανακοπής μετά το κρουστικό κύμα.

Διακρίνονται δύο τύποι κρουστικού κύματος:

- Το κάθετο στη ροή κρουστικό κύμα σχηματίζεται όταν η ροή δεν μεταβάλλει διεύθυνση λόγω του σχηματισμού κρουστικού κύματος.
- Το πλάγιο κρουστικό κύμα όπου μεταβάλλεται όχι μόνο μέτρο αλλά και διεύθυνση της ταχύτητας της ροής αφού διέλθει από το κρουστικό κύμα.

Παρατήρηση: Ένα πλήρες κρουστικό κύμα μπορεί να περιλαμβάνει κάθετο και πλάγιο κρουστικό κύμα.

3.3.1 Κάθετο ή Κανονικό ή Ορθό κρουστικό κύμα (normal shock wave)

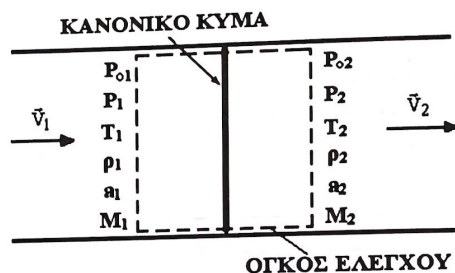
Τα κύματα κρούσης που εμφανίζονται σε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση της ροής, ονομάζονται **κάθετα κρουστικά κύματα**. Η διεργασία της ροής διαμέσου ενός κύματος κρούσης είναι έντονα μη-αντιστρεπτή και δεν μπορεί να προσεγγιστεί ως ισεντροπική.

Μπορεί κανείς να ξεχωρίσει δύο τύπους καθέτων κρουστικών κυμάτων, τα «ισχυρά» κάθετα κρουστικά κύματα και τα «ασθενή» κάθετα κρουστικά. Η διαφορά τους έγκειται στο κατά πόσον αντιστρεπτή ή όχι είναι η ροή μέσω του καθέτου κρουστικού κύματος. Σ' ένα ασθενές κάθετο κρουστικό κύμα, η αύξηση της εντροπίας είναι πολύ μικρή και επομένως στην περίπτωση αυτή οι ισεντροπικές σχέσεις που συνδέουν την πίεση και την πυκνότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συνδέσουν τις καταστάσεις πριν και μετά από το κρουστικό κύμα. Οι μεταβολές κατάστασης μέσα από ένα κρουστικό κύμα είναι ισεντροπικές όταν ο αριθμός Mach πριν από το κάθετο κρουστικό κύμα είναι μικρότερος του 1.25. Επομένως, για $M < 1.25$ ένα κρουστικό κύμα λέγεται «ασθενές» και οι μεταβολές κατάστασης, θεωρούνται ισεντροπικές. Τέτοια ασθενή κύματα παρουσιάζονται για

παράδειγμα στις κινούμενες πτέρυγες του ανεμιστήρα ενός turbofan. Η διεργασία της ροής διαμέσου ενός ισχυρού ($M \geq 1.25$) κρουστικού κύματος είναι κατά πολύ μη-αντιστρεπτή με συνέπεια να μη μπορεί να θεωρηθεί ισηντροπική, αλλά μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική.

Για δεδομένες συνθήκες σ' ένα όγκο ελέγχου που περικλείει το κανονικό κρουστικό κύμα, έχει ενδιαφέρον να υπολογιστούν τα αντίστοιχα μεγέθη εξόδου (δείκτης 2), (Σχήμα 3.8). Κάτι τέτοιο απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση 7 εξισώσεων που αναφέρονται στον όγκο ελέγχου:

1. την αρχή διατήρησης της μάζας,
2. της αδράνειας,
3. της ενέργειας,
4. την εξίσωση της εντροπίας,
5. την εξίσωση των τελείων αερίων,
6. την εξίσωση της ταχύτητας του ήχου και
7. του ορισμού του αριθμού Mach.



Σχήμα 3.8: Κανονικό κρουστικό κύμα, εντός όγκου ελέγχου

Για την ανάπτυξη του μαθηματικού προτύπου δηλαδή σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων της ροής πριν και μετά την ασυνέχεια (κάθετο κρουστικό κύμα) για ένα ιδανικό αέριο με σταθερές ειδικές θερμότητες, που διέπει τη συμπεριφορά των κρουστικών κυμάτων, θεωρούμε ένα στάσιμο όγκο ελέγχου απειροστού πάχους που περιλαμβάνει το κρουστικό κύμα μέσα στη ροή ιδανικού αερίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Επειδή το μήκος του κρουστικού κύματος είναι απειροστό, η ροή θεωρείται μόνιμη και αδιαβατική αλλά είναι μη αντιστρεπτή και επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξισώσεις της ισηντροπικής ροής. Επίσης, οι τριβές θεωρούνται αμελητέες και το εμβαδόν της διατομής, A, θεωρείται σταθερό ανεξάρτητα από τη φυσική διαμόρφωση του αγωγού.

Λόγος των στατικών θερμοκρασιών T_2/T_1 :

$$\begin{aligned}
 (2-182) \Rightarrow \frac{T_{o2}}{T_2} &= 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_2^2 \\
 (2-182) \Rightarrow \frac{T_{o1}}{T_1} &= 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2 \\
 T_{o1} &= T_{o2}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + M_1^2(\gamma-1)/2}{1 + M_2^2(\gamma-1)/2} \quad (3-13)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας γράφεται:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2 M_2 V_2}{P_1 M_1 V_1} = \frac{P_2 M_2 \sqrt{T_2}}{P_1 M_1 \sqrt{T_1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \quad (3-14)$$

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1}, \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} \text{ και } M = \frac{V}{c}, c = \sqrt{\gamma RT}$$

Από τις σχέσεις (3-13) και (3-14) προκύπτει ο λόγος πίεσης της ασυνέχειας:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1 \sqrt{1 + M_1^2(\gamma-1)/2}}{M_2 \sqrt{1 + M_2^2(\gamma-1)/2}} \quad (3-15)$$

Η τελευταία σχέση είναι η εξίσωση της συνέχειας: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$
 Όπου $M = \frac{V}{c}$
 $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow A(\rho_1 V_1) = A(\rho_2 V_2) = \dot{m}$
 Τέλος από τις σχέσεις (3-17) αναπαράσταση της ασυνέχειας με εκφ.
 Στη συνέχεια δίνονται Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 3.1 ιδανικά αέρια με $\gamma=1.4$.
 ή συναρτήσει μόνου του M_1 .
 (3-15)

Η τελευταία είναι συνδυασμός των εξισώσεων διατήρησης της μάζας και της ενέργειας συνεπώς, αποτελεί επίσης την εξίσωση της **γραμμής Fanno** [Παράγραφος 3.4.5] για ένα ιδανικό αέριο με σταθερές ειδικές θερμότητες.

Όμοια, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σχέση για τη **γραμμή Rayleigh** [Παράγραφος 3.4.4] συνδυάζοντας τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής:

$$(3-2) \Rightarrow A(P_1 - P_2)\rho_1 = \dot{m}(V_2 - V_1) \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho_1 V_2^2 - \rho_2 V_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\rho V^2 = \frac{P}{RT}(Mc)^2 = \frac{P}{RT}(M\sqrt{\gamma RT})^2 = P\gamma M^2$$

$$\Rightarrow P_1(1 + P\gamma M_1^2) = P_2(1 + P\gamma M_2^2) \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (3-16)$$

Τελικά από τις σχέσεις (3-15) και (3-16), προκύπτει:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(\gamma - 1)}{2M_1^2/(\gamma - 1) - 1} \quad (3-17)$$

Η σχέση (3-17) αναπαριστά την τομή των γραμμών Fanno και Rayleigh και συσχετίζει τον αριθμό Mach ανάντη της ασυνέχειας με εκείνον κατόντη της ασυνέχειας.

Στη συνέχεια δίνονται συνοπτικά σχέσεις μονοδιάστατου κάθετου πλήγματος ιδανικού αερίου, ενώ στον Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 3.9 παρουσιάζονται διάφοροι λόγοι ροϊκών ιδιοτήτων διαμέσου ασυνεπειών για ιδανικά αέρια με $\gamma=1.4$.

$$T_{o1} = T_{o2} \quad (3-18)$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}} \quad (3-19)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} \quad (3-20A)$$

ή συναρτήσει μόνο του M_1 :
$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right)(M_1^2 - 1) \quad (3-20B)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2/P_1}{T_2/T_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{V_1}{V_2} \quad (3-21)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + M_1^2(\gamma - 1)}{2 + M_2^2(\gamma - 1)} \quad (\text{ίδια με την (3-13)}) \quad (3-22A)$$

ή συναρτήσει μόνο του M_1 :
$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)}M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (3-22B)$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{1 + M_2^2 (\gamma - 1) / 2}{1 + M_1^2 (\gamma - 1) / 2} \right]^{(\gamma + 1) / 2(\gamma - 1)} \quad (3-23A)$$

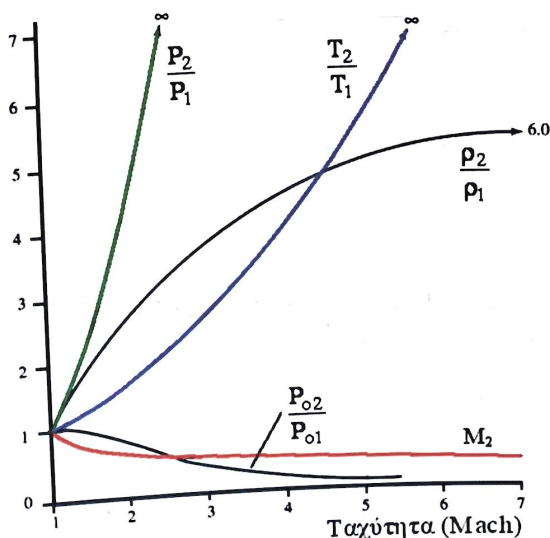
ή συναρτήσει μόνο του M_1 :

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{\gamma / (\gamma - 1)} \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{-1 / (\gamma - 1)} \quad (3-23B)$$

$$\frac{P_{o2}}{P_1} = \frac{(1 + \gamma M_1^2) [1 + M_2^2 (\gamma - 1) / 2]^{\gamma / (\gamma - 1)}}{1 + \gamma M_2^2} \quad (3-24)$$

Πίνακας 3.1: Συναρτήσεις μονοδιάστατου κάθετου κύματος ιδανικού αερίου με $\gamma=1.4$, {Cengel,[93]}

M_1	M_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{o2}/P_{o1}	P_{o2}/P_1
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.8929
1.1	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	2.1328
1.2	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	2.4075
1.3	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	2.7136
1.4	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	3.0492
1.5	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	3.4133
1.6	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	3.8050
1.7	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	4.2238
1.8	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	4.6695
1.9	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	5.1418
2.0	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	5.6404
2.1	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	6.1654
2.2	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	6.7165
2.3	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	7.2937
2.4	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	7.8969
2.5	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	8.5261
2.6	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	9.1813
2.7	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	9.8624
2.8	0.4882	8.9800	3.6636	2.4512	0.3895	10.5694
2.9	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	11.3022
3.0	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	12.0610
4.0	0.4350	18.5000	4.5714	4.0469	0.1388	21.0681
5.0	0.4152	29.0000	5.0000	5.8000	0.0617	32.6335
∞	0.3780	∞	6.0000	∞	0	∞



Σχήμα 3.9: Γραφική απεικόνιση των σχέσεων μονοδιάστατου κάθετου πλήγματος ιδανικού αερίου, ($\gamma=1.4$). (Mattingly,[40])

Από τον Πίνακα 3.1 και το Σχήμα 3.9, συμπεραίνουμε ότι:

- Ο αριθμός Mach μετά την ασυνέχεια (M_2) είναι πάντοτε μικρότερος από 1 και ότι
- Όσο μεγαλύτερη τιμή έχει ο υπερηχητικός αριθμός Mach πριν την ασυνέχεια, τόσο μικρότερη τιμή θα έχει ο υποηχητικός αριθμός Mach μετά.
- Η στατική πίεση, η στατική θερμοκρασία και η στατική πυκνότητα αυξάνονται μετά το κύμα κρούσης ενώ η πίεση ανακοπής μειώνεται.

Όταν είναι γνωστά τα μεγέθη του Πίνακα 3.1 είναι δυνατόν να υπολογιστεί και η ταχύτητα διάδοσής του, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι ίση με την ταχύτητα του ήχου όταν $\Delta P = P_2 - P_1 = 0$.

Η μεταβολή της εντροπίας διαμέσου μιας ασυνέχειας μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας την εξίσωση αλλαγής της εντροπίας για ένα ιδανικό αέριο διαμέσου της ασυνέχειας:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \frac{P_2}{P_1} \quad (3-25)$$

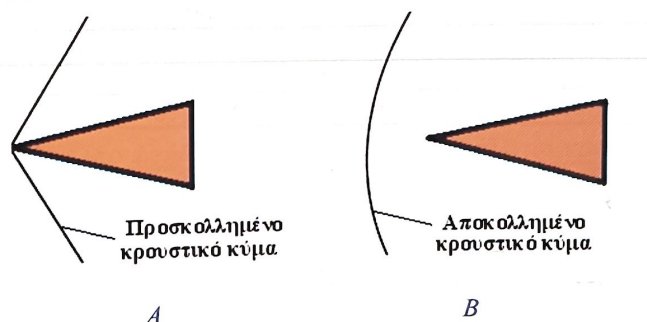
και μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των γ , R , και M_1 χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που προηγήθηκαν. Αφού η ροή διαμέσου της ασυνέχειας είναι αδιαβατική και μη αντιστρεπτή, ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής απαιτεί αύξηση της εντροπίας διαμέσου του κρουστικού κύματος, {Πολυζάκης [86]}. Επομένως, ένα κύμα κρούσης δε μπορεί να υπάρχει για τιμές του M_1 μικρότερες της μονάδας αλλιώς, η διαφορά εντροπίας θα ήταν αρνητική. Για αδιαβατικές συνθήκες ροής, τα κύματα κρούσης υφίστανται μόνο σε υπερηχητικές ροές, $M_1 > 1$.

3.3.2 Πλάγιο ή Λοξό Κρουστικό Κύμα (oblique shock wave)

Το πλάγιο κρουστικό κύμα είναι μια ασυνέχεια που σχηματίζει γωνία με τη διεύθυνση της ροής πριν από την ασυνέχεια. Η διαφορά ανάμεσα στο κάθετο και στο πλάγιο κρουστικό κύμα, είναι ότι στην περίπτωση του κάθετου κρουστικού κύματος υπάρχει συνέχεια της πίεσης και της ταχύτητας και ασυνέχεια στην κλίση της πίεσης και της ταχύτητας. Αντίθετα, στο πλάγιο κρουστικό κύμα υπάρχει ασυνέχεια της πίεσης και της ταχύτητας (υπάρχει δηλαδή όχι μόνο μεταβολή του μεγέθους αλλά και της διεύθυνσης της ταχύτητας). Οι ροές που παράγονται από ένα πλάγιο κρουστικό κύμα ονομάζονται και **ροές συμπίεσης**.

Σε ένα πλάγιο κρουστικό κύμα η ταχύτητα του ρευστού που θα περάσει από μέσα του δύναται να παραμείνει υπερηχητική, αλλά θα υπάρξει μεταβολή της διεύθυνσης της ροής.

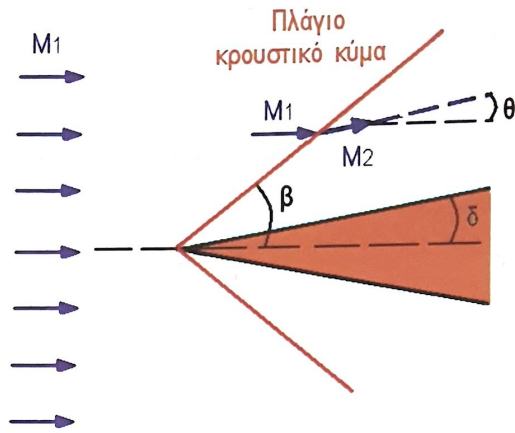
Η γενικότερη μορφή κρουστικού κύματος που εμφανίζεται συχνότερα στις εφαρμογές είναι το πλάγιο κρουστικό κύμα στο οποίο η ταχύτητα μετά το κύμα αλλάζει διεύθυνση. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα πλάγιου κρουστικού κύματος είναι το κύμα που σχηματίζεται στο πρωραίο τμήμα (οξύ) αεροσκαφών που κινούνται με υπερηχητική ταχύτητα $M > 1$. Το κύμα αυτό μπορεί να είναι προσκολλημένο στην αιχμή δηλαδή να αγγίζει την αιχμή της επιφάνειας (attached plane shock) ή αποκολλημένο (detached shock), (Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10: Πλάγια κρουστικά κύματα προκαλούμενα από αιχμηρό αντικείμενο ευρισκόμενο σε υπερηχητική ροή

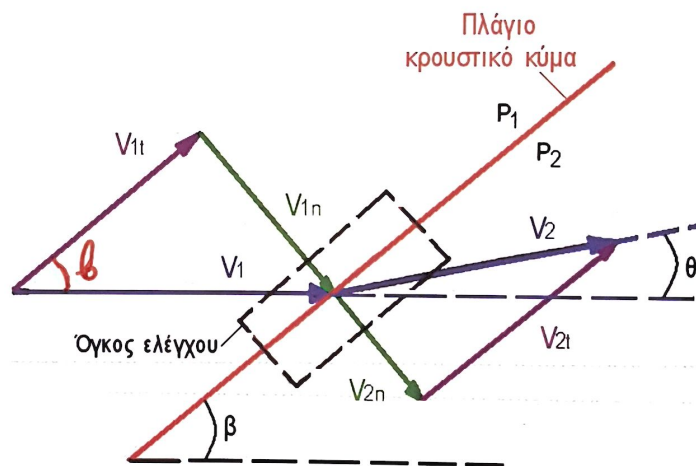
Όπως και στην περίπτωση του κανονικού έτσι και εδώ, πρέπει να λυθεί ένα σύστημα εξισώσεων ώστε να προσδιοριστούν οι ιδιότητες του αερίου μετά το ασθενές κύμα. Στο σύστημα των 7 εξισώσεων προστίθεται και μία που παριστάνει το σχήμα της υπό εξέταση αιχμής.

Έστω μια ομοιόμορφη υπερηχητική ροή ($M_1 > 1$) που αλληλεπιδρά με μια λεπτή, δισδιάστατη σφήνα ημιγωνίας δ θα αναλύσουμε τα ευθύγραμμα πλάγια κρουστικά κύματα, (Σχήμα 3.112). Επειδή σε μια υπερηχητική ροή η πληροφορία για την ύπαρξη της σφήνας δε μπορεί να ταξιδέψει ανάντη, το ρευστό δε «γνωρίζει» για τη σφήνα μέχρι να έρθει σε επαφή με την άκρη της. Σε εκείνο το σημείο και, εφόσον το ρευστό δε μπορεί να κινηθεί μέσω της σφήνας, αλλάζει απότομα πορεία κατά γωνία στροφής ή απόκλισης (εκτροπής) θ .



Σχήμα 3.11: Πλάγια ασυνέχεια γωνίας ασυνέχειας β που σχηματίζεται από μια λεπτή, διδιάστατη σφήνα ημιγωνίας δ . Η ροή εκτρέπεται κατά γωνία απόκλισης θ κατάντη της ασυνέχειας, και ο αριθμός Mach μειώνεται

Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία ενός ευθύγραμμου πλάγιου κύματος κρούσης, που σχηματίζει γωνία ασυνέχειας ή κύματος β , (Σχήμα 3.12). Για να ικανοποιείται η αρχή διατήρησης της μάζας, θα πρέπει να ισχύει: $\beta > \delta$.



Σχήμα 3.12: Διανύσματα ταχύτητας διαμέσου πλάγιας ασυνέχειας γωνίας ασυνέχειας β και γωνίας απόκλισης θ

Στην πραγματικότητα λόγω του πάχους του οριακού στρώματος, η γωνία απόκλισης θ της πλάγιας ασυνέχειας αποδεικνύεται ελαφρώς μεγαλύτερη από την ημιγωνία της σφήνας δ , δηλαδή $\delta > \theta$. Όμως, εάν ο αριθμός Reynolds μιας υπερηχητικής ροής είναι μεγάλος, το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται κατά μήκος της επιφάνειας της σφήνας είναι πολύ λεπτό και το θεωρούμε αμελητέο. Άρα, η ροή στρίβει με τη γωνία της σφήνας δηλαδή, η γωνία απόκλισης θ ισούται με την ημιγωνία σφήνωσης δ , ($\theta = \delta$).

Όπως ειπώθηκε, η πίεση ανακοπής και η ταχύτητα της ροής μειώνονται ενώ η στατική πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα, και η εντροπία αυξάνονται διαμέσου μιας ασυνέχειας. Η αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού κατάντη ενός κύματος κρούσης δημιουργεί προβλήματα μετάδοσης θερμότητας στις ακμές προσβολής των πτερυγών και στους μετωπικούς κώνους των αεροδιαστημικών οχημάτων κατά την επανείσοδό τους στην ατμόσφαιρα.

Όπως και στα κάθετα κρουστικά κύματα, ο αριθμός M μειώνεται διαμέσου ενός πλάγιου κρουστικού κύματος, και η δημιουργία πλάγιων κρουστικών κυμάτων είναι δυνατή μόνον εάν η ανάντη ροή είναι υπερηχητική. Όμως, αντίθετα με τα κάθετα κρουστικά κύματα, στα οποία ο κατάντη αριθμός Mach είναι πάντοτε υποηχητικός, ο M_2 κατάντη ενός πλάγιου κρουστικού κύματος μπορεί να είναι υποηχητικός, ηχητικός, ή υπερηχητικός, ανάλογα του ανάντη αριθμού M_1 και τη γωνία απόκλισης θ .

Στο Σχήμα 3.12 θεωρούμε έναν μικρό όγκο ελέγχου γύρω από το πλάγιο κρουστικό κύμα και αναλύουμε τα διανύσματα της ταχύτητας ανάντη και κατάντη του κρουστικού κύματος σε κάθετες και εφαπτομενικές συνιστώσες. Ανάντη του κρουστικού κύματος, όλες οι ροϊκές ιδιότητες (ταχύτητα, πυκνότητα, πίεση, κ.λπ.) κατά μήκος της κάτω αριστερής επιφάνειας του όγκου ελέγχου είναι ίδιες με εκείνες της πάνω δεξιάς επιφάνειάς του.

Το ίδιο ισχύει και κατάντη του κρουστικού κύματος. Επομένως, οι παροχές μάζας που εισέρχονται και εξέρχονται από τις δύο αυτές επιφάνειες αλληλοαναιρούνται, και η αρχή διατήρησης της μάζας γράφεται:

$$\rho_1 V_{1n} A = \rho_2 V_{2n} A \Rightarrow \underline{\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}} \quad (3-26)$$

όπου A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του όγκου ελέγχου που είναι παράλληλη της ασυνέχειας. Από την εφαρμογή της εφαπτομενική συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής στον όγκο ελέγχου, αποδεικνύεται ότι: $V_{1t} = V_{2t}$, δηλαδή η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας (παράλληλη του πλάγιου κρουστικού κύματος) δεν αλλάζει διαμέσου της ασυνέχειας,

Εάν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στην κάθετη διεύθυνση στο πλάγιο κρουστικό κύμα, οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στον όγκο ελέγχου είναι αυτές της πίεσης:

$$P_1 A - P_2 A = \rho_2 V_{2n} A V_{2n} - \rho_1 V_{1n} A V_{1n} \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2n}^2 - \rho_1 V_{1n}^2 \quad (3-27)$$

Επειδή δεν υπάρχει παραγωγή έργου και μετάδοση θερμότητας προς ή από τον όγκο ελέγχου, η ολική ενθαλπία δεν αλλάζει διαμέσου του πλάγιου κρουστικού κύματος, οπότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει:

$$h_{o1} = h_{o2} \Rightarrow h_{o1} + \frac{1}{2} V_{1n}^2 + \frac{1}{2} V_{1t}^2 = h_{o1} + \frac{1}{2} V_{2n}^2 + \frac{1}{2} V_{2t}^2 \quad \left| \quad \Rightarrow h_{o1} + \frac{1}{2} V_{1n}^2 = h_{o1} + \frac{1}{2} V_{2n}^2 \right. \quad (3-28)$$

$$V_{1t}^2 + \frac{1}{2} V_{2t}^2$$

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής, και της ενέργειας (σχέσεις (3-26) έως (3-28)) διαμέσου ενός πλάγιου κρουστικού κύματος είναι παρόμοιες με εκείνες του κάθετου κρουστικού κύματος, με τη διαφορά ότι γράφονται συναρτήσει μόνο των κάθετων συνιστωσών της ταχύτητας. Επομένως, οι σχέσεις για το κάθετο κύμα κρούσης που προέκυψαν προηγουμένως ισχύουν και για πλάγια κρουστικά κύματα, με τη διαφορά ότι πρέπει να γραφούν συναρτήσει των κάθετων στην πλάγια ασυνέχεια αριθμών Mach M_{1n} , και M_{2n} . Αυτό εξηγείται περιστρέφοντας τα διανύσματα της ταχύτητας του Σχήματος 3.12 κατά γωνία $\pi/2 - \beta$, ώστε το πλάγιο κρουστικό κύμα να φαίνεται κατακόρυφο, (Σχήμα 3.13).

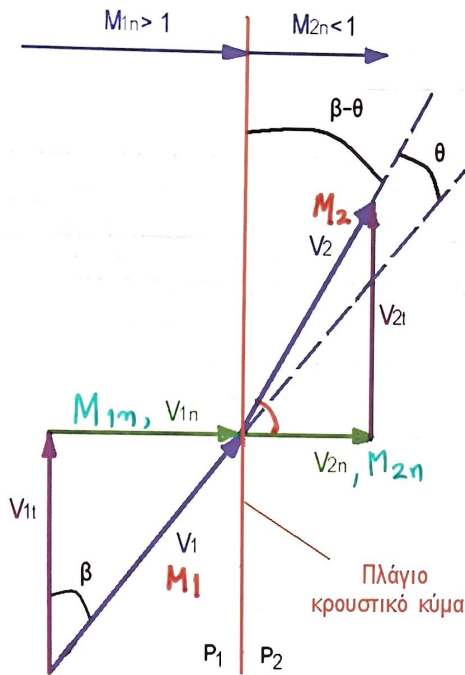
Από το Σχήμα 3.13 προκύπτει:

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta \quad (3-29)$$

$$M_{2n} = M_2 \sin (\beta - \theta) \quad (3-30)$$

όπου $M_{1n} = V_{1n}/c_1$ και $M_{2n} = V_{2n}/c_2$. Στο Σχήμα 3.13, φαίνεται ότι το πλάγιο κρουστικό κύμα μοιάζει με κάθετο κρουστικό κύμα, στο οποίο υπερτίθεται μια επερχόμενη εφαπτομενική ροή. Άρα, όλες οι σχέσεις, και οι πίνακες ιδιοτήτων για τα κάθετα κρουστικά κύματα ισχύουν και για τα πλάγια, αρκεί να χρησιμοποιούνται οι κάθετες συνιστώσες του αριθμού Mach (βλέπε σχέσεις παρακάτω). Μάλιστα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα κάθετα κρουστικά κύματα αποτελούν ειδική περίπτωση των πλάγιων με γωνία ασυνέχειας $\beta = \pi/2$. **Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει ένα πλάγιο κρουστικό κύμα είναι να ισχύει:**

$$M_{1n} > 1 \text{ και } M_{2n} < 1 \quad (3-31)$$



$$\sin \beta = \frac{M_{1n}}{M_1} \Rightarrow M_{1n} = \sin \beta \cdot M_1$$

Σχήμα 3.13: Μετά από περιστροφή κατά γωνία $\pi/2 - \beta$, η πλάγια συνέχεια γίνεται κατακόρυφη

Όταν η γωνία ασυνέχειας β και ο ανάντη αριθμός M_1 είναι δεδομένα, χρησιμοποιούμε αρχικά τη σχέση (3-29) για να υπολογίσουμε τον M_{1n} , και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον Πίνακα 3.1 για τις κάθετες ασυνέχειες (ή τις αντίστοιχες σχέσεις) για να υπολογίσουμε τον M_{2n} . Εάν είναι γνωστή και η γωνία απόκλισης θ , υπολογίζεται από τη σχέση (3-30) ο M_2 .

Όμως συνήθως είναι γνωστή μόνο μία από τις β ή θ , και όχι και τις δύο ταυτόχρονα. Στις περιπτώσεις αυτές θα ήταν χρήσιμη μια σχέση μεταξύ των θ , β , και M . Από το Σχήμα 3.13, προκύπτει:

$$\tan \beta = V_{1n} / V_{1t} \quad (3-32) \quad \tan(\beta - \theta) = V_{2n} / V_{2t} \quad \beta = V_{1n} / V_{1t} \quad (3-33) \quad V_{1t} = V_{2t} \quad (3-34)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (3-29), (3-30) και (3-21) μπορούμε λοιπόν να γράψουμε :

$$\frac{V_{2n}}{V_{1n}} = \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (3-35)$$

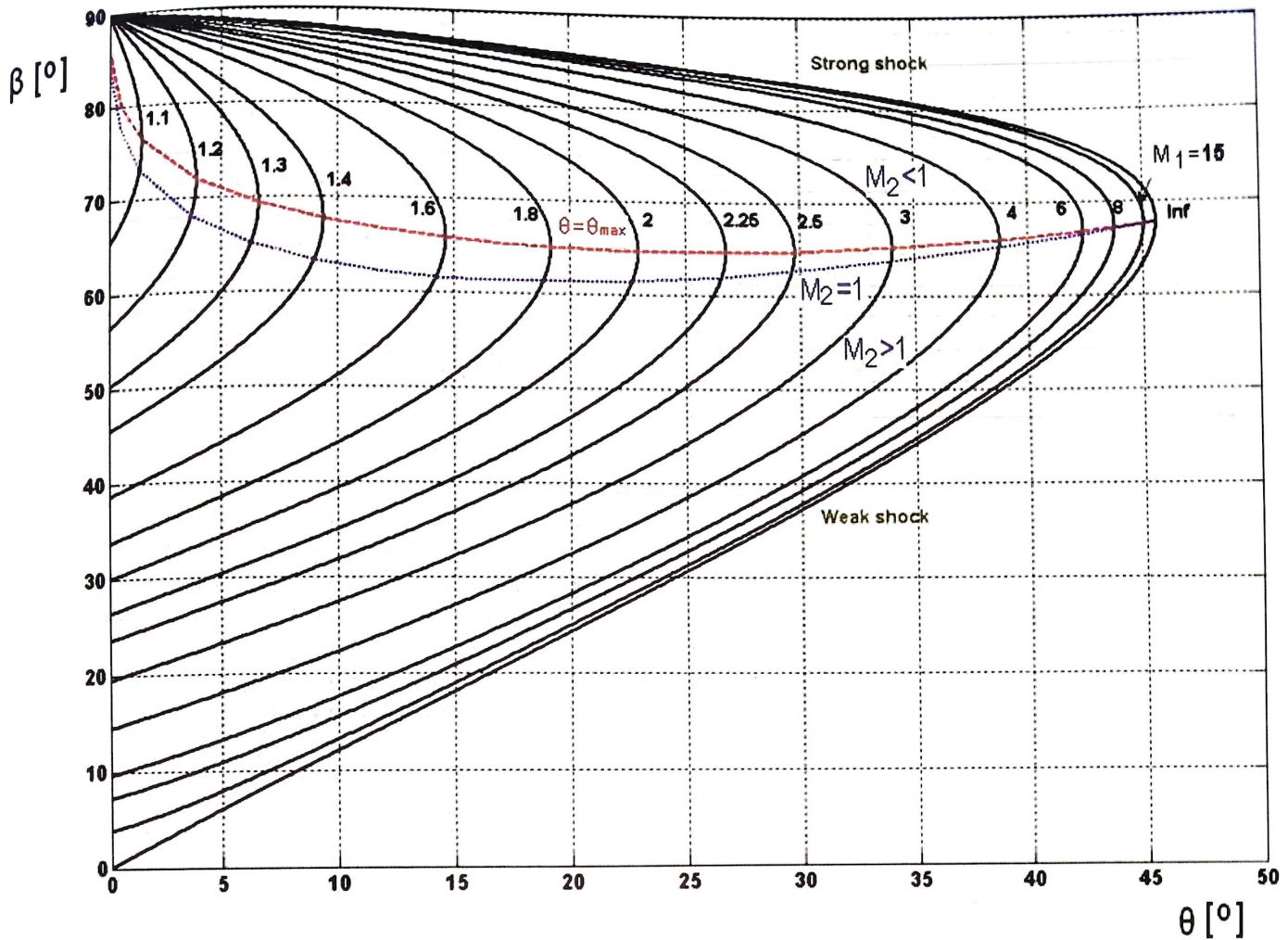
Με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για τα $\cos 2\beta$ και $\tan(\beta - \theta)$, η τελευταία τελικά δίνει:

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (3-36)$$

Η σχέση (3-36) είναι πεπλεγμένη ως προς β , επομένως επιλύεται με επαναληπτικό τρόπο ή με χρήση κάποιου λογισμικού επίλυσης εξισώσεων. Από την άλλη, η σχέση (3-36) αποτελεί μονοσήμαντη συνάρτηση της γωνίας απόκλισης θ ως προς τη γωνία ασυνέχειας β , του λόγου ειδικών θερμοτήτων γ , και του ανάντη αριθμού M_1 . Στο Σχήμα 3.14 σχεδιάζουμε τη θ συναρτήσει της β για αρκετές τιμές του αριθμού M_1 , για αέρα ($\gamma=1.4$).

Από το Σχήμα 3.14 εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

- Το Σχήμα 3.14 απεικονίζει το μεγάλο εύρος των πιθανών κυμάτων κρούσης για γνωστό αριθμό M_1 , από το ασθενέστερο στο ισχυρότερο. Για οποιαδήποτε τιμή του $M_1 > 1$, οι πιθανές τιμές της θ κυμαίνονται από $\theta=0^\circ$ για κάποια τιμή της β μεταξύ 0 και 90° , ως μια μέγιστη τιμή $\theta=\theta_{\max}$ για μια ενδιάμεση τιμή της β , και πάλι πίσω σε $\theta=0^\circ$ για $\beta=90^\circ$. Ευθύγραμμες πλάγιες ασυνέχειες για τιμές των θ και β έξω από το παραπάνω εύρος δεν μπορούν να υπάρξουν και δεν υπάρχουν. Για παράδειγμα, για $M_1=1.6$, ευθύγραμμες πλάγιες ασυνέχειες δε μπορούν να σχηματιστούν για γωνία ασυνέχειας $\beta < 38^\circ$ ή γωνία απόκλισης $\theta > 14^\circ$. Εάν η ημιγωνία σφήνας είναι μεγαλύτερη από θ_{\max} , η ασυνέχεια καμπυλώνεται και αποκολλάται από τη μύτη της σφήνας, σχηματίζοντας μια αποκολλημένη πλάγια ασυνέχεια ή ένα πρωραίο κύμα, (Σχήμα 13.10B). Η γωνία ασυνέχειας β της αποκολλημένης ασυνέχειας είναι 90° στη μύτη της σφήνας, αλλά η β μειώνεται καθώς η ασυνέχεια καμπυλώνεται κατάντη.



Σχήμα 3.14: Εξάρτηση της γωνίας ασυνέχειας β ενός ευθύγραμμου πλάγιου κύματος κρούσης από της γωνίας απόκλισης θ για διάφορες τιμές του ανάντη αριθμού M_1 . Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή ενώνει σημεία μέγιστης γωνίας απόκλισης ($\theta = \theta_{max}$). Οι ασθενείς πλάγιες ασυνέχειες βρίσκονται στα κάτω της παραπάνω γραμμής, ενώ οι ισχυρές πλάγιες ασυνέχειες από πάνω της. Η διακεκομμένη μπλε διακεκομμένη γραμμή ενώνει σημεία ηχητικών κατάντη αριθμών $M_2 = 1$. Κάτω από αυτήν τη γραμμή είναι οι υπερηχητικές κατάντη ροές ($M_2 > 1$), ενώ στα δεξιά της οι υποηχητικές κατάντη ροές ($M_2 < 1$). Οι υπολογισμοί αφορούν ιδανικό αέριο με $\gamma = 1.4$, {Καρτάνος [82]}

- Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζουν οι πλάγιες ασυνέχειες στις αξονοσυμμετρικές ροές γύρω από κώνους, όπως για παράδειγμα στην μύτη αεροσκάφους, παρόλο που η σχέση μεταξύ των θ - β - M για τις αξονοσυμμετρικές ροές διαφέρει τη σχέση (3-36).
- Όταν μια υπερηχητική ροή αλληλεπιδρά με ένα αμβλύ (ή ευρυμέτωπο) σώμα δηλαδή ένα σώμα χωρίς αιχμηρή μύτη, η ημιγωνία σφήνωσης δ στη μύτη είναι 90° και, επομένως, ανεξάρτητα του αριθμού M , δε μπορεί να υπάρξει προσκολλημένη πλάγια ασυνέχεια. Μάλιστα, μπροστά από όλα τα ευρυμέτωπα σώματα σχηματίζεται πάντοτε αποκολλημένη πλάγια ασυνέχεια, ανεξάρτητα από το αν η ροή είναι δισδιάστατη, αξονοσυμμετρική, ή πλήρως τρισδιάστατη
- Η θ αποτελεί μονοσήμαντη συνάρτηση των M_1 και β για γνωστή τιμή του γ , αντίθετα υπάρχουν δύο πιθανές τιμές της β για $\theta < \theta_{max}$. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή του Σχήματος 3.14 περνά από το γεωμετρικό τόπο των τιμών θ_{max} , διαχωρίζοντας τις ασυνέχειες σε ασθενείς πλάγιες ασυνέχειες (η μικρότερη τιμή της β) και ισχυρές πλάγιες ασυνέχειες (ή μεγαλύτερη τιμή της β). Για γνωστή τιμή της θ , οι ασθενείς λύσεις είναι συνθετικές και «προτιμώνται» από τη ροή εκτός κι αν η κατάντη πίεση είναι τόσο μεγάλη που απαιτείται ο σχηματισμός ισχυρής ασυνέχειας.
- Για δεδομένο ανάντη αριθμό M_1 , υπάρχει μοναδική τιμή της θ για την οποία ο κατάντη αριθμός M_2 είναι ακριβώς 1. Η διακεκομμένη μπλε γραμμή του Σχήματος 3.14 περνά από το γεωμετρικό τόπο που αντιστοιχούν σε $M_2 = 1$. Κάτω και πάνω της γραμμής αυτής, είναι $M_2 > 1$ και $M_2 < 1$, αντίστοιχα. Οι κατάντη ηχητικές συνθήκες εμφανίζονται στην πλευρά σχηματισμού των ασθενών ασυνεχειών του διαγράμματος, με θ πολύ κοντά στη θ_{max} . Άρα, η ροή κατάντη μιας ισχυρής πλάγιας ασυνέχειας είναι πάντοτε υποηχητική ($M_2 < 1$). Η ροή κατάντη μιας ασθενούς πλάγιας ασυνέχειας παραμένει υπερηχητική, εκτός από μια πολύ μικρή περιοχή τιμών της θ λίγο κάτω από θ_{max} που είναι υποηχητική, αλλά εξακολουθεί να καλείται ασθενής πλάγια ασυνέχεια.

- Καθώς ο M_1 τείνει στο άπειρο, ο σχηματισμός ευθύγραμμων πλάγιων ασυνεχειών καθίσταται εφικτός για οποιαδήποτε τιμή της β μεταξύ 0 και 90° , αλλά η μέγιστη εφικτή γωνία στροφής για $\gamma=1.4$ (αέρας) είναι $\theta_{\max} \approx 45.6^\circ$ και εμφανίζεται για $\beta=67.8^\circ$. Ο σχηματισμός ευθύγραμμων πλάγιων ασυνεχειών με γωνία στροφής μεγαλύτερη από την παραπάνω τιμή της θ_{\max} είναι ανέφικτος, ανεξάρτητα του M_1 .
- Για δεδομένη τιμή του M_1 , υπάρχουν δύο γωνίες ασυνέχειας για τις οποίες δεν υπάρχει στροφή της ροής ($\theta=0^\circ$): Α. η ισχυρή περίπτωση, $\beta=90^\circ$, αντιστοιχεί στο σχηματισμό κάθετης ασυνέχειας, και Β. η ασθενής περίπτωση, $\beta=\beta_{\min}$, αναπαριστά το σχηματισμό της ασθενέστερης εφικτής πλάγιας ασυνέχειας γι' αυτόν τον αριθμό Mach και καλείται κύμα Mach. Τα κύματα Mach προκαλούνται, π.χ. από πολύ μικρές ανομοιομορφίες των τοιχωμάτων μιας υπερηχητικής αεροσήραγγας. Τα κύματα Mach δεν επηρεάζουν τη ροή, αφού είναι εξαιρετικά ασθενή. Μάλιστα, στην οριακή περίπτωση, τα κύματα Mach είναι ισοτροπικά. Η γωνία ασυνέχειας των κυμάτων Mach αποτελεί μονοσήμαντη συνάρτηση του αριθμού Mach και συμβολίζεται με μ . Η γωνία μ καλείται γωνία Mach και μπορεί να βρεθεί θέτοντας στην σχέση (3-36) τη $\theta=0$, επιλύοντας ως προς $\beta=\mu$, και θεωρώντας τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης. Τελικά παίρνουμε:

$$\mu = \sin^{-1}(1/M_1) \quad (3-37)$$

Επειδή ο λόγος ειδικών θερμοτήτων εμφανίζεται μόνο στον παρανομαστή της σχέσης (3-36) η μ είναι ανεξάρτητη του γ . Άρα, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό Mach οποιασδήποτε υπερηχητικής ροής με απλή μέτρηση της γωνίας Mach και εφαρμογή της σχέσης (3-37).

Στη συνέχεια αναφέρονται μερικές ακόμα εκφράσεις (συναρτήσεις μόνο του M_1) των σχέσεων που εξήχθησαν στην Παράγραφο αυτή και που είναι χρήσιμες στην μελέτη των πλάγιων κρουστικών κυμάτων στις υπερηχητικές εισαγωγές αεροσκαφών.

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1) M_1^2 - 2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)} \quad (3-38) \quad \Rightarrow \quad \tan \delta = 5 \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 2 \cot \beta}{10 + M_1^2 (7 + 5 \cos \beta)} \quad (3-39)$$

$\gamma = 1.75$

$$M_2^2 \sin^2 (\beta - \delta) = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \quad (3-40) \quad \Rightarrow$$

$\gamma = 1.75$

$$\Rightarrow M_2^2 = \frac{36M_1^4 \sin^2 \beta - 5(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)(7M_1^2 \sin^2 \beta + 5)}{(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)(7M_1^2 \sin^2 \beta + 5)} \quad (3-41)$$

$$(3-20B) \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 1 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (3-42) \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{7M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{6} \quad (3-43)$$

$\gamma = 1.75$

$$(3-22B) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \quad (3-44) \quad \Rightarrow$$

$\gamma = 1.75$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{(7M_1^2 \sin^2 \beta - 1)(7M_1^2 \sin^2 \beta + 5)}{36M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (3-45)$$

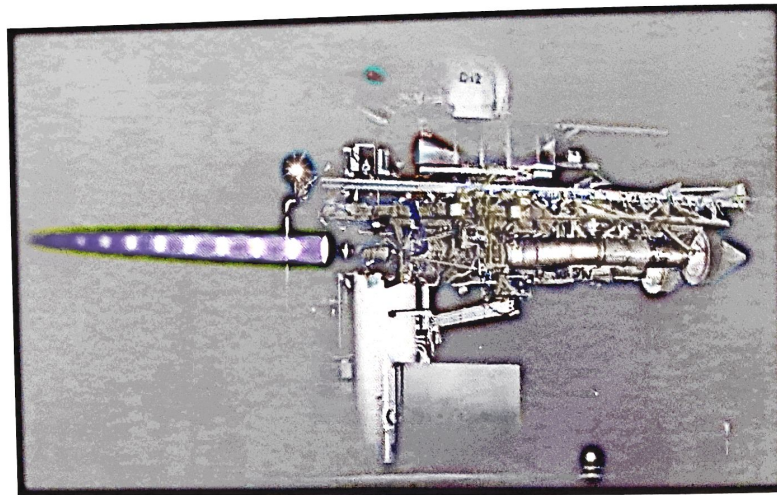
όπου $\nu(M)$ είναι μια γωνία που καλείται και **συνάρτηση Prandtl-Meyer**:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) \tan^{-1} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (3-53)$$

Η $\nu(M)$ είναι γωνία, [°] ή [rad] και η φυσική σημασία της είναι ότι μέσω της γωνίας αυτής πρέπει να αποτονωθεί η ροή, ξεκινώντας από $\nu=0$ για $M=1$, ώστε να φτάσει σε υπερηχητικό αριθμό Mach, $M>1$. Για να βρούμε τον M_2 για γνωστές τιμές των M_1 , γ , και θ , υπολογίζουμε τη $\nu(M_1)$ από τη σχέση (3-53), τη $\nu(M_2)$ από την (3-52), και στη συνέχεια τη $\nu(M_2)$ από την (3-53), προσέχοντας ότι το τελευταίο βήμα απαιτεί την επίλυση μιας πεπλεγμένης εξίσωσης του M_2 .

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει μετάδοση θερμότητας ή μεταφορά έργου, και η ροή μέσω του κύματος αποτόνωσης μπορεί να προσεγγιστεί ως ισεντροπική, οι T_0 και P_0 διατηρούνται σταθερές, και για να υπολογίσουμε τις άλλες ροϊκές ιδιότητες κατόπιν του κύματος αποτόνωσης, όπως οι T_2 , ρ_2 , και P_2 , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις της ισεντροπικής ροής που βρήκαμε προηγουμένως.

Πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις κυμάτων κρούσης και κυμάτων αποτόνωσης, δημιουργούνται στην υπερηχητική ροή δέσμης ενός «υπερεκτονωμένου» ακροφυσίου. Τέτοιου είδους μοτίβα ροής γίνονται ορατά κατά την έξοδο των καυσαερίων από τον κινητήρα ενός αεροσκάφους που χρησιμοποιεί αεριοστρόβιλο με μετάκαυση και ονομάζονται «διαμάντια» ή «ουρά της τίγρης», (Σχήμα 3.16).



Σχήμα 3.16: Σχηματισμός διαμαντιών στην έξοδο αεριοστρόβιλου που λειτουργεί με μετάκαυση

3.3.4 Ροή σε Αγωγούς με Μετάδοση Θερμότητας και χωρίς Τριβή (Ροή Rayleigh)

Οι ροές που αναλύσαμε σε προηγούμενες Παραγράφους ήταν **ισεντροπικές** ροές, (δηλαδή αντιστρεπτές και αδιαβατικές ροές) επειδή δεν περιλαμβάνουν μετάδοση θερμότητας και μη-αντιστρεπτά φαινόμενα ροής (τριβή). Όμως στην πράξη πολλές συμπιεστές ροές περιλαμβάνουν χημικές αντιδράσεις όπως καύση, πυρηνικές αντιδράσεις, εξάτμιση, συμπύκνωση καθώς μετάδοση θερμότητας από και προς τα τοιχώματα του αγωγού. Αυτού του είδους τα προβλήματα ροής είναι δύσκολο να αναλυθούν με ακρίβεια καθώς καθώς μπορεί να περιλαμβάνουν σημαντικές μεταβολές χημικής σύστασης και μετατροπή της λανθάνουσας, χημικής, και πυρηνικής ενέργειας σε θερμική μεταβολές που για παράδειγμα συμβαίνουν στους θαλάμους καύσης αεριοστρόβιλων, πυραύλων και αυλωοθητών.

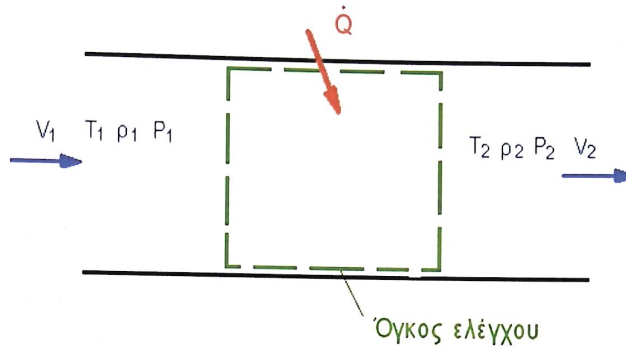
Κρίσιμη παράμετρος σχεδιασμού του θαλάμου καύσης είναι η ροή Rayleigh. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά τέτοιων πολύπλοκων ροών μπορούν να υπολογιστούν με απλή ανάλυση μοντελοποιώντας τη δημιουργία και την απορρόφηση θερμικής ενέργειας ως μετάδοση θερμότητας ίδιου ρυθμού μέσω των τοιχωμάτων του αγωγού και αγνοώντας αλλαγές στη χημική σύσταση της ροής. Ακόμα όμως και το απλοποιημένο πρόβλημα εξακολουθεί να έχει πολύπλοκη ανάλυση αφού η ροή μπορεί να περιλαμβάνει φαινόμενα τριβής, μεταβλητή διατομή αγωγού, και πολυδιάστατα ροϊκά φαινόμενα.

Θεωρώντας ότι ο θάλαμος καύσης έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος του οι κανόνες της ροής Rayleigh βοηθούν ώστε η διεργασία της καύσης εντός του θαλάμου να γίνει βέλτιστη. Το μοντέλο αυτής της

ροής Rayleigh έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- άτριβη ροή,
- μη αδιαβατική ροή,
- ροή σε αγωγό σταθερής διατομής,
- ροή στην οποία προστίθεται θερμότητα,
- η παροχή καυσίμου θεωρείται αμελητέα,
- και ισχύει και για συμπιεσμένες και για ασυμπίεστες ροές.

Θεωρούμε λοιπόν μία ροή μόνιμη, μονοδιάστατη, με σταθερές ειδικές θερμότητες, και αμελητέα τριβής αγνοούμε (ροή Rayleigh), (Σχήμα 3.17).



Σχήμα 3.17: Όγκος ελέγχου για ροή σε αγωγό σταθερής διατομής με μετάδοση θερμότητας και αμελητέα τριβή.

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής, και της ενέργειας για τον όγκο ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.17 γράφονται ως ακολούθως:

Εξίσωση της συνέχειας:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 & \quad \left| \quad \Rightarrow \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \right. & (3-54) \\ A_1 = A_2 & \end{aligned}$$

Εξίσωση της x-ορμής:

Επειδή τα φαινόμενα τριβής είναι αμελητέα, δεν υπάρχουν διατμητικές δυνάμεις και, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές και σωματόδετες δυνάμεις, η εξίσωση της ορμής:

$$(2-123) \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}, \quad \beta \approx 1 \quad (3-55)$$

στην x-κατεύθυνση της ροής εκφυλίζεται στο ισοζύγιο μεταξύ δυνάμεων στατικής πίεσης και μεταφοράς ορμής. Σημειώνοντας ότι μελετάμε τυρβώδεις ροές υψηλής ταχύτητας με αμελητέα τριβή, ο συντελεστής διόρθωσης του ρυθμού ροής της ορμής είναι προσεγγιστικά 1 ($\beta \approx 1$) και, επομένως, μπορεί να αμεληθεί. Τότε:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \Rightarrow \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \Rightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1 \Rightarrow P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3-56)$$

Εξίσωση της ενέργειας:

Ο όγκος ελέγχου δεν περιλαμβάνει διατμητικό, τεχνικό, ή άλλο έργο, και η μεταβολή δυναμικής ενέργειας είναι αμελητέα. Εάν ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας είναι \dot{Q} και η μετάδοση θερμότητας ανά μονάδα μάζας ρευστού είναι $q = \dot{Q} / \dot{m}$, το ισοζύγιο ενέργειας της μόνιμης ροής, θα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{Q} + \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) & \quad \Rightarrow \quad q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} & \Rightarrow \\ \text{Για τέλειο αέριο σταθερών ειδικών θερμοτήτων: } \Delta h = c_p \Delta T & \\ \Rightarrow q = c_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \Rightarrow q = h_{o2} - h_{o1} = c_p (T_{o2} - T_{o1}) & \quad (3-57) \end{aligned}$$

Άρα, στη διάρκεια μιας ροής Rayleigh η ενθαλπία ανακοπής h_o και η θερμοκρασία ανακοπής T_o .

μεταβάλλονται ως εξής:

- όταν θερμότητα μεταδίδεται στο ρευστό και οι δύο αυξάνονται (το q είναι θετικό),
- όταν θερμότητα μεταδίδεται από το ρευστό και οι δύο μειώνονται, (το q είναι αρνητική).

Μεταβολή εντροπίας:

Θεωρώντας αμελητέα τα φαινόμενα τριβής (αντιστρεψιμότητες), η εντροπία ενός συστήματος αλλάζει μόνο εξαιτίας της μετάδοσης θερμότητας ως εξής:

- αυξάνεται με την πρόσδοση θερμότητας, και
- μειώνεται με την απώλεια θερμότητας.

Επειδή η εντροπία είναι ιδιότητα της ροής, αποτελεί καταστατική συνάρτηση, ενώ η μεταβολή της εντροπίας ενός ιδανικού αερίου σταθερών ειδικών θερμοτήτων από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 δίνεται από τη σχέση {Πολυζάκης [86]}:

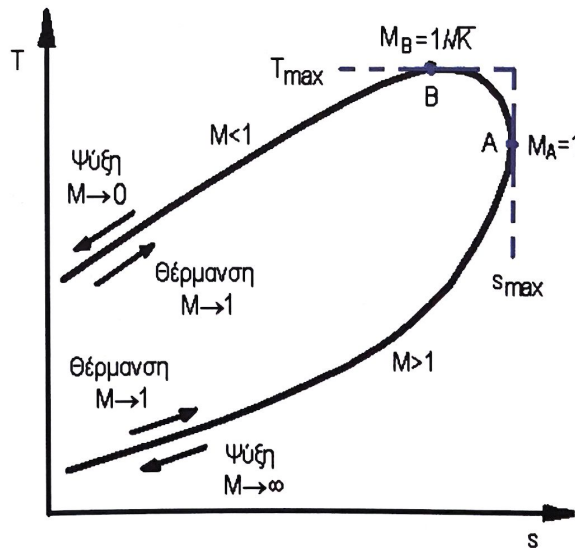
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \tag{3-58}$$

Καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου:

$$R = \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \tag{3-59}$$

Προφανώς, υπάρχει άπειρος αριθμός πιθανών κατάντη καταστάσεων 2 που αντιστοιχούν σε γνωστή ανάντη κατάσταση 1. Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού των κατάντη καταστάσεων είναι η υπόθεση διαφόρων τιμών της T_2 , και ο υπολογισμός των υπόλοιπων ιδιοτήτων συμπεριλαμβανομένης της μετάδοσης θερμότητας q για κάθε T_2 από τις σχέσεις (3-54) ως (3-59).

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.18, η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε ένα διάγραμμα T-s δίνει μια καμπύλη που περνά από τη γνωστή κατάσταση εισόδου.



Σχήμα 3.18: Διάγραμμα T-s για ροή σε αγωγό σταθερής διατομής με μετάδοση θερμότητας και αμελητέα τριβή (ροή Rayleigh)

Η αναπαράσταση της ροής Rayleigh σε διάγραμμα T-s καλείται **γραμμή Rayleigh** βάσει της οποίας αλλά και τα αποτελέσματα των υπολογισμών, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όλες οι καταστάσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας καθώς και τις εκφράσεις των ροϊκών ιδιοτήτων ανήκουν στη γραμμή Rayleigh. Άρα, για μια γνωστή κατάσταση εισόδου (αρχική), δε μπορεί να υπάρξει κατάντη κατάσταση ροής ρευστού εκτός της γραμμής Rayleigh σε διάγραμμα T-s. Επιπρόσθετα, η γραμμή Rayleigh αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των φυσικά εφικτών κατάντη καταστάσεων που αντιστοιχούν σε μια αρχική κατάσταση.
- Με την πρόσδοση θερμότητας η εντροπία αυξάνεται συνεπώς, καθώς στο ρευστό μεταδίδεται θερμότητα.

κινούμαστε προς τα δεξιά πάνω στην καμπύλη. Στο σημείο A ο αριθμός Mach είναι $M=1$, και αποτελεί το σημείο μέγιστης εντροπίας. Οι καταστάσεις ροής που αντιστοιχούν στο άνω τμήμα της γραμμής Rayleigh πάνω από το σημείο A είναι υποηχητικές ενώ, οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στο κάτω τμήμα της καμπύλης, κάτω από το σημείο A, είναι υπερηχητικές. Άρα, ανεξάρτητα της αρχικής τιμής του αριθμού Mach, μια διεργασία κινείται προς τα δεξιά με την προσθήκη θερμότητας και προς τα αριστερά με την αποβολή.

- Στις υποηχητικές ροές η θέρμανση αυξάνει τον αριθμό Mach, ενώ στις υπερηχητικές τον μειώνει. Ο αριθμός Mach της ροής προσεγγίζει την τιμή $M=1$ και στις δύο περιπτώσεις (από 0 στις υποηχητικές και από άπειρο στις υπερηχητικές ροές) στη διάρκεια της θέρμανσης.
- Από το ενεργειακό ισοζύγιο $q = c_p (T_{o2} - T_{o1})$ προκύπτει ότι η θέρμανση αυξάνει την τιμή της θερμοκρασίας ανακοπής T_o και στις υποηχητικές και στις υπερηχητικές ροές, ενώ η ψύξη τη μειώνει. Η μέγιστη τιμή της T_o εμφανίζεται για $M=1$. Το τελευταίο ισχύει και για τη στατική θερμοκρασία εκτός από μια μικρή περιοχή αριθμών Mach $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ της υποηχητικής ροής. Στην υποηχητική ροή, τόσο η θερμοκρασία όσο και ο αριθμός Mach αυξάνονται με τη θέρμανση, αλλά η T φτάνει μια μέγιστη τιμή T_{max} για $M=1/\sqrt{\gamma}$ (που ισούται με 0.845 για αέρα) και στη συνέχεια μειώνεται. Εκ πρώτης όψης φαίνεται παράλογο ενώ προσδίδεται θερμότητα σ' ένα ρευστό η θερμοκρασία του μειώνεται, αλλά αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι σ' αυτήν την περιοχή τιμών παρατηρείται μεγάλη αύξηση της ταχύτητας του ρευστού και η θερμοκρασία μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $T_o = T + V^2/2c_p$. Παρατηρείστε ακόμα ότι, η αποβολή θερμότητας στο διάστημα $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού.
- Από την εξίσωση της ορμής $P + KV = \text{σταθερό}$, όπου $K = \rho V = \text{σταθερό}$ (από την εξίσωση της συνέχειας), προκύπτει ότι η ταχύτητα και η στατική πίεση παρουσιάζουν αντίθετες τάσεις. Άρα, με την πρόσδοση θερμότητας, η στατική πίεση μειώνεται στην υποηχητική (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach αυξάνονται) και αυξάνεται στην υπερηχητική ροή (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach μειώνονται).
- Από την εξίσωση της συνέχειας $\rho V = \text{σταθερό}$ προκύπτει ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα, η πυκνότητα μειώνεται με τη μετάδοση θερμότητας στο ρευστό στην υποηχητική ροή (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach αυξάνονται), και αυξάνεται με την πρόσδοση θερμότητας στην υπερηχητική (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach μειώνονται).
- Στο αριστερό μισό του Σχήματος 3.18, το κάτω τμήμα της γραμμής Rayleigh είναι πιο απότομο από το πάνω τμήμα (s συναρτήσε του T). Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της εντροπίας που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη αλλαγή θερμοκρασίας (και, άρα, σε συγκεκριμένη μετάδοση θερμότητας) είναι μεγαλύτερη στην υπερηχητική ροή.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται συνοπτικά και κωδικοποιημένα τα αποτελέσματα της θέρμανσης και της ψύξης στις ιδιότητες της ροής Rayleigh. Από τον Πίνακα 3.2 προκύπτουν τα εξής επιπλέον συμπεράσματα:

- Η θέρμανση και η ψύξη έχουν αντίθετο αποτέλεσμα στις περισσότερες ροϊκές ιδιότητες.
- Η πίεση ανακοπής μειώνεται με τη θέρμανση και αυξάνεται με τη ψύξη ανεξάρτητα αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική.

Πίνακα 3.2: Η επίδραση της θέρμανσης και της ψύξης στις ιδιότητες της ροής Rayleigh.

Ιδιότητα	Θέρμανση		Ψύξη	
	Υποηχητική ροή	Υπερηχητική ροή	Υποηχητική ροή	Υπερηχητική ροή
V	↑	↓	↓	↑
M	↑	↓	↓	↑
T_o	↑	↑	↓	↓
T	↑ για $M < 1/\gamma^{1/2}$ ↓ για $M > 1/\gamma^{1/2}$	↑	↓ για $M < 1/\gamma^{1/2}$ ↑ για $M > 1/\gamma^{1/2}$	↓
ρ	↓	↑	↑	↓
P_o	↓	↓	↑	↓
P	↓	↑	↑	↓
s	↑	↑	↓	↓

Σχέσεις ιδιοτήτων ροής Rayleigh

Οι ιδιότητες της ροής στην ηχητική κατάσταση είναι συνήθως εύκολο να υπολογιστούν γι' αυτό η κρίσιμη κατάσταση που αντιστοιχεί σε $M=1$ χρησιμοποιείται ως σύνθηρες σημείο αναφοράς στις συμπιεστές ροές. Όπου κατάσταση που αντιστοιχεί σε $M=1$ χρησιμοποιείται ως σύνθηρες σημείο αναφοράς στις συμπιεστές ροές. Όπου κατάσταση που αντιστοιχεί σε $M=1$ χρησιμοποιείται ως σύνθηρες σημείο αναφοράς στις συμπιεστές ροές. Όπου υπάρχει ο αστερίσκος (*) είναι οι ιδιότητες στραγγαλισμού, δηλαδή τα σημεία όπου η ροή γίνεται ηχητική

($M=1$). Η κατάσταση 1 είναι μια τυχαία κατάσταση, οι σχέσεις για τις ιδιότητες της ροής αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(\gamma+1)M^2 [2 + (\gamma-1)M^2]}{(1 + \gamma M^2)^2} \quad (3-60)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3-61)$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{M(1+\gamma)}{1+\gamma M^2} \right]^2 \quad (3-62)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad (3-63)$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(\gamma+1)M^2}{1+\gamma M^2} \quad (3-64)$$

Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται διάφοροι λόγοι ροϊκών ιδιοτήτων διαμέσου ασυνεπειών για ιδανικά αέρια με $\gamma=1.4$.

Πίνακας 3.3: Ροϊκές συναρτήσεις Rayleigh ιδανικού αερίου με $\gamma=1.4$, [Cengel [93]]

M	To/To*	Po/Po*	T/T*	P/P*	V/V*
0.0	0.0000	1.2679	0.0000	2.4000	0.0000
0.1	0.0468	1.2591	0.0560	2.3669	0.0237
0.2	0.1736	1.2346	0.2066	2.2727	0.0909
0.3	0.3469	1.1985	0.4089	2.1314	0.1918
0.4	0.5290	1.1566	0.6151	1.9608	0.3137
0.5	0.6914	1.1141	0.7901	1.7778	0.4444
0.6	0.8189	1.0753	0.9167	1.5957	0.5745
0.7	0.9085	1.0431	0.9929	1.4235	0.6975
0.8	0.9639	1.0193	1.0255	1.2658	0.8101
0.9	0.9921	1.0049	1.0245	1.1246	0.9110
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.2	0.9787	1.0194	0.9118	0.7958	1.1459
1.4	0.9343	1.0777	0.8054	0.6410	1.2564
1.6	0.8842	1.1756	0.7017	0.5236	1.3403
1.8	0.8363	1.3159	0.6089	0.4335	1.4046
2.0	0.7934	1.5031	0.5289	0.3636	1.4545
2.2	0.7561	1.7434	0.4611	0.3086	1.4938
2.4	0.7242	2.0451	0.4038	0.2648	1.5252
2.6	0.6970	2.4177	0.3556	0.2294	1.5505
2.8	0.6738	2.8731	0.3149	0.2004	1.5711
3.0	0.6540	3.4245	0.2803	0.1765	1.5882

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις συντάσσεται το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.19), όπου παρατηρείται πως ότι ταχύτητα και να έχει το ρευστό ο ολική πίεση θα μειώνεται και η ολική θερμοκρασία θα αυξάνεται με την προσθήκη θερμότητας.