1.2 Βασικές παραδοχές

Για την μελέτη παραγωγής και διάδοσης του ήχου σε κάποιο μέσο θα κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Το μέσο διάδοσης πρέπει να είναι ελαστικό και να υπακούει στους νόμους της διατήρησης της μάζας και της ορμής.
2. Λόγω του ότι οι μεταβολές της πίεσης που οφείλονται στη διάδοση των ηχητικών κυμάτων στην ακουστική περιοχή των συχνοτήτων, είναι ταχείς, δεν συμβαίνει ροή θερμότητας από το περιβάλλον σε ένα στοιχείο όγκου και οι μεταβολές της πίεσης μπορούν να θεωρηθούν αδιαβατικές (αν και σε μερικές περιπτώσεις ιδίως σε χαμηλές συχνότητες θεωρούνται ισόθερμες). Συνεπώς όταν σε ένα στοιχείο όγκου V ενός αερίου λόγω της διάδοσης του ήχου μεταβάλλεται η πίεση, ισχύουν οι σχέσεις:

$$PV^{\gamma} = \text{σταθ.} \quad , \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} \qquad (1.2.1)$$

όπου c_p, c_v οι ειδικές θερμότητες του αερίου υπό σταθερή πίεση και όγκο αντίστοιχα,
P η ατμοσφαιρική πίεση
V το θεωρούμενο στοιχείο όγκου

Στην ανάλυση που ακολουθεί για την περιγραφή των ηχητικών κυμάτων χρησιμοποιούμε την ***ακουστική πίεση*** (p), την ποσότητα που μετρούν τα μικρόφωνα. Με τον όρο ηχητική πίεση στην ακουστική εννοούμε τη δημιουργούμενη υπερπίεση ή υποπίεση (σε σχέση με την ατμοσφαιρική πίεση) που δημιουργεί το ηχητικό κύμα, κατά τη διάδοση του.

Σε αντίθεση με την ακουστική πίεση με τον όρο ***στατική πίεση*** (P) εννοούμε την στατική πίεση του μέσου διάδοσης, που για την περίπτωση διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι η ατμοσφαιρική πίεση.

Άλλες ποσότητες που χρησιμοποιούμε είναι :

Το μήκος κύματος (λ) που είναι η απόσταση μεταξύ δύο μέγιστων η ελάχιστων της πίεσης, ή σύμφωνα με τον (ΕΛΟΤ 263.2) μήκος κύματος ή κυματικό μήκος ενός διαδιδομένου επίπεδου αρμονικού κύματος σε ισότροπο μέσο διάδοσης είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο κυματικά μέτωπα που έχουν μεταξύ τους χρονική διαφορά ίση με την περίοδο του κύματος.

Τον γωνιακό** ή **κυκλικό κυματάριθμο (k) που είναι το γινόμενο του κυματάριθμου επί 2π

μήκους κύματος

Την συχνότητα του ήχου (f) που είναι η συχνότητα ταλάντωσης των σωματιδίων του ελαστικού μέσου λόγω της διάδοσης του ηχητικού κύματος.

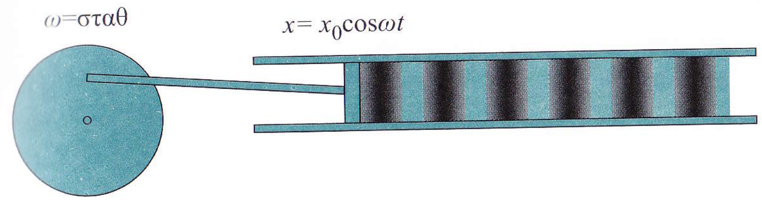
Την ταχύτητα των σωματιδίων (u) που είναι η ταχύτητα ταλάντωσης των σωματιδίων του μέσου διάδοσης. Με τον όρο σωματίδια εννοούμε μικρές ποσότητες του μέσου διάδοσης, (που υποτίθεται συνεχές), και όχι απαραίτητα μόρια. Σε μερικές περιπτώσεις όμως, όπως π.χ. κατά τη διάδοση υψίσυχνων ηχητικών κυμάτων στον αέρα, η ταχύτητα των σωματιδίων περιγράφει τη μακροσκοπική μέση κίνηση των μορίων του αέρα, η οποία επικαλύπτει την κίνηση Brown.

Την ταχύτητα όγκου (U) που ορίζεται ως ο ρυθμός ροής του μέσου διάδοσης από μία επιφάνεια εμβαδού s κάθετη στην ταχύτητα ροής. Η ταχύτητα όγκου και η σωματιδιακή ταχύτητα συνδέονται με την σχέση: $U = su$

Την ταχύτητα του ήχου (c) που είναι η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής (ταχύτητα του κύματος) στο υλικό μέσο.

1.3 Επίπεδα ηχητικά κύματα

Έστω η διάταξη του σχήματος. Το έμβολο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω. Κατά την κίνησή του το έμβολο δημιουργεί πυκνώματα και αραιώματα στον αέρα των οποίων η πίεση σε ίσες αποστάσεις από το έμβολο είναι η ίδια. Οι μεταβολές της πίεσης αυτής δημιουργούν



Σχήμα 1.3.1: Παραγωγή επιπέδων ηχητικών κυμάτων.

ένα επίπεδο κύμα. Επίπεδο θεωρείται το κύμα που διαδίδεται μόνο κατά μια διεύθυνση π.χ. τη διεύθυνση των x. Δηλαδή υποθέτουμε ότι στο επίπεδο yz που είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης x, η πίεση την ίδια χρονική στιγμή παίρνει την ίδια τιμή. Τα μέτωπα κύματος (επιφάνειες στις οποίες φθάνει το κύμα σε χρόνο t) στην περίπτωση αυτή είναι επίπεδα απείρων διαστάσεων, παράλληλα μεταξύ τους οποιαδήποτε χρονική στιγμή, κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης (βλέπε σχήμα 1.3.1).

Επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ένα κύμα όταν αυτό παράγεται από πηγή της οποίας η επιφάνεια εκπομπής είναι ένα επίπεδο για μικρές αποστάσεις, ή πρακτικά από μια σημειακή πηγή που βρίσκεται σε πολύ μεγάλη (άπειρη θεωρητικά) απόσταση, όπου οι σφαιρικές επιφάνειες κύματος εκφυλίζονται σε επίπεδες. Αποδεικνύεται παρακάτω ότι για την περίπτωση επιπέδων κυμάτων που διαδίδονται σε μέσο χωρίς απώλειες (πχ απορρόφηση) η πίεση του ήχου ικανοποιεί τη σχέση:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$

Η σχέση αυτή είναι η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση γεγονός που αποδεικνύει την κυματική φύση του ήχου.

1.3.1 Υπολογισμός Εξίσωσης επιπέδων κυμάτων (μονοδιάστατη κυματική Εξίσωση)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν σωλήνα απείρου μήκους που περιέχει ιδανικό αέριο το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία. Ο σωλήνας είναι ανοικτός στα δυο άκρα του και η τομή του (A) είναι σταθερή (Σχ. 1.3.2). Επιπλέον υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία σε οποιοδήποτε σημείο είναι σταθερή και οι τριβές είναι αμελητέες. Στο ένα άκρο του σωλήνα υπάρχει έμβολο το οποίο μπορεί και κινείται ελεύθερα κατά τον άξονα των x. Κάποια χρονική στιγμή το έμβολο κινείται δεξιά προκαλώντας μία διαταραχή στο αέριο που υπάρχει στον σωλήνα. Η διαταραχή αυτή, διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα c.

Ας εξετάσουμε την κίνηση που κάνει το στοιχείο όγκου ΔV που περιορίζεται από επίπεδα (κάθετα στον άξονα του σωλήνα) που βρίσκονται στις θέσεις x και $x + \delta x$. Θεωρήστε ότι κατά τη διάδοση του επιπέδου ηχητικού κύματος η αριστερή πλευρά του στοιχείου μετατοπίζεται κατά w και η δεξιά κατά:

$$w + \delta w = \left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x \right] \tag{1.3.1}$$

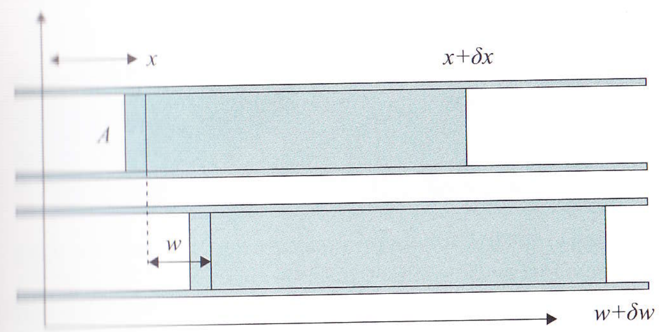
Αυτό σημαίνει ότι ο αρχικός όγκος που περιορίζεται από τις επίπεδες επιφάνειες x και $x{+}\delta x$ μεταβάλλεται κατά την ποσότητα

$$\mathrm{d}V = A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x \tag{1.3.2}$$

Ο όγκος του στοιχείου που εξετάζουμε είναι $V{=}A\delta x$, οπότε η σχετική μεταβολή του όγκου είναι:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{1.3.3}$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την εξίσωση της συνέχειας.



Σχήμα 1.3.2: Διάδοση επιπέδων κυμάτων

Αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό του μέτρου συμπιεστότητας, που ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής της πίεσης προς τη σχετική μεταβολή του όγκου έχω:

$$B = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V / V} \tag{1.3.4}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι σε αύξηση της πίεσης αντιστοιχεί μείωση του όγκου. Η μεταβολή της πίεσης $\mathrm{d}P$ είναι η ακουστική πίεση p. Αν λύσουμε ως προς την ακουστική πίεση έχουμε

$$\mathrm{d}P = p = -B\frac{\mathrm{d}V}{V} = -B\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.3.5}$$

Αν p η πίεση του ηχητικού κύματος (υπερπίεση σε σχέση με την πίεση ηρεμίας) που υπάρχει στο επίπεδο x τότε στο επίπεδο x+δx θα αντιστοιχεί πίεση

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x \tag{1.3.6}$$

Η διαφορά των πιέσεων στις δύο πλευρές του στοιχείου προκαλεί την κίνηση του στοιχείου όγκου που εξετάζουμε. Αν ρ η πυκνότητα του στοιχείου, τότε η μάζα του θα είναι $A\rho\delta x$, οπότε σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton θα έχουμε:

$$A\rho\delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -A\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \tag{1.3.7}$$

Όπου το πρώτο μέλος παριστά το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση και το δεύτερο τη δύναμη. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει τη φορά της δύναμης. Με απαλοιφή του $A\delta x$ από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}} \tag{1.3.8}$$

Η εξίσωση (1.3.8) δίδει την εξίσωση της κίνησης της διαταραχής.

Διαφορίζοντας την (1.3.5) δύο φορές ως προς t και τη (1.3.8) μια φορά ως προς x απαλείφοντας τους όρους που περιέχουν το w καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad (1.3.9)$$

Η ποσότητα B/ρ όπως θα αποδειχθεί παρακάτω είναι ίση με το τετράγωνο της ταχύτητας του ήχου οπότε με αντικατάσταση στην (1.3.9) προκύπτει η εξίσωση των επιπέδων κυμάτων:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \qquad (1.3.10)$$

1.3.2 Λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

Η γενική λύση της εξίσωσης (1.3.10) έχει τη μορφή:

$$\boxed{p(t) = p_{01}e^{i(\omega t - kx)} + p_{02}e^{i(\omega t + kx)}} \qquad (1.3.11)$$

όπου $p(t)$ η στιγμιαία πίεση του ηχητικού κύματος, δηλαδή η προκαλούμενη υπερπίεση στο μέσο διάδοσης και p_{01}, p_{02} οι αντίστοιχες μέγιστες τιμές.

Η παραπάνω λύση παριστά δύο κύματα που διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις: κατά τη διεύθυνση $+x$ και τη διεύθυνση $-x$.

Αν μας ενδιαφέρει μόνο η διεύθυνση $+x$ τότε η λύση παίρνει τη μορφή:

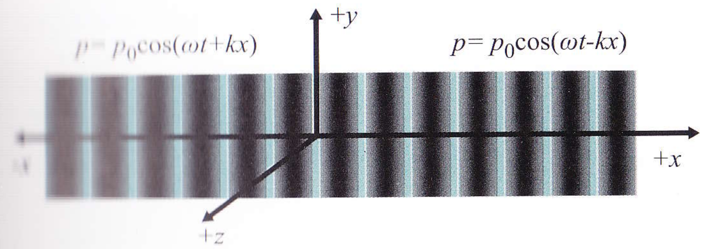
$$p(t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)} = p_0 e^{ik(ct - x)} \qquad (1.3.12)$$

Λόγω του ότι οποιαδήποτε παρατηρήσιμη ποσότητα είναι πάντα πραγματική, το πραγματικό μέρος της παραπάνω λύσης μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$\boxed{p(t) = p_0 \cos(\omega t - kx)} \qquad (1.3.13)$$

Στην παραπάνω σχέση το k είναι ο κυματάριθμος, λ το μήκος κύματος και ω η κυκλική συχνότητα. Τα μεγέθη αυτά συνδέονται με τις γνωστές σχέσεις:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \qquad (1.3.14)$$



Σχήμα 1.3.3: Διάδοση επιπέδων ηχητικών κυμάτων.

Η κυματική εξίσωση μπορεί να γραφεί και με τη βοήθεια της ταχύτητας των σωματιδίων.

Από τη σχέση (1.3.5) αν παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο, λαμβάνοντας υπόψη ότι $u = \partial w/\partial t$ προκύπτει:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1.3.15)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η ταχύτητα (u) είναι η πρώτη παράγωγος της μετατόπισης (w) ως προς το χρόνο η σχέση (1.3.8) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1.3.16)$$

Παραγωγίζοντας την (1.3.16) και (1.3.15) ως προς t και x αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = -B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.3.17)$$

Με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων και λαμβάνοντας υπόψη την (1.3.4) προκύπτει τελικά

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (1.3.18)$$

Ανάλογα με την πίεση η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφεί

$$\boxed{u(t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)}} \qquad (1.3.19)$$

Στη λύση της κυματικής εξίσωσης παρατηρούμε τα εξής:

1. Για διάδοση επίπεδων κυμάτων σε μέσο χωρίς απώλειες, η ακουστική πίεση (p) δεν εξαρτάται από την απόσταση x, αλλά μόνο από το χρόνο.
2. Σε οποιαδήποτε θέση ο ήχος έχει την ίδια συχνότητα.