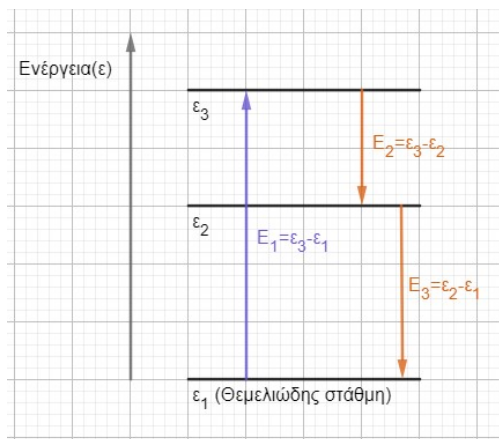


Φθορισμός, παραγωγή ακτινών X

Σητεία, 13/12/2022

0. Φθορισμός ονομάζεται το φαινόμενο στο οποίο ένα άτομο ή μόριο διεγείρεται απορροφώντας ένα φωτόνιο από την υπεριώδη περιοχή του φάσματος και στην συνέχεια επιστρέφει στην θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας δύο ή περισσότερα φωτόνια μικρότερης ενέργειας τα οποία συνήθως βρίσκονται στην περιοχή του ορατού μέρους του φάσματος. Το πιο απλό παράδειγμα μπορεί να παρασταθεί με το παρακάτω σχήμα



Το άτομο ή μόριο απορροφά ένα φωτόνιο ενέργειας $E_1 = \epsilon_3 - \epsilon_1 = hf_1$ και επιστρέφοντας στην θεμελιώδη κατάσταση εκπέμπει δύο φωτόνια ενέργειας $E_2 = \epsilon_3 - \epsilon_2 = hf_2$ και $E_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1 = hf_3$. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$E_1 = E_2 + E_3$$

από την οποία μπορούμε να συσχετίσουμε τις συχνότητες,

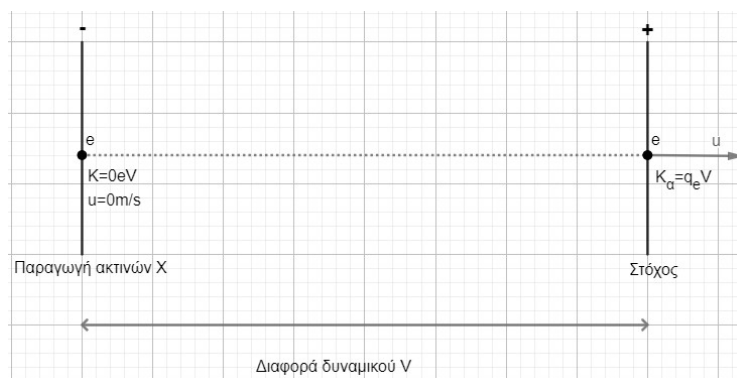
$$f_1 = f_2 + f_3$$

και τα μήκη κύματος των φωτονίων

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}$$

χρησιμοποιώντας τον τύπο της κυματικής, $c = \lambda f$.

Για την παραγωγή ακτινών X επιταχύνουμε ηλεκτρόνια μεταξύ δύο μεταλλικών πλάκων, με την βοήθεια ενός ηλεκτρικού πεδίου, οι οποίες έχουν διαφορά δυναμικού V μεταξύ τους.



Όταν ένα ηλεκτρόνιο φτάσει στον στόχο θα έχει αρχική κινητική ενέργεια

$$K_{\alpha} = q_e V$$

και μετά την αλληλεπίδραση του με τα άτομα του στόχου μπορεί να έχει οποιαδήποτε κινητική ενέργεια K_{τ} . Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια E του εκπεμπόμενου φωτονίου είναι ίση με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου, τότε θα έχουμε την εξίσωση

$$E = hf = K_{\alpha} - K_{\tau}$$

Αυτή η ενέργεια γίνεται μέγιστη όταν το ηλεκτρόνιο χάσει όλη του την κινητική ενέργεια, δηλαδή όταν $K_{\tau} = 0\text{eV}$,

$$E_{\max} = K_{\alpha} = q_e V$$

και έτσι έχουμε μία μέγιστη συχνότητα f_{\max}

$$f_{\max} = \frac{q_e V}{h}$$

και ένα ελάχιστο μήκος κύματος λ_{\min}

$$\lambda_{\min} = \frac{c \cdot h}{q_e V}$$

Θυμηθείτε ότι το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας.

1. Για να εντοπίσουμε τις περιοχές στο ορατό μέρος του φάσματος που φθορίζει μία χημική ένωση χρησιμοποιούμε ένα οπτικό φράγμα με $500\gamma\rho/\text{mm}$ και μετράμε τις ακόλουθες γωνίες

$$14,7^{\circ}, 15,4^{\circ}, 30,5^{\circ}, 32,2^{\circ}, 49,6^{\circ}, 53^{\circ}$$

Να βρεθούν τα μήκη κύματος στην περιοχή του ορατού που φθορίζει η συγκεκριμένη χημική ένωση.

Απάντηση. Αρχικά παρατηρούμε ότι έχουμε ζευγάρια μεγίστων (ή κορυφών ή φωτεινών κροσσών συμβολής) και συνεπώς δύο μήκη κύματος λ_1, λ_2 συνθέτουν το φως που περιθλάται,

	λ_1	λ_2
$m = 1$	$14,7^{\circ}$	$15,4^{\circ}$
$m = 2$	$30,5^{\circ}$	$32,2^{\circ}$
$m = 3$	$49,6^{\circ}$	53°

Επίσης από τον τύπο του φράγματος

$$d \cdot \eta\mu\theta = m \cdot \lambda$$

μπορούμε για κάθε τάξη περίθλασης m να εκτιμήσουμε τα μήκη κύματος λ_1 και λ_2 . Το μόνο που μας λείπει είναι η σταθερά d του φράγματος την οποία όμως μπορούμε να υπολογίσουμε,

$$\begin{aligned} d &= \frac{10^6}{500\gamma\rho/\text{mm}} \\ &= 2000\text{nm} \end{aligned}$$

Έτσι για $m = 1$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2000 \cdot \eta\mu 14,7^{\circ} \\ &= 507,5\text{nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 2000 \cdot \eta\mu 15,4^\circ \\ &= 531,1\text{nm}\end{aligned}$$

Αυτές είναι οι δύο πρώτες εκτιμήσεις για τα μήκη κύματος. Επειδή όμως έχουμε τις γωνίες και για δύο ακόμη τάξεις θα τις χρησιμοποιήσουμε και στο τέλος θα κρατήσουμε την μέση τιμή ως βέλτιστη εκτίμηση.

Για $m = 2$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2000 \cdot \eta\mu 30,5^\circ}{2} \\ &= 507,5\text{nm} \\ \lambda_2 &= \frac{2000 \cdot \eta\mu 32,2^\circ}{2} \\ &= 532,9\text{nm}\end{aligned}$$

Και για $m = 3$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2000 \cdot \eta\mu 49,6^\circ}{3} \\ &= 507,7\text{nm} \\ \lambda_2 &= \frac{2000 \cdot \eta\mu 53^\circ}{3} \\ &= 532,4\text{nm}\end{aligned}$$

Η μέση τιμή τους θα είναι,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \frac{507,5 + 507,5 + 507,7}{3} = 507,6\text{nm} \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{531,1 + 532,9 + 532,4}{3} = 532,1\text{nm}\end{aligned}$$

και έχουμε τελειώσει.

2. Για την παραγωγή ακτινών X επιταχύνουμε ηλεκτρόνια μεταξύ δύο μεταλλικών πλακών που έχουν διαφορά δυναμικού $V = 10^5\text{V}$.

A. Να υπολογιστεί το ελάχιστο μήκος κύματος λ_{\min} των ακτινών X .

B. Ποια θα πρέπει να είναι η διαφορά δυναμικού για να έχουμε $\lambda_{\min} = 154\text{pm}$;

Απάντηση.

A. Από τον τύπο

$$\lambda_{\min} = \frac{c \cdot h}{q_e V}$$

απλά αντικαθιστούμε και βρίσκουμε,

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5} \\ &= 1,24 \cdot 10^{-11}\text{m} \\ &= 12,4\text{pm}\end{aligned}$$

B. Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς την διαφορά δυναμικού V ,

$$V = \frac{c \cdot h}{q_e \lambda_{\min}}$$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε,

$$V = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 154 \cdot 10^{-12}} \\ = 8060V$$

3. Ένα ηλεκτρόνιο σε σωλήνα παραγωγής ακτινών X που λειτουργεί με διαφορά δυναμικού $V = 10^4V$ χάνει την μισή κινητική του ενέργεια κατά την αλληλεπίδραση του με τον στόχο με αποτέλεσμα την εκπομπή ενός φωτονίου πέδησης. Αν δεχτούμε ότι η ενέργεια του φωτονίου πέδησης είναι ίση με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου, να υπολογιστεί το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου φωτονίου.

Απάντηση. Για την ενέργεια του φωτονίου θα ισχύει,

$$E = K_{\alpha} - K_{\tau} \\ = K_{\alpha} - \frac{K_{\alpha}}{2} \\ = \frac{K_{\alpha}}{2}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$K_{\alpha} = q_e V$$

και

$$E = h \frac{c}{\lambda}$$

και αντικαθιστώντας παίρνουμε την σχέση

$$h \frac{c}{\lambda} = q_e V$$

την οποία λύνουμε ως προς το μήκος κύματος λ ,

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{q_e \cdot V}$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε τελικά,

$$\lambda = 248\text{nm}$$

4. Να υπολογιστεί το δυναμικό επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων σε σωλήνα παραγωγής ακτινών X ώστε να έχουμε $\lambda_{\min} = 0,1\text{nm}$. Αν υποθέσουμε ότι ένας κρύσταλλος παίζει τον ρόλο οπτικού φράγματος με σταθερά $d = 150\text{nm}$, πόσες τάξεις περίθλασης θα έχουμε για το συγκεκριμένο μήκος κύματος;

Απάντηση. Αρχικά το δυναμικό επιτάχυνσης το υπολογίζουμε από την εξίσωση

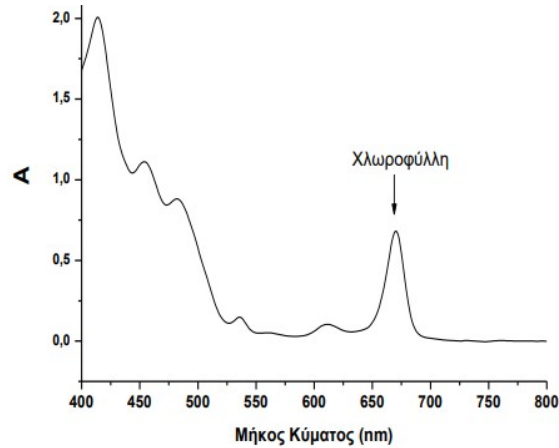
$$V = \frac{c \cdot h}{q_e \lambda_{\min}}$$

και στην συνέχεια από την συνθήκη

$$\frac{m \cdot \lambda}{d} < 1$$

βρίσκουμε ότι $m < 2$ και συνεπώς θα έχουμε μόνο πρώτης τάξης μέγιστα.

5. Με την βοήθεια του παρακάτω γραφήματος να υπολογίσετε την ενέργεια που αντιστοιχεί στην μεταπήδηση από την απορρόφηση ενός φωτονίου με μήκος κύματος της πρώτης κορυφής στο φάσμα απορρόφησης του ελαιολάδου.



Απάντηση. Το μήκος κύματος στην πρώτη κορυφή είναι περίπου $\lambda = 412,5\text{nm}$ και συνεπώς το μόριο που απορροφά αυτό το φωτόνιο μεταπηδάει σε μία διεγερμένη κατάσταση η οποία έχει διαφορά ενέργειας

$$E = h \frac{c}{\lambda}$$

με την θεμελιώδη. Κάνουμε τις πράξεις και βρίσκουμε περίπου 3eV.