

Ψηφιακή Επεξεργασία Ήχου

Μάθημα 2: Σήματα και Συστήματα

Π.Μ.Σ. «Τεχνολογίες Ήχου και Μουσικής»

Δρ. Χρυσούλα Αλεξανδράκη

Τμήμα Μουσικής Τεχνολογία και Ακουστικής

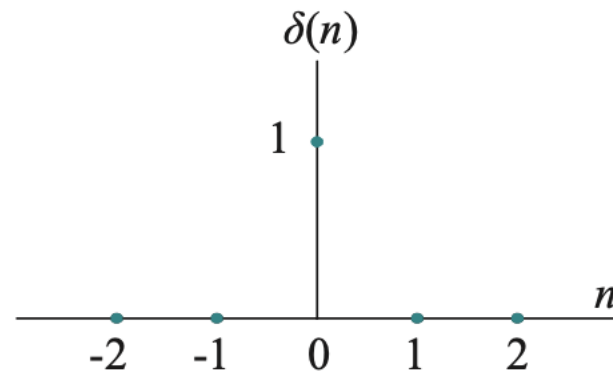
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

1. Κρουστική Ακολουθία
2. Βηματική Ακολουθία
3. Σταθερή ακολουθία
4. Γραμμική Ακολουθία
5. Εκθετική Ακολουθία

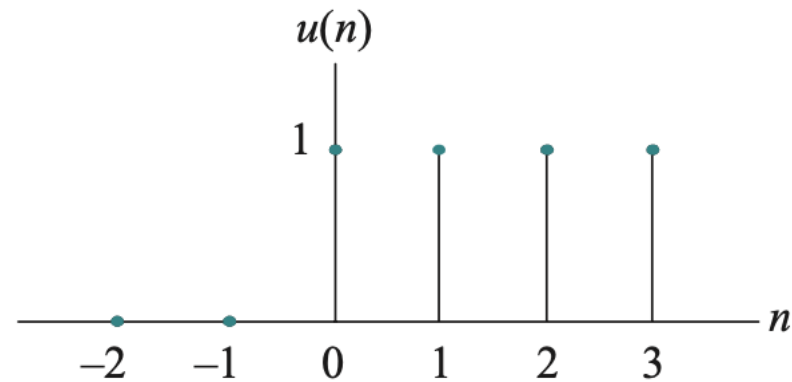
Κρουστική Ακολουθία (Unit Impulse)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



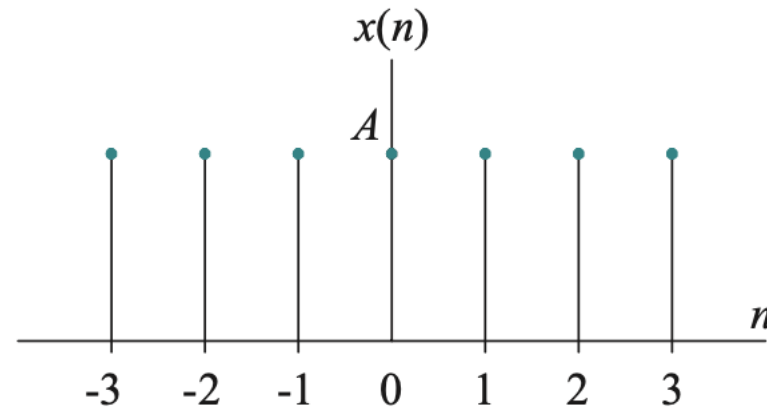
Βηματική Ακολουθία (Unit Step Sequence)

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



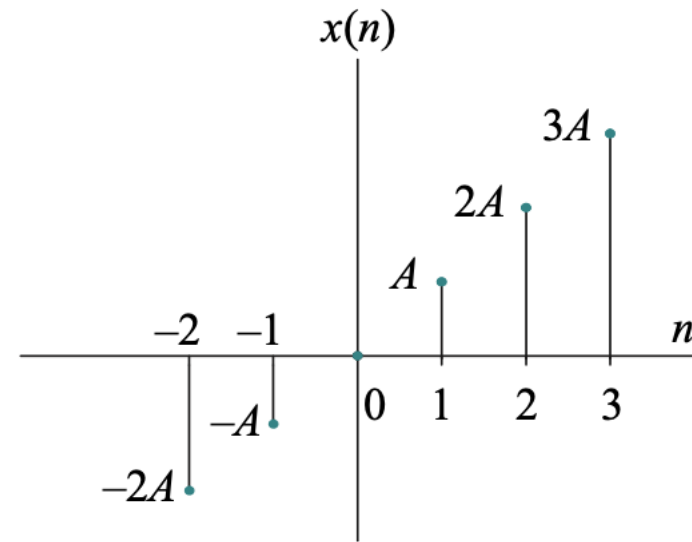
Σταθερή Ακολουθία (Constant Sequence)

$$x(n) = A, \quad -\infty < n < \infty$$



Γραμμική Ακολουθία (Linear Sequence)

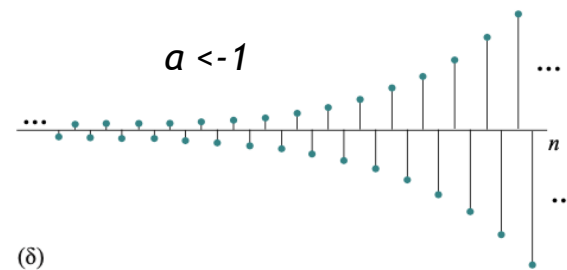
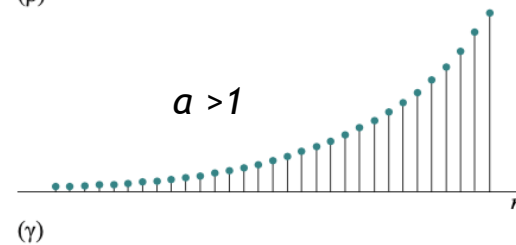
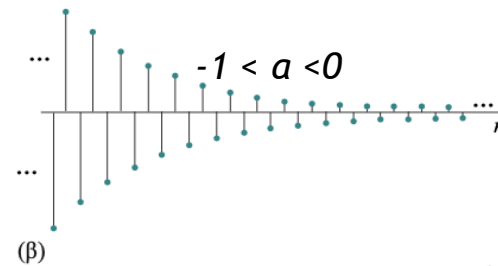
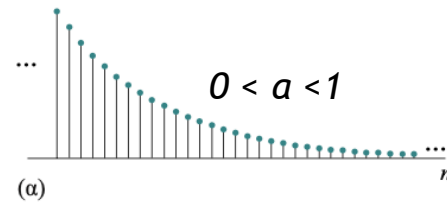
$$x(n) = An, \quad -\infty < n < \infty$$



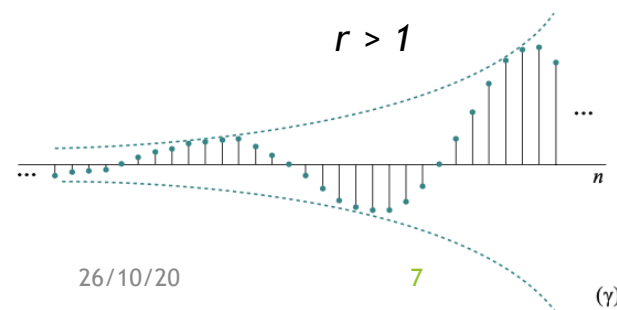
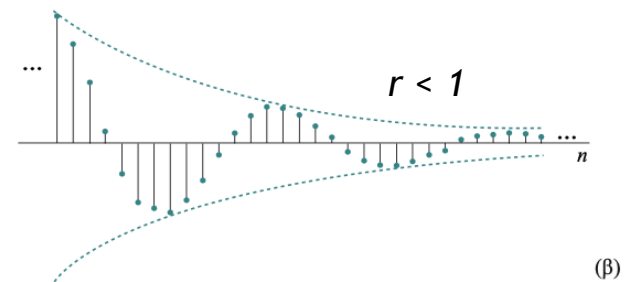
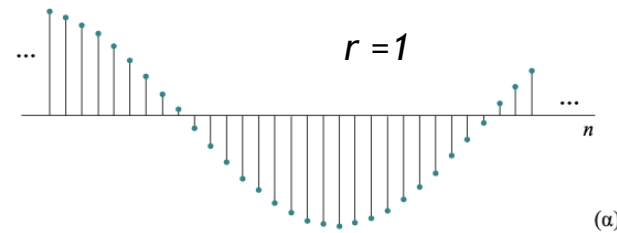
Εκθετική Ακολουθία (Exponential Sequence)

$$x(n) = a^n, \quad -\infty < n < \infty$$

a πραγματικός αριθμός



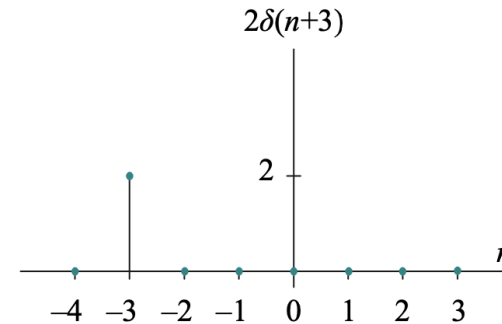
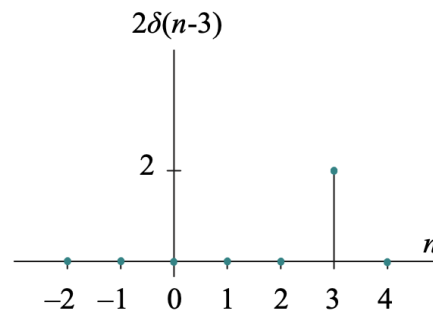
$a = re^{j\omega}$ μιγαδικός αριθμός
αναπαράσταση φανταστικού ή πραγματικού μέρους



Ολίσθηση Σημάτων Διακριτού Χρόνου

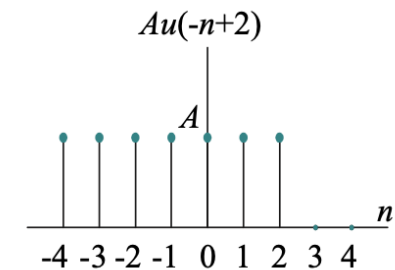
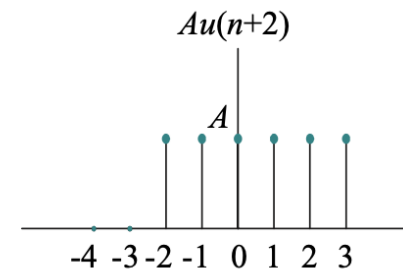
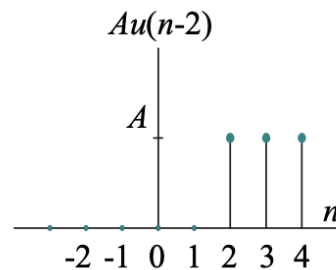
- ▶ Ολίσθηση κρουστικής ακολουθίας

$$\delta(n - n_o) = \begin{cases} 1, & n = n_o \\ 0, & n \neq n_o \end{cases}$$



- ▶ Ολίσθηση βηματικής ακολουθίας

$$u(n - n_o) = \begin{cases} 1, & n \geq n_o \\ 0, & n < n_o \end{cases}$$



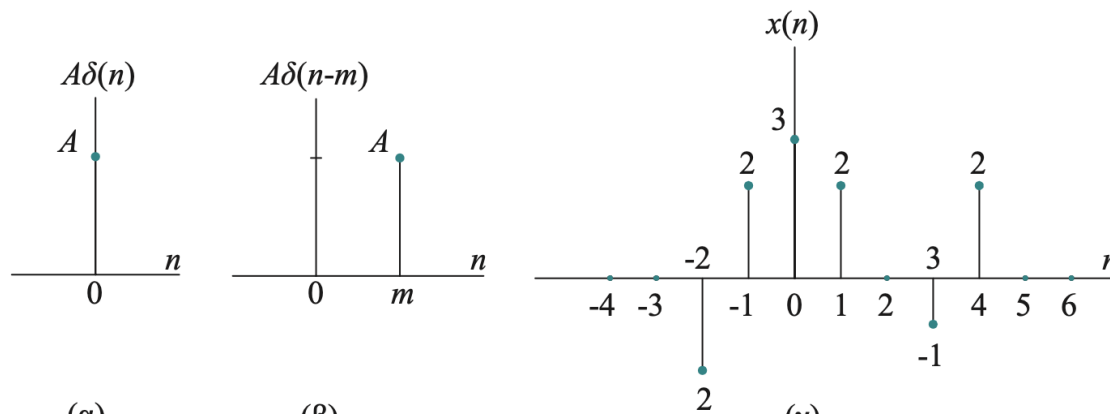
- ▶ Γενικά:

- ▶ n_o θετικό -> δεξιά ολίσθηση
- ▶ n_o αρνητικό -> αριστερή ολίσθηση

Γενική Περιγραφή Ακολουθίας

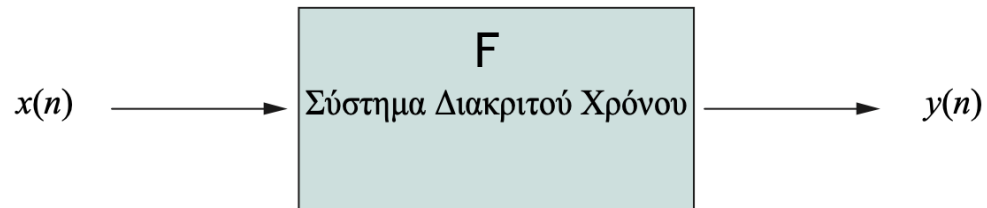
- ▶ Οποιοδήποτε διακριτό σήμα μπορεί να περιγραφεί ως άθροισμα ολισθημένων κρουστικών δειγμάτων πολ/σμένων με κάποιους συντελεστές βάρους:

- ▶ Παράδειγμα:
$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$



Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- ▶ Ένα σύστημα το οποίο δέχεται μία είσοδο διακριτού χρόνου $x(n)$ και παράγει μία έξοδο διακριτού χρόνου $y(n)$
 - ▶ Το $y(n)$ μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως μια συνάρτηση του $x(n)$:
 - ▶ $y(n) = F\{x(n)\}$



- ▶ Παραδείγματα:
 - ▶ $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$
 - ▶ $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$
 - ▶ $y(n) = nx(n-2) - x(n+3)$

Ιδιότητες Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

1. Γραμμικό (Linear):

- ▶ Όταν η F είναι γραμμική συνάρτηση, δηλαδή ισχύει η **αρχή της υπέρθεσης**:
 - ▶ Γραμμικός συνδυασμός σημάτων εισόδου θα δώσει τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό σημάτων εξόδου
- ▶ Αν $y_1(n)=F\{x_1(n)\}$ και $y_2(n)=F\{x_2(n)\}$ τότε $y(n)=F\{ax_1(n) +bx_2(n)\} = a y_1(n)+ b y_2(n)$

2. Σύστημα Time-Invariant (TI):

- ▶ Χρονικά Αμετάβλητο: Μια χρονική ολίσθηση του σήματος εισόδου θα δώσει την ίδια χρονική ολίσθηση του σήματος εξόδου $y(n)=F\{x(n)\} \Leftrightarrow F\{x(n-k)\} = y(n-k)$, για k ακέραιο

3. Ευσταθές (stable) ή Bounded Input Bounded Output (BIBO)

- ▶ Όταν φραγμένη είσοδος δίνει φραγμένη έξοδο, δηλαδή το σήμα δεν απειρίζεται
- ▶ Σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα θεωρείται ασταθές (unstable)

4. Αιτιατό (Causal)

- ▶ Όταν η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές του σήματος εισόδου
- ▶ Δηλαδή το σύστημα επεξεργάζεται το σήμα καθώς αυτό λαμβάνεται

Άσκηση

► Ποιες ιδιότητες έχουν τα ακόλουθα σήματα:

1. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$
2. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$
3. $y(n) = nx(n-2) - x(n+3)$
4. $y(n) = \cos[x(n)]$
5. $y(n) = x(2n)$ #Σύστημα Υποδειγματοληψίας

► Προσοχή: Καθυστέρηση του σήματος εισόδου κατά k δείγματα σε ένα σύστημα δε σημαίνει αντικατάσταση του n με $n-k$, αλλά προσθήκη του $-k$ στο δείκτη του σήματος εισόδου. Π.χ. αν $y(n) = x(an)$ τότε εάν καθυστερήσω την είσοδο στο σύστημα θα πάρω $x(an-k)$ και όχι $x(a(n-k)) = y(n-k)$

► Δες σχετικό άρθρο στους Συνδέσμους:

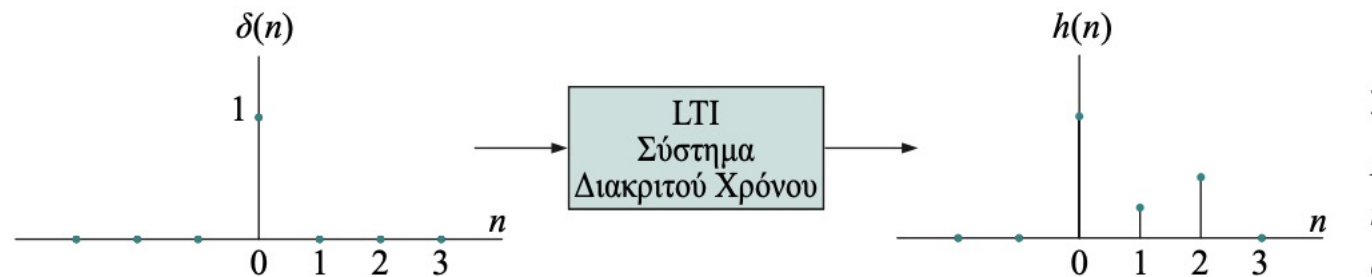
► [Linearity, Causality and Time-Invariance of a System](#)

Linear Time-Invariant (LTI) System

- ▶ Τα συστήματα με τα οποία θα ασχολούμαστε έχουν τουλάχιστον δύο ιδιότητες, είναι:
 - ▶ Γραμμικά
 - ▶ Χρονικά Αμετάβλητα

Κρουστική Απόκριση Συστήματος

- ▶ Ορίζεται ως η έξοδος ενός LTI συστήματος όταν σε αυτό εφαρμοσθεί ως είσοδος η κρουστική ακολουθία $\delta(n)$.
 - ▶ Συμβολίζεται με $h(n) = F\{\delta(n)\}$
 - ▶ Λέγεται και φυσική απόκριση



Απόκριση LTI Συστήματος

- ▶ Έστω LTI σύστημα F με κρουστική απόκριση $h(n) = F\{\delta(n)\}$
- ▶ Όπως είδαμε, κάθε σήμα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων κρουστικών ακολουθιών

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

- ▶ Καθώς σε ένα LTI σύστημα:
 - ▶ Κάθε γραμμικός συνδυασμός σημάτων εισόδου αντιστοιχεί σε γραμμικό συνδυασμό σημάτων εξόδου και
 - ▶ Χρονική ολίσθηση σήματος εισόδου αντιστοιχεί σε χρονική ολίσθηση σήματος εξόδου
- ▶ Συμπεραίνουμε ότι η έξοδος του LTI συστήματος σε οποιοδήποτε σήμα $x(n)$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων κρουστικών αποκρίσεων:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

Συνέλιξη (Convolution)

- ▶ Συνέλιξη δύο σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι η μαθηματική πράξη:

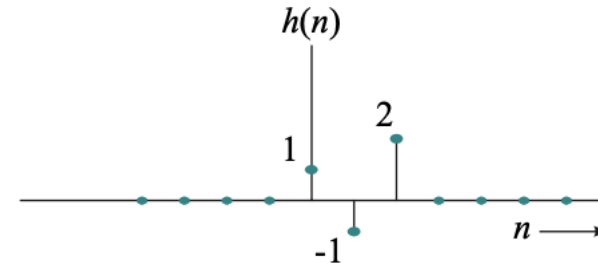
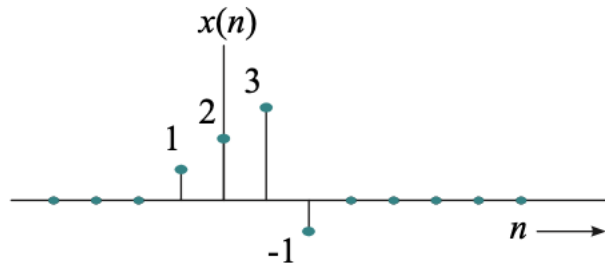
$$\text{▶ } y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n - m)$$

- ▶ Συνεπώς, όταν είναι γνωστή η *κρουστική απόκριση* ενός LTI συστήματος $h(n)$, μπορεί να υπολογιστεί η απόκρισή του σε οποιοδήποτε σήμα εισόδου $x(n)$, ως η συνέλιξη του σήματος εισόδου με την κρουστική του απόκριση:

$$\text{▶ } y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n - m)$$

Άσκηση

- ▶ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ ενός LTI συστήματος:
 - ▶ Σε σήμα εισόδου $x(n) = \{1, \underline{2}, 3, -1\}$ - η υπογράμμιση δηλώνει την τιμή του σήματος στο $n=0$
 - ▶ Όταν η κρουστική του απόκριση είναι $h(n) = \{\underline{1}, -1, 2\}$



- ▶ Λύση $y(n) = \{1, \underline{1}, 3, 0, 7, -2\}$
- ▶ Γενικά η συνέλιξη δύο ακολουθιών έχει μήκος $N_1 + N_2 - 1$
 - ▶ Όπου N_1 το μήκος της μίας ακολουθίας και N_2 το μήκος της άλλης

Λύση

- ▶ $y(-2) = \sum_{m=-1}^{m=+2} x(m)h(-2-m)$ για όλα τα m το $h(-2-m)$ είναι μηδέν
- ▶ $y(-1) = \sum_{m=-1}^{m=+2} x(m)h(-1-m)$
- ▶ $y(0) = \sum_{m=-1}^{m=+2} x(m)h(0-m) = x(-1)h(-1) + x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) =$
- ▶ $y(1) =$
- ▶ $y(2) =$
- ▶ $y(3) =$
- ▶ $y(4) =$
- ▶ $y(5) =$

Ιδιότητες Συνέλιξης

- ▶ Αντιμεταθετική

- ▶ $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

- ▶ Προσεταιριστική

- ▶ $x(n) * [h1(n) * h2(n)] = [x(n) * h1(n)] * h2(n)$

- ▶ Επιμεριστική

- ▶ $x(n) * [h1(n) + h2(n)] = x(n) * h1(n) + x(n) * h2(n)$

Άσκηση

- ▶ Στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = a^n u(n)$ εφαρμόζεται το σήμα $x(n) = b^n u(n)$, όπου $u(n)$ η μοναδιαία ακολουθία και a, b γνωστές σταθερές και $a \neq b$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.
- ▶ Δείτε άθροισμα n όρων γεωμετρικής προόδου εδώ:
 - ▶ [Γεωμετρική Πρόοδος - Βικιπαίδεια](#)

Βιβλιογραφία

- ▶ Σκόδρας Α. και Αναστασόπουλος Β., Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων, Πάτρα 2003

Εργαστηριακό Μέρος - Εξάσκηση

- ▶ **Άσκηση 2.1:** Να υπολογιστεί η έξοδος ενός LTI συστήματος του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(n) = \{1, -1, 2\}$, όταν σε αυτό εφαρμοστεί σήμα εισόδου $x(n) = \{1, 2, 3, -1\}$
- ▶ **Άσκηση 2.2:** Να υπολογιστεί η έξοδος του ίδιου συστήματος, όταν ως σήμα εισόδου χρησιμοποιηθεί ένα αρχείο ήχου
- ▶ **Άσκηση 2.3:** Υπολογίστε την ίδια έξοδο με τη συνάρτηση convolve της Βιβλιοθήκης numpy