Αρχές Φυσικής ΑΠ – Διάλεξη 7 **Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο**

Ρυθμός διάσπασης **Σητεία, 22/11/2022**

0. Το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων ενός δείγματος διαρκώς ελαττώνεται. Κάθε πυρήνας έχει έναν αναμενόμενο μέσο χρόνο ζωής τ. Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πότε θα διασπαστεί, μπορούμε μόνο να υπολογίσουμε την πιθανότητα να διασπαστεί μέσα στο επόμενο δευτερόλεπτο ή την επόμενη ώρα ή την επόμενη ημέρα. Το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο όταν έχουμε ένα μεγάλο αριθμό ραδιενεργών πυρήνων, της τάξης ας πούμε του 10^{23}. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε έναν αριθμό ραδιενεργών πυρήνων N_0 της παραπάνω τάξης μεγέθους. Τότε όπως αποδεικνύεται το πλήθος τους $N(t)$ μετά από χρόνο t περιγράφεται από την συνάρτηση,

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

όπου λ είναι μία σταθερά η οποία είναι χαρακτηριστικό του πυρήνα και ονομάζεται σταθερά διάσπασης. Στην ουσία η σταθερά διάσπασης είναι το αντίστροφο του μέσου χρόνου ζωής ενός πυρήνα,

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι εκθετική και όπως έχουμε δει στο μάθημα των Μαθηματικών είναι φθίνουσα.

Η ενεργότητα του δείγματος είναι ο ρυθμός με τον οποίο διασπώνται οι ραδιενεργοί πυρήνες και συμβολίζεται με R. Επειδή η ενεργότητα δεν είναι σταθερή, γιατί το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων συνεχώς φθίνει, εξαρτάται από τον χρόνο t και συνεπώς είναι μία συνάρτηση του χρόνου. Αποδεικνύεται ότι

$$R(t) = \lambda \cdot N(t)$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned} R(t) &= \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ &= R(0) \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Συνήθως την ενεργότητα του δείγματος την χρονική στιγμή $t = 0$ την συμβολίζουμε με R_0 και έτσι έχουμε τον τύπο,

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Χρόνος υποδιπλασιασμού ή χρόνος ημιζωής $T_{1/2}$ ονομάζουμε τον χρόνο που χρειάζεται για να μειωθούν οι πυρήνες ενός δείγματος στο μισό των αρχικών πυρήνων και όπως έχουμε υπολογίσει στα Μαθηματικά, ισχύει η σχέση

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

1. Η ενεργότητα ενός δείγματος του ραδιενεργού ισοτόπου ^{57}Co είναι ίση με $R_0 = 100$Bq. Πόσοι ραδιενεργοί πυρήνες ^{57}Co θα έχουν διασπαστεί μετά από ένα μήνα σ' αυτό το δείγμα. Δίνεται ότι η σταθερά διάσπασης για το ^{57}Co είναι $\lambda = 2{,}95 \cdot 10^{-8}$s^{-1}.

Απάντηση. Το αρχικό πλήθος των πυρήνων θα είναι ,

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{R_0}{\lambda} \\ &= \frac{100}{2{,}95 \cdot 10^{-8}} \\ &= 33{,}8983 \cdot 10^{8} \\ &= 3{,}38983 \cdot 10^{9} \end{aligned}$$

Μετά από ένα μήνα $t = 1$month θα έχουν μείνει ραδιενεργοί πυρήνες,

$$N(1\text{month}) = 3{,}38983 \cdot 10^{9} \cdot e^{-\lambda \cdot 1(\text{month})}$$

όμως επειδή η σταθερά διάσπασης είναι σε s^{-1} θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρονικό διάστημα $t = 1$month σε δευτερόλεπτα,

$$\begin{aligned} t &= 30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \\ &= 2592000 \\ &= 2{,}592 \cdot 10^{6}\text{s} \end{aligned}$$

Τώρα αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} N(1\text{month}) &= 3{,}39 \cdot 10^{9} \cdot e^{-2{,}95 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}592 \cdot 10^{6}} \\ &= 3{,}38983 \cdot 10^{9} \cdot e^{-7{,}6464 \cdot 10^{-2}} \\ &= 3{,}38983 \cdot 10^{9} \cdot e^{-0{,}076464} \\ &= 3{,}38983 \cdot 10^{9} \cdot 0{,}92638 \\ &= 3{,}14027 \cdot 10^{9} \end{aligned}$$

Συνεπώς οι πυρήνες που θα έχουν διασπαστεί θα είναι

$$\begin{aligned} N_0 - N(1\text{month}) &= 3{,}38983 \cdot 10^{9} - 3{,}14027 \cdot 10^{9} \\ &= 0{,}24956 \cdot 10^{9} \\ &= 2{,}50 \cdot 10^{8} \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε μετατρέποντας στην αρχή την σταθερά λ σε μονάδες months^{-1}. Για να το πετύχουμε αυτό μετατρέπουμε απλούστερα την σταθερά $1/\lambda$ από μονάδες s που μας δίνεται, σε μονάδες months διαιρώντας με $30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ και στην συνέχεια αντιστρέφοντας έχουμε την σταθερά λ σε μονάδες months.

2. Το τρίτιο ^{3}H είναι ένα ραδιενεργό ισότοπο του υδρογόνου, που υπάρχει στη φύση σε πολύ μικρές ποσότητες. Διασπάται με β^{-} διάσπαση και έχει χρόνο ημιζωής $T_{1/2} = 12{,}32$y. Αν στο νερό του οργανισμού ενός ανθρώπου υπάρχει ένα άτομο ^{3}H για κάθε 10^{18} άτομα H και η συνολική μάζα νερού του ανθρώπου αυτού είναι $m = 50$ kg, να βρεθεί πόση είναι η ενεργότητα του ανθρώπου αυτού λόγω του ^{3}H που βρίσκεται στο νερό του σώματός του.

Δίνεται ότι 1mole H_2O έχει μάζα 18g

Απάντηση. Αρχικά θα υπολογίσουμε το πλήθος α των μορίων του νερού που υπάρχουν στο σώμα του ανθρώπου:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{50000}{18} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} \\
&= 1{,}673 \cdot 10^{27}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς το πλήθος των ατόμων του υδρογόνου θα είναι 2α γιατί σε κάθε μόριο νερού έχουμε δύο άτομα υδρογόνου,

$$2\alpha = 3{,}346 \cdot 10^{27}$$

Το πλήθος λοιπόν N των ατόμων του ^{3}H θα είναι,

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{2a}{10^{18}} \\
&= \frac{3{,}346 \cdot 10^{27}}{10^{18}} \\
&= 3{,}346 \cdot 10^{9}
\end{aligned}
$$

και η ενεργότητα θα είναι,

$$
\begin{aligned}
R &= \lambda \cdot N \\
&= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N
\end{aligned}
$$

Για να βρούμε την ενεργότητα σε Bq θα πρέπει να μετατρέψουμε τον χρόνο ημιζωής σε s. Έτσι θα έχουμε,

$$
\begin{aligned}
T_{1/2} &= 12{,}32 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \\
&= 388523520 \\
&= 3{,}8852352 \cdot 10^{8}\text{s}
\end{aligned}
$$

και παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \\
&= \frac{0{,}693}{3{,}8852352 \cdot 10^{8}} \cdot 3{,}346 \cdot 109 \\
&= 6\text{Bq}
\end{aligned}
$$

3. Μετά την ξαφνική απελευθέρωση ραδιενέργειας από το ατύχημα στον πυρηνικό αντιδραστήρα στο Chernobyl το 1986, η ραδιενέργεια του γάλακτος στην Πολωνία μετρήθηκε και ήταν $2{,}0 \cdot 10^3$Bq ανά λίτρο, λόγω της παρουσίας ραδιενεργού ^{131}I στο γρασίδι που καταναλωνόταν από βοοειδή γαλακτοπαραγωγής. Το ^{131}I έχει χρόνο ημιζωής 8 ημέρες και είναι ιδιαίτερα επικίνδυνο επειδή συγκεντρώνεται στον θυρεοειδή αδένα. Βασιζόμενοι στα δεδομένα αυτά, απαντήστε στα παρακάτω δυο ερωτήματα: Να υπολογίσετε την ενεργότητα του ^{131}I ανά λίτρο στο γάλα ένα μήνα μετά την ημέρα του ατυχήματος. Να υπολογίσετε πόσους πυρήνες περιέχει κάθε λίτρο γάλακτος αρχικά και πόσους ένα μήνα μετά.

Απάντηση. Η σχέση που συνδέει την ενεργότητα με τον χρόνο είναι,

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

και έχουμε,

$$R(1\text{month}) = 2000 \cdot e^{-\lambda \cdot (1\text{month})}$$

Η σταθερά λ θα είναι,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ &= \frac{0{,}693}{8} \\ &= 0{,}0866\text{d}^{-1} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} R(1\text{month}) &= 2000 \cdot e^{-0{,}0866 \cdot 30} \\ &= 2000 \cdot e^{-2{,}599} \\ &= 2000 \cdot 0{,}07434 \\ &= 150\text{Bq} \end{aligned}$$

Εφόσον γνωρίζουμε την ενεργότητα και την σταθερά διάσπασης μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των πυρήνων,

$$R(t) = \lambda \cdot N(t)$$

και για την χρονική στιγμή της μέτρησης (δηλαδή την χρονική στιγμή $t = 0$) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{R_0}{\lambda} \\ &= \frac{2000}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} \\ &= \frac{2000 \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \\ &= \frac{2000}{0{,}693} \cdot 8 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \\ &= 1{,}994805 \cdot 10^9 \\ &= 2{,}0 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

και μετά από ένα μήνα,

$$
\begin{aligned}
N(1\text{month}) &= \frac{R(1\text{month})}{\lambda} \\
&= \frac{148{,}68}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} \\
&= \frac{148{,}68 \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \\
&= 1{,}5 \cdot 10^8
\end{aligned}
$$

4. Το ραδιενεργό ισότοπο του σιδήρου ^{52}Fe χρησιμοποιείται ως ιχνηθέτης για τη διάγνωση καρκίνου στο αίμα. Μετά τη χορήγηση στον ασθενή μιας αρχικής δόσης, το ^{52}Fe διασπάται δίνοντας ακτινοβολία β^+. Η σταθερά διάσπασης λ του ^{52}Fe είναι 2,327·10^{-5}s^{-1}. Με βάση αυτά τα δεδομένα, να υπολογίσετε μετά από πόσες ώρες από τη χορήγηση του ιχνηθέτη, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία από το ^{52}Fe που θα παραμένει ακόμη στο σώμα του ασθενούς θα έχει μειωθεί στο ένα δέκατο ($1/10$) της ακτινοβολίας που υπήρχε τη στιγμή που του χορηγήθηκε η δόση του.

[Παρατήρηση: Εάν ο χρόνος υπολογιστεί αρχικά σε s, θα πρέπει στο τέλος να μετατραπεί σε ώρες (h), ώστε να απαντηθεί πλήρως το ερώτημα].

Απάντηση. Κάντε τις πράξεις λύνοντας την εξίσωση,

$$\frac{R_0}{10} = R_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

και στην συνέχεια μην ξεχάσετε να μετατρέψετε το αποτέλεσμα σε ώρες διαιρώντας με $60 \cdot 60$.