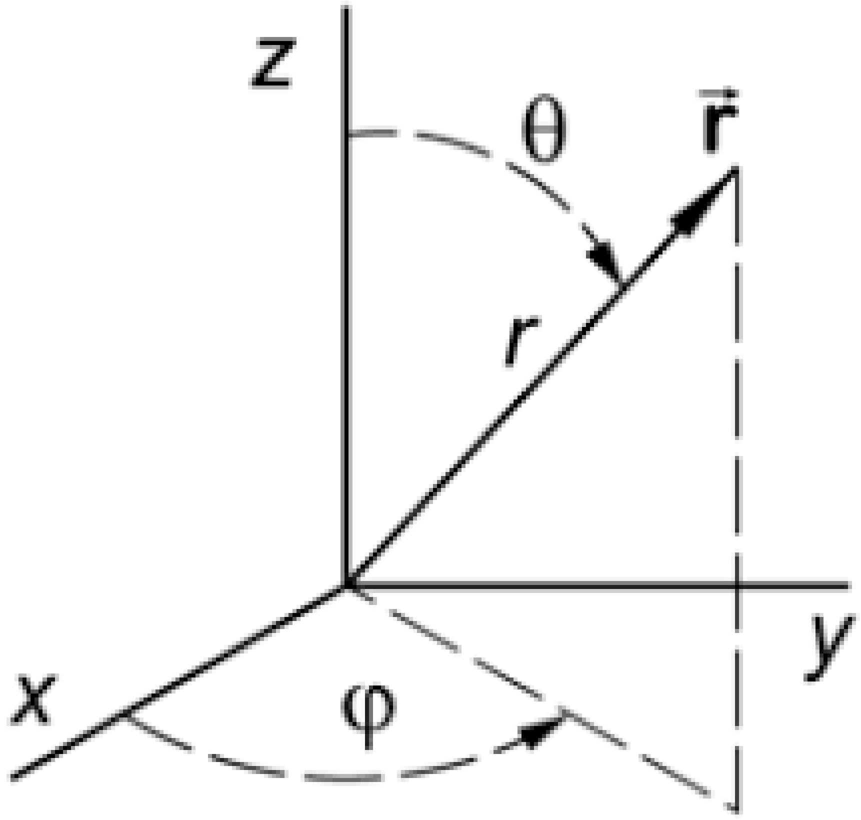
Σφαιρικές πηγές και σφαιρικά κύματα

Πολικές συντεταγμένες

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, \theta)$$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$\mathrm{y} = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$



Wave equation in polar coordinates for conditions of spherical symmetry

Wave equation:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Alternative form of the wave equation:

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2},$$

General solution for spherical source:

$$rp = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

Alternative form of the general solution:

$$p = \frac{1}{r}\left(f_1(ct - r) + f_2(ct + r)\right),$$

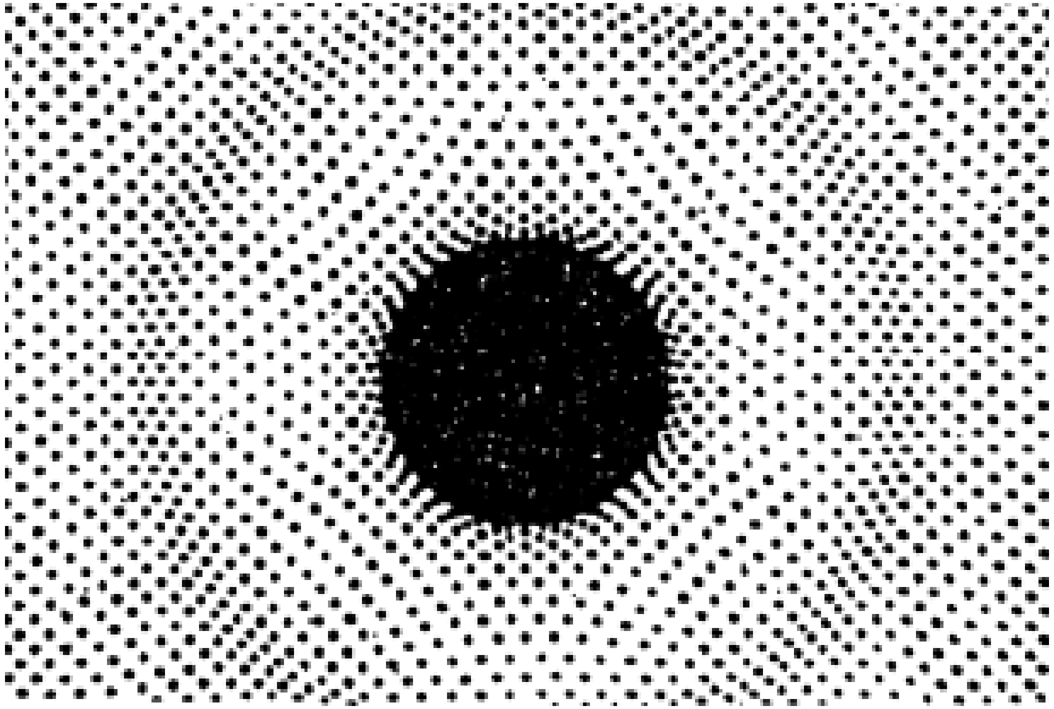


Figure 1.2.1 Fluid particles in the sound field generated by a pulsating sphere. (From ref. [1].)

Solution for harmonic spherical wave

Solution of the Helmholtz equation

$$\frac{\partial^2(r\hat{p})}{\partial r^2} + k^2 r\hat{p} = 0.$$

Sound pressure for diverging wave:

$$\hat{p} = A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}}{r}.$$

Particle velocity in the radial direction:

$$\hat{u}_r = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\rho}\frac{\partial\hat{p}}{\partial r} = \frac{A}{\rho c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}}{r}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}kr}\right) = \frac{\hat{p}}{\rho c}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}kr}\right).$$

- Μια αρμονική σημειακή πηγή βρίσκεται στη θέση (x=0,y=0.3), μόλις 0.3 m πάνω από άκαμπτη ανακλαστική επιφάνεια εκτεινόμενη κατά το y=0. Γράψτε κώδικα για τον υπολογισμό του πλάτους της ακουστικής πίεσης συναρτήσει της συχνότητας (από 100 Hz έως 10kHz), θεωρώντας ένα δέκτη στο σημείο (x=15,y=3) m. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει τις μεταβολές του πλάτους συναρτήσει της συχνότητας και πάνω σε αυτό, παραθέσετε το πλάτος που θα είχε η ακουστική πίεση αν δεν υπήρχε το επίπεδο ανάκλασης.
- Θεωρείστε ότι η σχέση που συνδέει την ακουστική πίεση με το πλάτος διέγερσης A της σημειακής πηγής είναι η $p(r,t) = A\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}$

- Μια αρμονική σημειακή πηγή βρίσκεται στη θέση (x=0,y=0.3), μόλις 0.3 m πάνω από άπειρη άκαμπτη ανακλαστική επιφάνεια εκτεινόμενη κατά το y=0. Γράψτε κώδικα για τον υπολογισμό του πλάτους της ακουστικής πίεσης που θα κατέγραφε ένας δέκτης του οποίου η θέση δίνεται από το (0<x<30, y=1) m, συναρτήσει του x. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει τις μεταβολές του πλάτους συναρτήσει του x και πάνω σε αυτό, παραθέσετε το πλάτος που θα είχε η ακουστική πίεση αν δεν υπήρχε το επίπεδο ανάκλασης. Κατασκευάσετε διαφορετικό διάγραμμα για τις συχνότητες των 20 Hz, 250 Hz και 2500 Hz και γράψτε μερικά λόγια όσον αφορά αυτό το οποίο παρατηρείτε. Τέλος, δώσετε μια μαθηματική διατύπωση (εξίσωση) για το ηχητικό πεδίο και σχολιάστε πόσο συμφωνούν τα διαγράμματα με τη θεωρία.
- Θεωρείστε ότι η σχέση που συνδέει την ακουστική πίεση με το πλάτος διέγερσης A της σημειακής πηγής είναι η

$$\mathrm{p}(r,t) = A\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}$$

- Υπόδειξη: Για ευκολία στην κατασκευή του κώδικα, μπορείτε να βασιστείτε στο παράδειγμα "point_source_above_plane.py" που θα βρείτε στο πεδίο "Έγγραφα του e-class"