

# 3. Μετρήσεις GPS – Προβλήματα

## 3.1. Μετρήσεις G.P.S. και προβλήματα.

Οι παρατηρήσεις που πραγματοποιούνται με το σύστημα GPS, όπως έχουμε άλλωστε ήδη αναφέρει, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) σε μετρήσεις ψευδοαποστάσεων και β) σε μετρήσεις φάσεων.

### 3.1.1. Μετρήσεις ψευδοαποστάσεων με το G.P.S.

Οι διαφορετικές μετρήσεις και τεχνικές παρατήρησης εξαρτώνται από τον τύπο του δέκτη που χρησιμοποιείται. Ως προς τις βασικές αρχές λειτουργίας των δεκτών G.P.S διακρίνουμε τους δέκτες συσχετισμού και τους δέκτες τετραγωνισμού.

Οι **δέκτες συσχετισμού** παράγουν ένα ακριβές αντίγραφο του κώδικα που εκπέμπεται από το δορυφόρο το οποίο δεν ταυτίζεται με το σήμα λήψης, λόγω των καθυστερήσεων που υφίσταται μέχρι να φτάσει στο δέκτη. Ο δέκτης προσπαθεί να ταυτίσει τα δύο σήματα δηλαδή το αντίγραφο του κώδικα που έχει παράγει ο ίδιος και τον κώδικα αυτό καθ' αυτό όπως τον λαμβάνει από το δορυφόρο. Συνεπώς, οι δύο κώδικες συσχετίζονται (code correlation) μέχρι να ταυτιστούν. Στην ουσία γίνεται μια χρονική μετατόπιση του ενός σήματος ως προς το άλλο μέχρι να ταυτιστούν μέσω κάποιας αλγοριθμικής διαδικασίας και υπολογίζεται ο χρόνος διάδοσης του σήματος από το δορυφόρο μέχρι το δέκτη (βλ. Σχ. 2.6). Ο χρόνος αυτός μετατρέπεται σε ψευδοαπόσταση αφού πολλαπλασιαστεί με την ταχύτητα του φωτός. Η χρονική αβεβαιότητα της ταύτισης ισοδυναμεί για μεν τον κώδικα P με 0.3 m, για δε τον C/A με 3 m. Βέβαια εκτός από την παραπάνω χρονική καθυστέρηση λόγω διαδρομής (δηλαδή τον χρόνο που χρειάζεται το σήμα για να φτάσει από το δορυφόρο στο δέκτη σε περίπτωση που δεν υπάρχουν άλλες καθυστερήσεις), έχουμε και τις χρονικές καθυστερήσεις που οφείλονται στα χρονόμετρα του δέκτη και του δορυφόρου και τις καθυστερήσεις λόγω διέλευσης του σήματος μέσα από την ατμόσφαιρα και συγκεκριμένα δύο στρώματα αυτής που είναι γνωστά ως τροπόσφαιρα και ιονόσφαιρα. Οι χρονικές καθυστερήσεις μπορούν να εκφραστούν από κατάλληλα μοντέλα κατά τη διαδικασία συνόρθωσης των παρατηρήσεων. Η πληροφορία για τον υπολογισμό αυτών των διορθώσεων από τον δέκτη δίνεται από τον κώδικα D. Οι διορθώσεις λόγω ιονόσφαιρας (το στρώμα της ατμόσφαιρας μεταξύ  $80 \leq H \leq 1000$  km) εξαρτώνται από τη συχνότητα του σήματος, ενώ λόγω της τροπόσφαιρας (το στρώμα της ατμόσφαιρας μεταξύ  $0 \leq H \leq 50$  km) είναι ανεξάρτητες από τη συχνότητα και εξαρτώνται από το λεγόμενο ξηρό και υγρό παράγοντα. Γι' αυτό είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται

δέκτες δύο συχνοτήτων ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το μεγαλύτερο μέρος της ιονοσφαιρικής διόρθωσης (μερικές δεκάδες m ).

Αν καλέσουμε  $\rho$  την πραγματική απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη και  $\rho$  την μετρούμενη ψευδοαπόσταση (μέτρηση στο δέκτη) μεταξύ δορυφόρου και δέκτη τότε η πιο αναπτυγμένη εξίσωση παρατήρησης θα είναι :

$$\rho = \rho + d\rho + c(dt - dT) + d_{ion} + d_{trop} + \varepsilon_p \quad (3.1)$$

όπου  $\rho$  είναι η αληθής απόσταση μεταξύ δορυφόρου και δέκτη,  $\rho$  είναι η παρατηρηθείσα απόσταση,  $dt$  το σφάλμα συγχρονισμού του ρολογιού του δορυφόρου με το χρόνο του G.P.S,  $dT$  το σφάλμα συγχρονισμού των δύο ρολογιών δορυφόρου – δέκτη,  $c$  η ταχύτητα του φωτός,  $d_{trop}$  η τροποσφαιρική καθυστέρηση,  $d_{ion}$  η ιονοσφαιρική καθυστέρηση,  $\varepsilon_p$  ο θόρυβος παρατήρησης (τυχαίο σφάλμα). Επειδή το σφάλμα  $dt$  του χρονομέτρου του δορυφόρου είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το σφάλμα  $dT$  του δέκτη, μπορεί να αγνοηθεί.

Η γεωμετρική απόσταση  $\rho$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των συντεταγμένων του δορυφόρου, τη χρονική στιγμή της εκπομπής του σήματος, και των συντεταγμένων του δέκτη. Έτσι, θα έχουμε τελικά, τη μη γραμμική εξίσωση παρατήρησης της ψευδοαπόστασης. Ας υποθέσουμε ότι ο δέκτης ονομάζεται  $r$  (receiver) και ο δορυφόρος προς τον οποίο γίνεται η παρατήρηση  $s$  (satellite):

$$\rho_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} + c(dt - dT) + dt_{trop} + d_{ion} + \varepsilon_R \quad (3.2)$$

Επειδή στην παραπάνω σχέση υπάρχουν 4 συνολικά άγνωστες παράμετροι (τρεις οι συντεταγμένες του δέκτη και μία η χρονική παράμετρος  $dT$  δηλαδή το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη), απαιτούνται **τέσσερεις τουλάχιστον ταυτόχρονες μετρήσεις** από τον δέκτη προς τέσσερεις αντίστοιχους διαφορετικούς δορυφόρους.

### 3.1.2. Μετρήσεις φάσεων με το G.P.S.

Οι μετρήσεις των ψευδοαποστάσεων με τις οποίες ασχοληθήκαμε προηγουμένως γίνονται με μετρήσεις κώδικα. Ένα δεύτερο είδος παρατηρήσεων που είναι **σημαντικά πιο ακριβές** από τις ψευδοαποστάσεις, είναι οι μετρήσεις φάσης των φερόντων κυμάτων. Οι μετρήσεις φάσης μπορούν να γίνουν με υψηλή ακρίβεια της τάξης των 2 mm. Οι μετρήσεις φάσης αναφέρονται στο φέρον κύμα συχνότητας L1 ή στο φέρον κύμα L2 ή ταυτόχρονα και στα δύο ανάλογα με τις δυνατότητες του δέκτη. Οι περισσότεροι σημερινοί δέκτες

διαθέτουν τη δυνατότητα μέτρησης όλων των ειδών των μετρήσεων, άσχετα αν ο κώδικας P είναι σε ελεύθερη χρήση. Η ποσότητα που μετράται στο δέκτη είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της φάσης του εκπεμπόμενου σήματος από τον δορυφόρο τη στιγμή της λήψης από το δέκτη και της φάσης ενός σήματος γνωστής συχνότητας που παράγεται εσωτερικά στο δέκτη τη χρονική στιγμή της λήψης. Τη στιγμή της λήψης ο δέκτης μετράει μόνο το κλασματικό μέρος της φάσης μιας και δεν μπορεί να μετρήσει και τον ακέραιο αριθμό κύκλων που αντιστοιχεί στην απόσταση δορυφόρου - δέκτη. Επομένως οι μετρήσεις φάσης παρουσιάζουν το πρόβλημα της αβεβαιότητας (ambiguity) στον προσδιορισμό του ακεραίου αυτού αριθμού (N).

Συνεπώς όλες οι επόμενες μετρήσεις φάσης περιέχουν την αβεβαιότητα αυτή και αυτό γιατί συνήθως ο δέκτης προσθέτει κάθε φορά στις επόμενες μετρήσεις τη μεταβολή της φάσης, μετά την αρχική μέτρηση, σε σχέση με την προηγούμενη. Για παράδειγμα η δεύτερη μέτρηση φάσης θα περιέχει τον κλασματικό αριθμό της πρώτης μέτρησης, το κλασματικό αριθμό της δεύτερης μέτρησης και ένα αριθμό ακεραίων κύκλων μεταξύ της πρώτης και δεύτερης μέτρησης λόγω μεταβολής της απόστασης δορυφόρου - δέκτη. Στην περίπτωση αδυναμίας λήψης του σήματος (loss of lock) χάνεται ένας αριθμός ακεραίων κύκλων με συνέπεια όλες οι επόμενες μετρήσεις να είναι μετατοπισμένες κατά τον ίδιο αριθμό κύκλων. Η αδυναμία λήψης μπορεί να κυμαίνεται από μερικά δευτερόλεπτα μέχρι και μερικά λεπτά. Αυτό το πρόβλημα της **ολίσθησης των κύκλων (cycle slips)** όπως ονομάζεται δεν παρουσιάζεται στις μετρήσεις των ψευδοαποστάσεων και αντιμετωπίζεται όπως και η ασάφεια των ακεραίων κύκλων (integer phase - ambiguity) με διάφορες τεχνικές κατά την προεπεξεργασία ή και κατά τη διαδικασία της συνόρθωσης.

Η εξίσωση παρατήρησης φάσης του φέροντος κύματος είναι η ακόλουθη (Λιβεριάτος Ε., Φωτίου Α., 1993) :

$$\phi_r^s = N_r^s + f_s \left[ \frac{\rho(t) + \dot{\rho}(t)\varepsilon_k(t)}{c_0} \right] - (f_s + F_r)[t + \varepsilon_k(t)] + f_s \Delta t_a \quad (3.3)$$

όπου  $\phi_r^s$  είναι η διαφορά φάσης που μετριέται στο δέκτη μεταξύ του λαμβανόμενου σήματος από δορυφόρο s και του σήματος που παράγεται στο δέκτη r,  $N_r^s$  είναι ο ακέραιος αριθμός κύκλων για κάθε ζεύγος δέκτη-δορυφόρου,  $f_i$  είναι η συχνότητα του σήματος (L1 ή L2),  $\rho(t)$  είναι η γεωμετρική απόσταση συναρτήσεως του χρόνου t,  $\dot{\rho}(t)$  είναι η παράγωγος της απόστασης ως προς το χρόνο t,  $\varepsilon_r(t)$  είναι το σφάλμα χρονομέτρου του δέκτη r,  $F_r$  είναι η συχνότητα του παραγόμενου σήματος στο δέκτη r,  $\Delta t_a$  είναι η χρονική καθυστέρηση σήματος λόγω ατμόσφαιρας,

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μια πιο απλή μορφή, αντίστοιχη αυτής για τις ψευδοαποστάσεις (βλ. εξίσωση 3.1) ως εξής:

$$\rho = \lambda\Phi' = \Phi + d\rho + c(dt - dT) + \lambda N - d_{ion} + d_{trop} + \varepsilon_{\phi} \quad (3.4)$$

όπου  $\Phi'$  είναι η παρατηρηθείσα διαφορά φάσης μεταξύ δορυφόρου και δέκτη,  $\rho$  παρατηρηθείσα απόσταση σε μονάδες μήκους,  $dt$  το σφάλμα συγχρονισμού του ρολογιού του δορυφόρου με το χρόνο του G.P.S. ,  $dT$  το σφάλμα συγχρονισμού των δύο ρολογιών δορυφόρου – δέκτη,  $c$  η ταχύτητα του φωτός,  $d_{trop}$  η τροποσφαιρική καθυστέρηση,  $d_{ion}$  η ιονοσφαιρική καθυστέρηση,  $\varepsilon_{\phi}$  ο θόρυβος παρατήρησης (τυχαίο σφάλμα),  $\Phi$  είναι η αληθής δεκαδική διαφορά φάσης,  $N$  είναι ο ακέραιος αριθμός κύκλων για κάθε ζεύγος δέκτη-δορυφόρου (αθροίζοντας το  $N$  με το δεκαδικό μέρος λαμβάνουμε τον συνολικό αριθμό κύκλων μεταξύ δορυφόρου-δέκτη),  $f_i$  είναι η συχνότητα του σήματος (L1 ή L2). Παρατηρώντας την εξίσωση 3.4 διαπιστώνουμε ότι είναι εκφρασμένη σε μονάδες μήκους. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την πολύ απλή εξίσωση που συνδέει τους κύκλους με τη συχνότητα και το μήκος κύματος. Δηλαδή, αν έχουμε μετρήσει έναν αριθμό  $\Phi'$  κύκλων και γνωρίσουμε ότι το μήκος κύματος της συχνότητας που χρησιμοποιούμε είναι ίσο με  $\lambda$  τότε οι κύκλοι αυτοί σε μονάδες μήκους θα είναι  $\Phi = \lambda\Phi'$ .

Προσοχή: όταν γίνονται παρατηρήσεις φάσεως η ιονοσφαιρική διόρθωση υπεισέρχεται με (-) μιας και το σήμα υστερεί, ενώ στην περίπτωση των ψευδοαποστάσεων προηγείται.

### 3.1.3. Επίλυση αρχικής ασάφειας φάσης (ambiguity resolution).

Παρατηρώντας την εξίσωση παρατήρησης φάσης του φέροντος κύματος βλέπουμε ότι η κύρια δυσκολία είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των ακεραίων κύκλων  $N$  που είναι γνωστή και σαν αρχική ασάφεια φάσης (ambiguity resolution). Σαν συνέπεια αυτού έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που σκοπό έχουν να προσδιορίσουν αυτόν τον αριθμό ( $N$ ) αλλά και τεχνικές με σκοπό να αντιμετωπίσουν και τα υπόλοιπα σφάλματα που υπεισέρχονται στην εξίσωση. Μία από αυτές τις τεχνικές είναι οι διαφορές των αρχικών παρατηρήσεων μεταξύ δεκτών (απλές διαφορές) ή μεταξύ δορυφόρων κατά την ίδια χρονική στιγμή (διπλές διαφορές) ή και μεταξύ διαφορετικών εποχών (τριπλές διαφορές). Περισσότερα στοιχεία για το σχηματισμό των διαφορών αυτών (γνωστών και ως διαφορικό GPS θα δοθούν στο Κεφάλαιο 4). Άλλες μέθοδοι που εφαρμόζονται για την επίλυση των ασαφειών είναι οι ακόλουθες (Kahmen, Feig, 1988) :

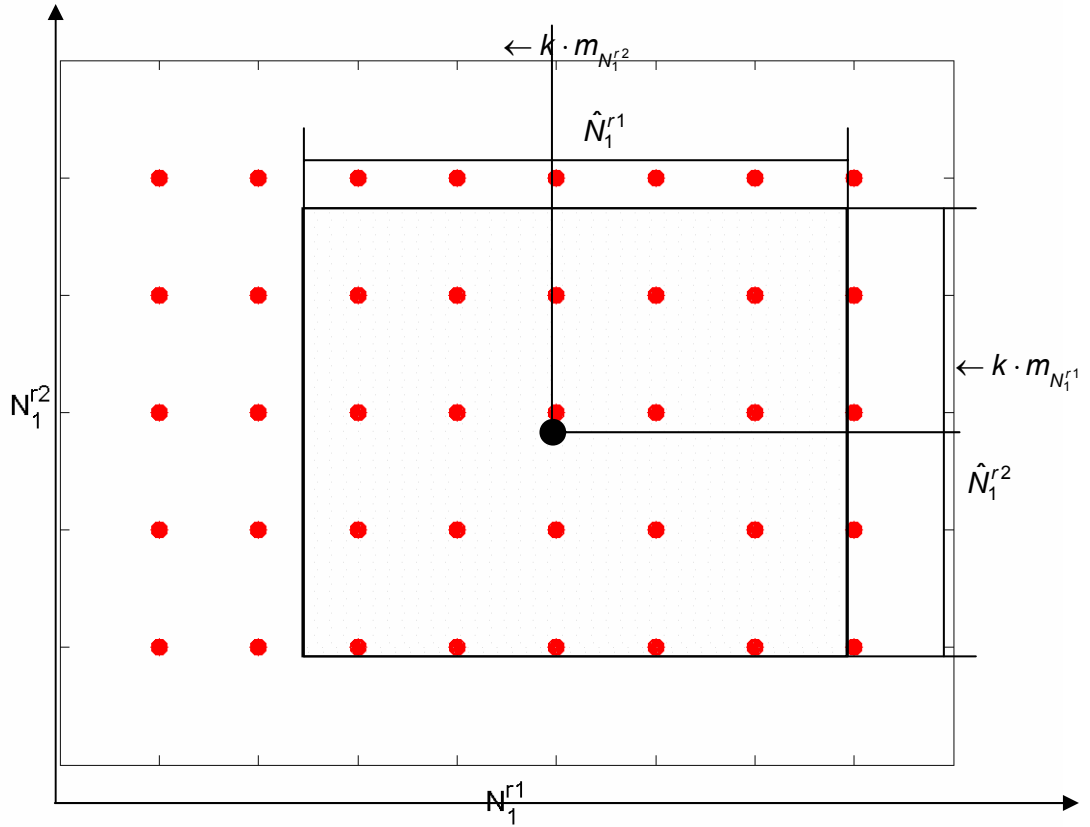
- 1) Η γεωμετρική μέθοδος
- 2) Συνδυασμοί κωδικών και φάσεων
- 3) Μέθοδοι ανίχνευσης ασαφειών
- 4) Συνδυασμένες μέθοδοι που περιλαμβάνουν όλες αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η χρησιμοποίηση διαφορετικών γραμμικών συνδυασμών της L1 και L2 συχνότητας μειώνει την επίδραση της ιονοσφαιρικής διάθλασης (L3), παρέχει λύσεις που είναι ανεξάρτητες από τα ρολόγια και από τη γεωμετρία των δεκτών (L4) και μειώνει κάθε συστηματικό σφάλμα μη μοντελοποιημένο (L5), (Rothacher, 1990) (βλ. Πίνακα 3.1).

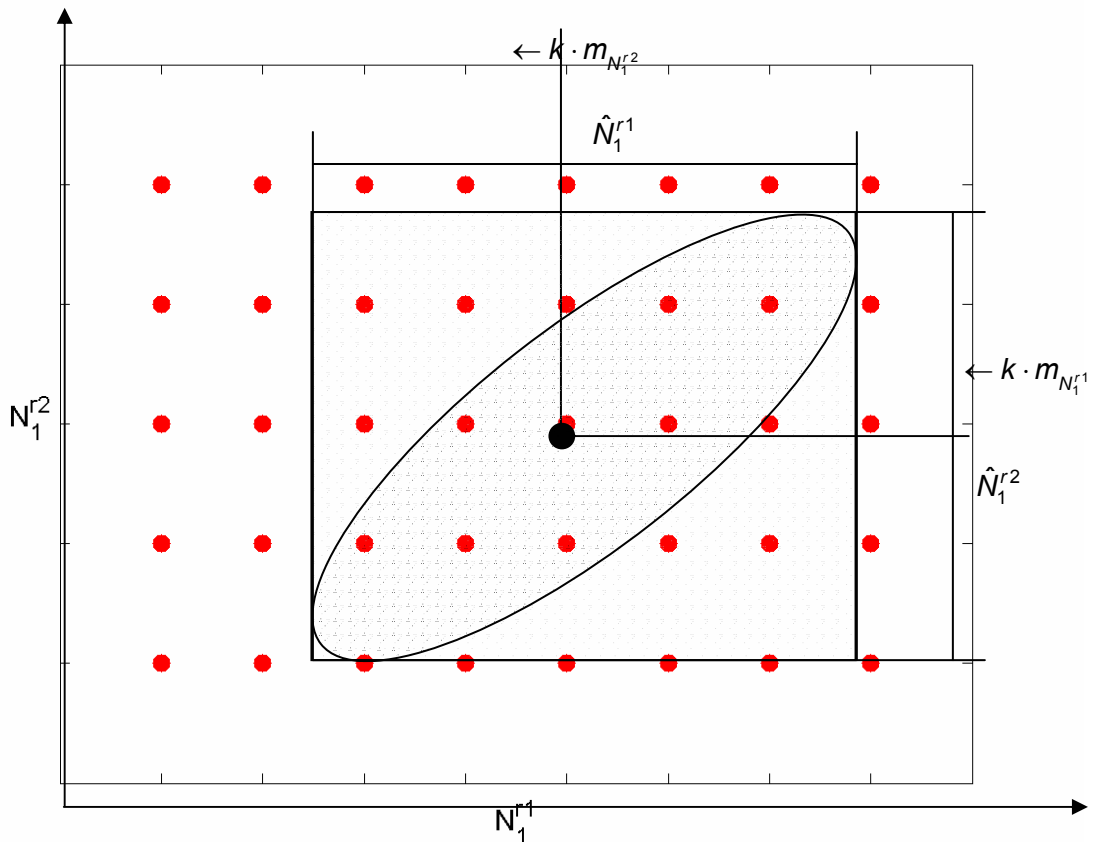
Συχνότητα	Μήκος κύματος	Γραμμικός συνδυασμός
L1	$\lambda=19$ cm	φέρον κύμα
L2	$\lambda=24$ cm	φέρον κύμα
L3	$\lambda=0$ cm	iono free $\{f_1^2/(f_1^2-f_2^2)\}L1-\{f_2^2/(f_1^2-f_2^2)\}L2$
L4	$\lambda= \infty$	geometry free L1-L2
L5	$\lambda=86$ cm	wide lane $\{f_1/(f_1-f_2)\}L1-\{f_2/(f_1-f_2)\}L2$

**Πίνακας 3.1:** Γραμμικοί συνδυασμοί της L1 και L2 συχνότητας

Η ανάγκη χρησιμοποίησης του συνδυασμού των L1 και L2 συχνοτήτων σε μετρήσεις ακριβείας τεκμηριώνεται από τους Frei και Schubert (1992) ως εξής. Το εύρος τιμών που καθορίζεται για κάθε ξεχωριστή ασάφεια που προκύπτει από μετρήσεις διπλής διαφοράς για συχνότητα  $f$ , με  $r$  και  $k$  τους δορυφόρους αναφοράς είναι  $\pm(km_{Nf}^{rk})$  όπου  $k$  είναι ένας πολλαπλασιαστικός συντελεστής εξαγόμενος από τη στατιστική θεωρία και  $m_{Nf}^{rk}$  είναι η τυπική απόκλιση μιας συγκεκριμένης παραμέτρου ασάφειας. Αυτά τα δύο εύρη τιμών καθορίζουν ένα πεδίο έρευνας που περιέχει μέρος του συνδυασμού των ακεραίων τιμών ασάφειας (Σχ. 3.1). Έχοντας μετρήσεις από δέκτες μιας συχνότητας L1 το εύρος τιμών μειώνεται όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2. Έτσι μειώνονται κατά ένα ποσοστό οι συνδυασμοί των παραπάνω ασαφειών οπότε γίνεται πιο εύκολη η εκτίμησή τους.

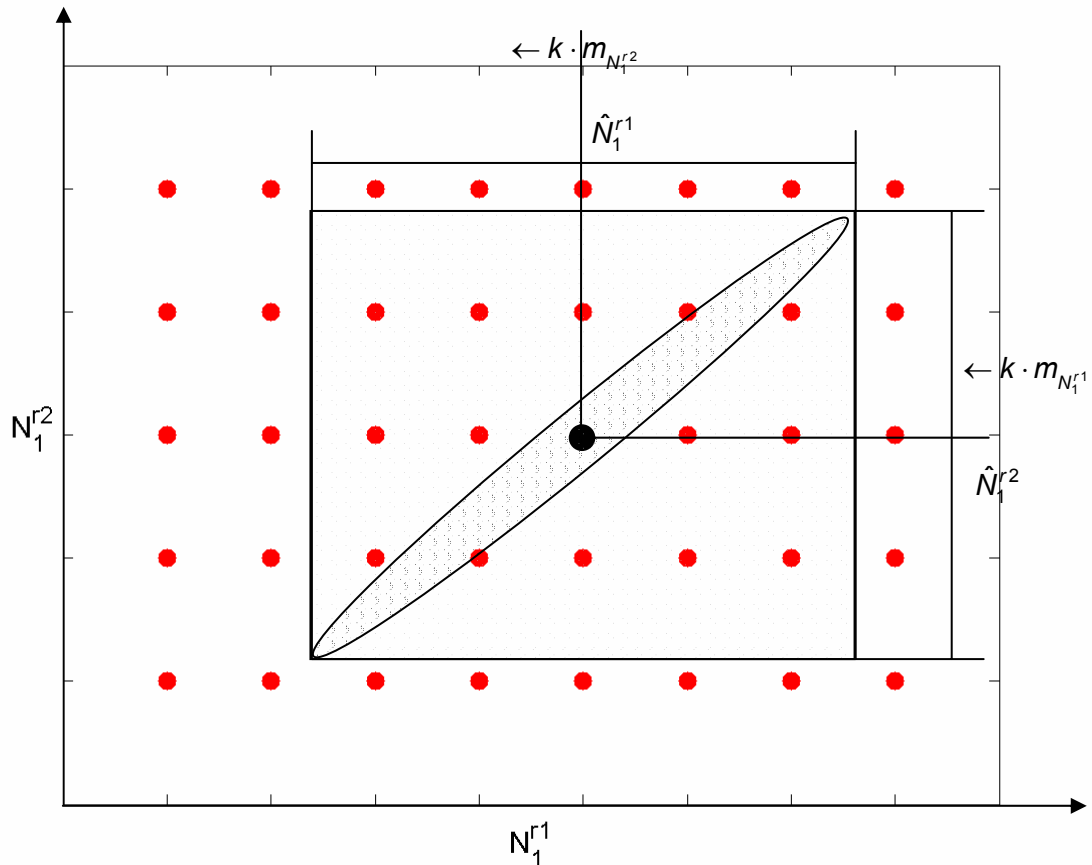


Σχήμα 3.1 : Εύρος τιμών για δύο παραμέτρους ασάφειας



Σχήμα 3.2: Εύρος τιμών παραμέτρων ασάφειας χρησιμοποιώντας τη διαθέσιμη συσχετισμένη πληροφορία για τη συχνότητα L1.

Μια εντυπωσιακή μείωση του πεδίου έρευνας μπορεί να επιτευχθεί εάν είναι διαθέσιμες ταυτόχρονες μετρήσεις φάσεως και στις δύο συχνότητες L1 και L2 (σχήμα 3.3). Σαν αποτέλεσμα οι ασάφειες μπορούν να εκτιμηθούν σε ένα πολύ υψηλό επίπεδο ακρίβειας.



**Σχήμα 3.3:** Εύρος τιμών παραμέτρων ασάφειας χρησιμοποιώντας τη διαθέσιμη συσχετισμένη πληροφορία για τις συχνότητες L1 και L2.

### 3.2. Σφάλματα των μετρήσεων G.P.S.

Τα σφάλματα των μετρήσεων G.P.S. διακρίνονται σε τέσσερις βασικές κατηγορίες α) στα **δορυφορικά σφάλματα**, β) στα **σφάλματα των δεκτών**, γ) στα **σφάλματα των παρατηρήσεων** και δ) στα **σφάλματα σταθμού**. Στα δορυφορικά σφάλματα διακρίνονται τα **τροχιακά σφάλματα** λόγω της λανθασμένης και μη ακριβούς γνώσης της πραγματικής τροχιάς των δορυφόρων καθώς και τα **σφάλματα των χρονομέτρων των δορυφόρων**. Στα σφάλματα των δεκτών ανήκουν τα **σφάλματα των χρονομέτρων των δεκτών** και τα **σφάλματα θορύβου στους δέκτες**. Στα σφάλματα παρατηρήσεων εντάσσονται τα **ατμοσφαιρικά σφάλματα**, δηλαδή οι επιδράσεις των στρωμάτων της ατμόσφαιρας μέσα από τα οποία διέρχεται το δορυφορικό σήμα. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνουμε δύο ειδών ατμοσφαιρικά σφάλματα, το **ιονοσφαιρικό** και το **τροποσφαιρικό**. Τέλος, στα σφάλματα

σταθμού διακρίνουμε το σφάλμα λόγω μη ακριβούς γνώσης των πραγματικών συντεταγμένων του σταθμού και τα σφάλματα λόγω των πολλαπλών ανακλάσεων του σήματος μέχρι να φτάσει από το δορυφόρο στο δέκτη. Τα τελευταία οφείλονται στο φαινόμενο της πολυδιαδρομής (multipath). Παρακάτω θα αναλύσουμε πιο διεξοδικά τα σφάλματα αυτά.

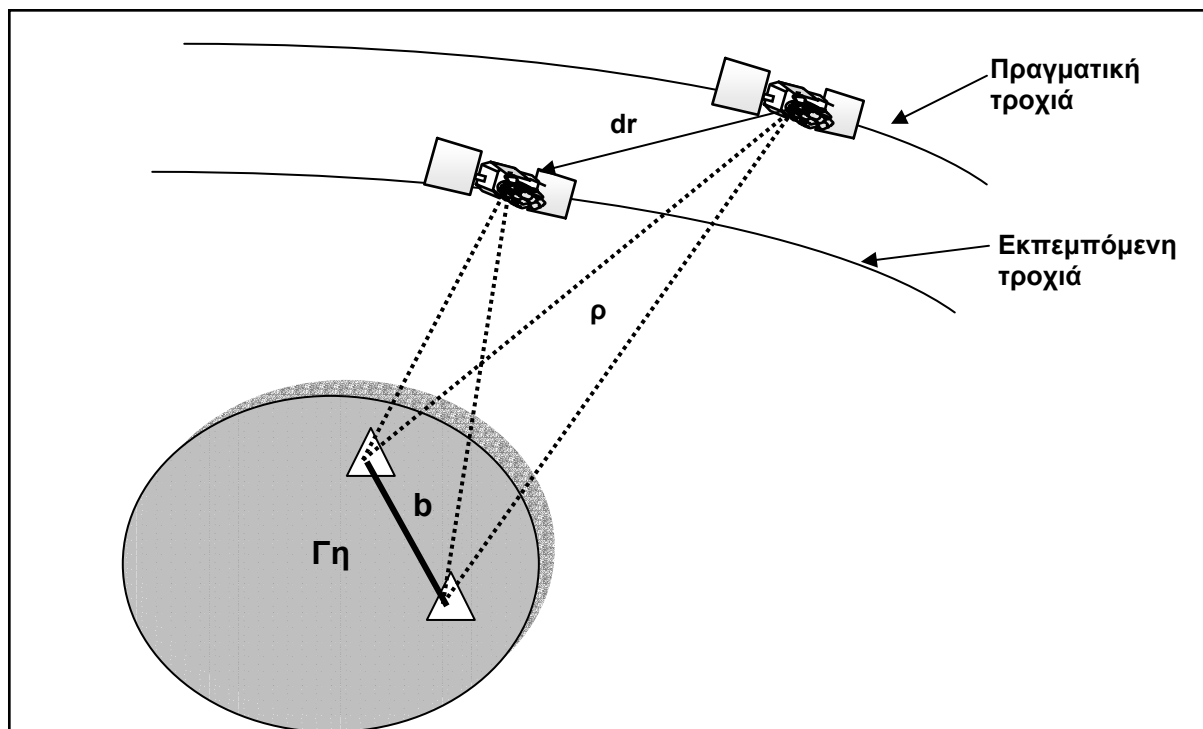
### 3.2.1 Τα δορυφορικά σφάλματα

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω τα δορυφορικά σφάλματα διακρίνονται στο σφάλμα της δορυφορικής τροχιάς και στο σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου.

#### 3.2.1.1 Τα τροχιακά σφάλματα

Για τον ακριβή προσδιορισμό της δορυφορικής τροχιάς, υπάρχουν διασκορπισμένοι στη Γη διάφοροι σταθμοί (βλ. Σχ. 1.6 και 1.7) που είναι επιφορτισμένοι, μεταξύ των άλλων, με το να προσδιορίζουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια τα διάφορα στοιχεία της τροχιάς των δορυφόρων του συστήματος G.P.S.. Αφού επιτευχθεί ο υπολογισμός της τροχιάς, αυτή η λύση μεταδίδεται από τους σταθμούς στους δορυφόρους και στη συνέχεια από τους δορυφόρους στους δέκτες G.P.S. μέσω του μηνύματος ναυσιπλοΐας. Όπως είναι φυσικό, μιας και δεν υπάρχει μέτρηση που να μην περιέχει σφάλματα, οι μεταδιδόμενες εφημερίδες των δορυφόρων για την τροχιά τους δεν παρέχουν την πραγματική θέση του δορυφόρου αλλά κάποια διαφορετική που προσεγγίζει την αληθή με κάποιο σφάλμα. Διαφορές μεταξύ των προβλεπόμενων εφημερίδων που είναι διαθέσιμες στο χρήστη και της πραγματικής τροχιάς, μεταβιβάζονται στη θέση του δέκτη. Είναι προφανές ότι η ακτινική συνιστώσα του σφάλματος τροχιάς αλλοιώνει τον προσδιορισμό της απόστασης και ως εκ τούτου τη θέση του χρήστη σε μεγαλύτερο βαθμό κατά τον προσδιορισμό της θέσης μονού σταθμού (single station) παρά σε σχετικό προσδιορισμό (differential G.P.S.). Για γειτονικούς σταθμούς, τα περισσότερα από τα λάθη της τροχιάς απαλείφονται κατά τον διαφορικό προσδιορισμό. Ένας εμπειρικός κανόνας για την επίδραση  $db$  (σφάλμα στον προσδιορισμό της βάσης), του σφάλματος τροχιάς  $dr$ , στον προσδιορισμό μιας βάσης  $b$  δίνεται από τη σχέση  $db=dr \cdot b/\rho$ , όπου  $\rho$  είναι η απόσταση δορυφόρου-δέκτη και είναι περίπου ίση με 20000 km (σχήμα 3.4). Έτσι το σφάλμα βάσης  $db$  εξαρτάται κυρίως από το λόγο του μήκους της βάσης προς την απόσταση του δορυφόρου από το δέκτη. Η μέγιστη απόσταση ενός δορυφόρου G.P.S. είναι περίπου 25.000 km. Για παράδειγμα, αν μετράμε μία βάση 20 km τότε ένα σφάλμα της τάξης των 20 m στην τροχιά ενός δορυφόρου (σύνηθες όταν η επιλεκτική διαθεσιμότητα δεν είναι ενεργοποιημένη) που βρίσκεται σε απόσταση 20000 km μεταφράζεται σε ένα σφάλμα 2 cm στη θέση του δέκτη. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ένα σφάλμα 1ppm για κάθε 20 m σφάλματος στην τροχιά.





**Σχήμα 3.4:** Επίδραση του σφάλματος τροχιάς στον προσδιορισμό βάσης (baseline determination).

Ο παρακάτω πίνακας (**Πίνακας 3.1**) δείχνει ότι για σχετικό προσδιορισμό θέσης και για μικρές αποστάσεις η απαιτούμενη ακρίβεια τροχιάς δεν αποτελεί κρίσιμο παράγοντα. Αντιθέτως, η απαίτηση για ακρίβεια 1 cm για πολύ μεγάλες αποστάσεις, για παράδειγμα στη γεωδυναμική, προϋποθέτει μια ακρίβεια τροχιάς καλύτερη του 1 m που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί.

Μήκος βάσης	Αποδεκτό σφάλμα τροχιάς
0.1 km	2500 m
1.0 km	250 m
10 km	25 m
100 km	2.5 m
1000 km	0.25 m

**Πίνακας 3.1.** Σχέση μεταξύ σφάλματος τροχιάς ανταποκρινόμενου σε 1 cm λάθους στο μήκος της βάσης.

Στη συνέχεια ο επόμενος πίνακας (**Πίνακας 3.2.**) δίνει μερικά μεγέθη εκφρασμένα σε μέρη στο εκατομμύριο (ppm). Τα στοιχεία των εκπεμπόμενων τροχιών υποδεικνύουν ένα επίπεδο ακρίβειας της τάξης 15 ως 25 m. Σύμφωνα με τον **Πίνακα 3.2** αυτή η ακρίβεια είναι ικανοποιητική για εργασίες με αποστάσεις σημείων ως 10 km. Η ακρίβεια της τροχιάς μπορεί ωστόσο να μειωθεί κάτω από συνθήκες επιλεκτικής διαθεσιμότητας (Selective

Availability condition). Επίσης όταν οι αποστάσεις των σημείων αυξάνονται και απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, η ακρίβεια των εκπεμπόμενων εφημερίδων δεν είναι συνήθως επαρκής. Γι' αυτό το λόγο είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται ακριβείς εφημερίδες που παρέχονται από διεθνείς οργανισμούς και υπηρεσίες.

Σχετική ακρίβεια	Αποδεκτό σφάλμα τροχιάς
5 ppm	125 m
1 ppm	25 m
0.5 ppm	12.5 m
0.1 ppm	2.5 m

**Πίνακας 3.2.** Σχέση μεταξύ σφάλματος τροχιάς ανταποκρινόμενου σε ppm λάθους για μήκος βάσης 1 km.

### 3.2.1.2 Σφάλματα των δορυφορικών χρονομέτρων

Οι δορυφόροι του συστήματος G.P.S. φέρουν ρολόγια, δηλαδή χρονόμετρα, που χρησιμοποιούνται στην καταγραφή του χρόνου εκπομπής του σήματος από τον δορυφόρο προς το δέκτη. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταδίδονται με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή  $c \approx 300000 \text{ km/s}$ , διαπιστώνουμε ότι ένα σφάλμα της τάξης του 1 ms ( $1 \text{ ms} = 0.001 \text{ s}$ ) μεταφράζεται σε σφάλμα 300000 m στον προσδιορισμό θέσης. Αντίστοιχα, ένα σφάλμα της τάξης του 1 ns ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ) μεταφράζεται σε σφάλμα 30 cm στον προσδιορισμό θέσης. Γίνεται επομένως εύκολα αντιληπτό, ότι η ακρίβεια των δορυφορικών χρονομέτρων πρέπει να είναι πολύ μεγάλη, μιας και ένα μικρό σφάλμα στο χρονόμετρο του δορυφόρου, μεταφράζεται σε ένα πολύ μεγάλο σφάλμα στον προσδιορισμό θέσης.

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, οι δορυφόροι είναι εξοπλισμένοι με ατομικά ρολόγια καισίου-ρουβιδίου πολύ μεγάλης ακρίβειας (Lachapelle 2001). Ακόμα και αυτά τα ρολόγια όμως, συσσωρεύουν λάθη λόγω του φαινομένου της ολίσθησης των χρονομέτρων, οπότε γενικά θεωρείται ότι η ακρίβειά τους είναι της τάξης του 1 ms. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο ότι η πληροφορία για το χρονόμετρο του δορυφόρου έρχεται μέσα από το λαμβανόμενο σήμα. Γίνεται κατανοητό ότι με την προαναφερθείσα ακρίβεια των 300000 m δεν μπορεί να γίνει προσδιορισμός θέσης. Έτσι μέσα στο μήνυμα ναυσιπλοΐας περιέχονται τρεις συντελεστές ενός πολυωνύμου το οποίο εφαρμοζόμενο μας δίνει μία διόρθωση στον χρόνο του δέκτη, σύμφωνα με τη σχέση

$$dt = a_{f_0} + a_{f_1}(t - t_{oc}) + a_{f_2}(t - t_{oc})^2 \quad (3.4)$$

όπου  $a_{f_0}$ ,  $a_{f_1}$  και  $a_{f_2}$  είναι οι τρεις συντελεστές του πολυωνύμου που εφαρμόζεται προκειμένου να πάρουμε τη διόρθωση του χρονομέτρου του δορυφόρου. Πώς όμως προσδιορίζονται οι συντελεστές αυτοί; Όπως αναφέρθηκε και στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, υπάρχουν πολλοί σταθμοί παρακολούθησης στη Γη οι οποίοι μεταξύ των άλλων παρέχουν και πληροφορία για τις τροχιές των δορυφόρων. Κατ' αντιστοιχία, παρακολουθούν και τα δορυφορικά χρονόμετρα και συγκρίνοντας τον χρόνο GPS που αυτά εκπέμπουν με το κύριο χρονόμετρο ελέγχου (master control clock), που είναι ένας συνδυασμός περισσοτέρων των δέκα μεγάλης ακριβείας ατομικά χρονόμετρα, προσδιορίζουν τα σφάλματα των δορυφορικών ρολογιών. Τα λάθη και οι ολισθήσεις των χρονομέτρων των δορυφόρων υπολογίζονται και περιλαμβάνονται στα μεταδιδόμενα από τους δορυφόρους σήματα (Δερμάνης 1999). Στον υπολογισμό των αποστάσεων προς τους δορυφόρους, οι δέκτες GPS αφαιρούν τα σφάλματα των χρονομέτρων των δορυφόρων από τον αναφερόμενο χρόνο μετάδοσης, για να προκύψει η «αληθής» διάρκεια μετάδοσης του σήματος. Βέβαια, ακόμη και με την παραδοχή ότι το εφαρμοζόμενο μοντέλο (Εξ. 3.4) καταφέρνει να περιγράψει ικανοποιητικά το σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου, παραμένει ένα σφάλμα της τάξης των ~10 ns που μεταφράζεται σε σφάλμα των ~3 m σε απόσταση. Ο μόνος τρόπος για να απαλειφθεί εντελώς το σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου είναι η χρήση διαφορικού GPS και η εφαρμογή απλών διαφορών μεταξύ δεκτών (βλ. Κεφ. 4).

### 3.2.2 Τα σφάλματα των δεκτών

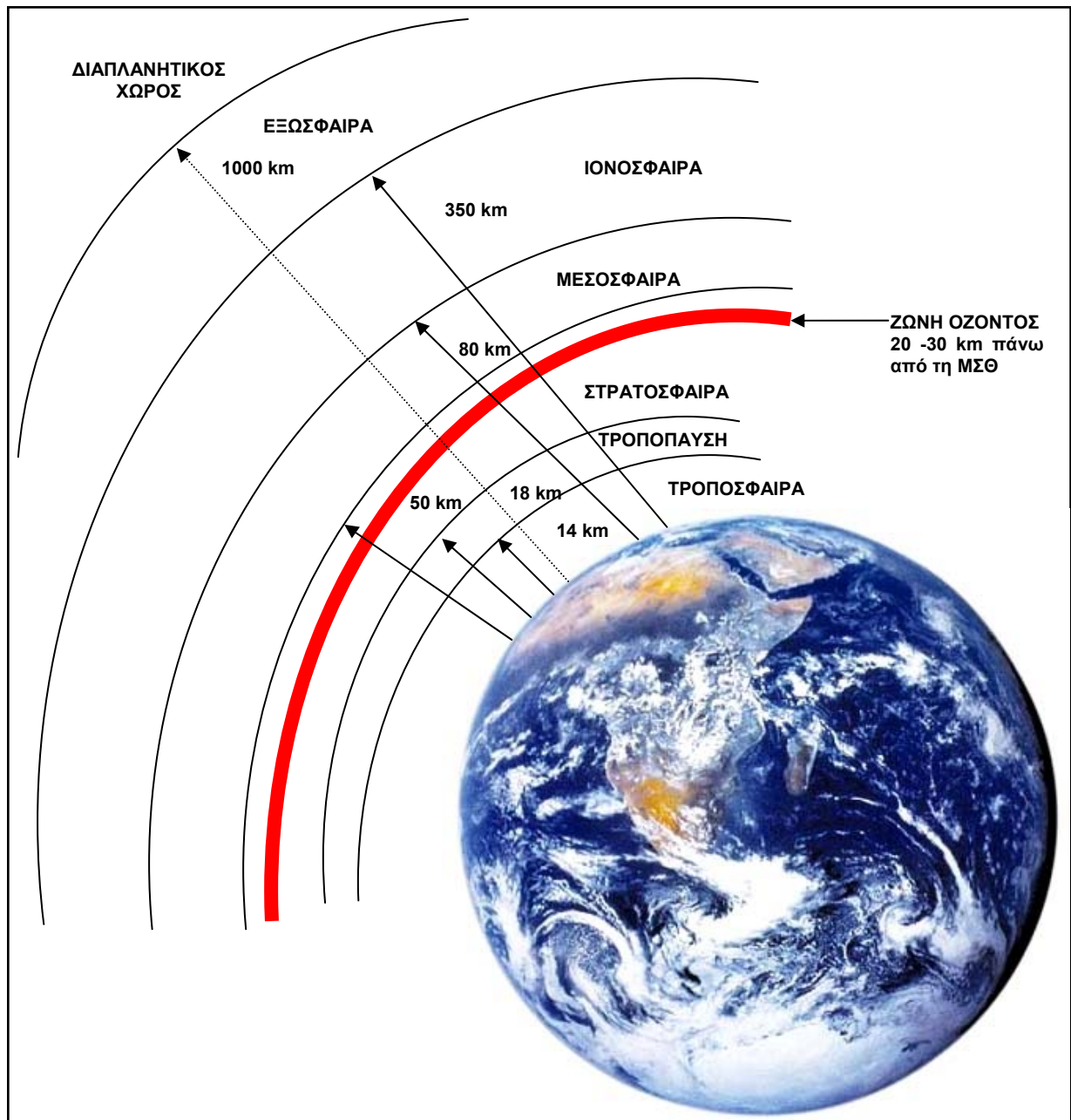
Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στα σφάλματα των δεκτών περιλαμβάνονται το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη και ο θόρυβος στο δέκτη. Το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη είναι ίδιο στη φύση με αυτό του δορυφορικού ρολογιού και οφείλεται σε ατέλειες και σφάλματα των χρονομέτρων που χρησιμοποιούνται. Θα πρέπει και πάλι να τονιστεί ότι οποιαδήποτε μέτρηση και οποιοδήποτε όργανο μέτρησης κάποιας ποσότητας περιέχει σφάλματα. Τα ρολόγια των δεκτών δεν είναι φυσικά τόσο μεγάλης ακρίβειας σαν αυτά των δορυφόρων μιας και αυτό θα σήμαινε κατακόρυφη αύξηση του κόστους τους. Αρκεί να αναφερθεί ότι τα ατομικά χρονόμετρα ακριβείας με τα οποία εξοπλίζονται οι δορυφόροι ζυγίζουν περισσότερο από 20 κιλά, κοστίζουν περίπου \$50000 και απαιτούν εκτεταμένη φροντίδα (Lachapelle 2001).

Γενικά, τα σφάλματα στο ρολόγια των δεκτών είναι της τάξης των 200 ns μέχρι μερικά ms που σημαίνει ότι το σφάλμα που εισαγάγουμε ποικίλει από 60 – 300000 m ή και

παραπάνω. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, προκειμένου να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός δέκτη, δηλαδή το διάνυσμα θέσης του  $(x,y,z)$ , πραγματοποιούμε πολλές μετρήσεις προς πολλούς, τουλάχιστον τέσσερεις, δορυφόρους. Έτσι η λύση προκύπτει από μια μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων κατά την οποία εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο του διανύσματος των σφαλμάτων τους (Δερμάνης 1986). Σε πλήρη αναλογία, έχουμε τη δυνατότητα να εισαγάγουμε το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη σαν μία τέταρτη άγνωστη παράμετρο σε αυτή τη διαδικασία συνόρθωσης των παρατηρήσεων και να υπολογίσουμε μία βέλτιστη εκτίμησή της (βλ. και §3.6 και Κεφ. 4). Βέβαια, προκειμένου να εισαχθεί το χρονόμετρο του δέκτη σαν άγνωστη ποσότητα πρέπει οι παρατηρήσεις προς τους (τέσσερεις) δορυφόρους να είναι ταυτόχρονες μιας και αν πραγματοποιούνται διαφορετικές χρονικές στιγμές θα έχουν διαφορετικά σφάλματα χρονομέτρου του δέκτη. Μία άλλη δυνατότητα απαλοιφής του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη είναι το διαφορικό GPS δηλαδή ο σχηματισμός απλών διαφορών μεταξύ δορυφόρων (βλ. Κεφ. 4).

### **3.2.3 Η δομή της ατμόσφαιρας και τα ατμοσφαιρικά σφάλματα**

Η περιοχή των αερίων που περιβάλλει τον πλανήτη Γη είναι γνωστή σαν ατμόσφαιρα. Εξαιτίας της ύπαρξης της ατμόσφαιρας είναι δυνατή και η ύπαρξη ζωής στη Γη καθώς και η δημιουργία των γνωστών μετεωρολογικών φαινομένων όπως η βροχή, το χιόνι το χαλάζι και φυσικά η νέφωση. Η γήινη ατμόσφαιρα διακρίνεται σε ομόκεντρα, σχεδόν σφαιρικά στρώματα τα οποία χωρίζονται από στενές ζώνες μεταβίβασης από το ένα στο άλλο (Σχ. 3.5). Το τελευταίο όριο της ατμόσφαιρας, πέρα από το οποίο τα ατμοσφαιρικά αέρια διαφεύγουν στην ατμόσφαιρα, βρίσκεται σε ένα υψόμετρο περίπου 1000 km πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, ενώ περισσότερο από 99% των ατμοσφαιρικών αερίων εντοπίζεται στα πρώτα 40 Km από την επιφάνεια της Γης. Η διακριτοποίηση των προαναφερθέντων στρωμάτων γίνεται βάσει των διαφορών στη χημική σύσταση που έχουν σαν συνέπεια, μεταξύ των άλλων, και μεταβολές στη θερμοκρασία. Έτσι, η ατμόσφαιρα της Γης διακρίνεται στις: α) τροπόσφαιρα που εκτείνεται από την επιφάνεια της θάλασσας μέχρι και ύψος 14 km πάνω από αυτή, β) στρατόσφαιρα που εκτείνεται από 18 – 50 km πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, γ) μεσόσφαιρα που εκτείνεται από 50 – 80 km πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, δ) ιονόσφαιρα που εκτείνεται από 80 – 350 km πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας και ε) εξώσφαιρα που εκτείνεται από 350 – 1000 km πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (βλ. Σχ. 3.5). Μετά την εξώσφαιρα βρίσκεται ο διαπλανητικός χώρος.



Σχήμα 3.5: Η δομή της ατμόσφαιρας της Γης.

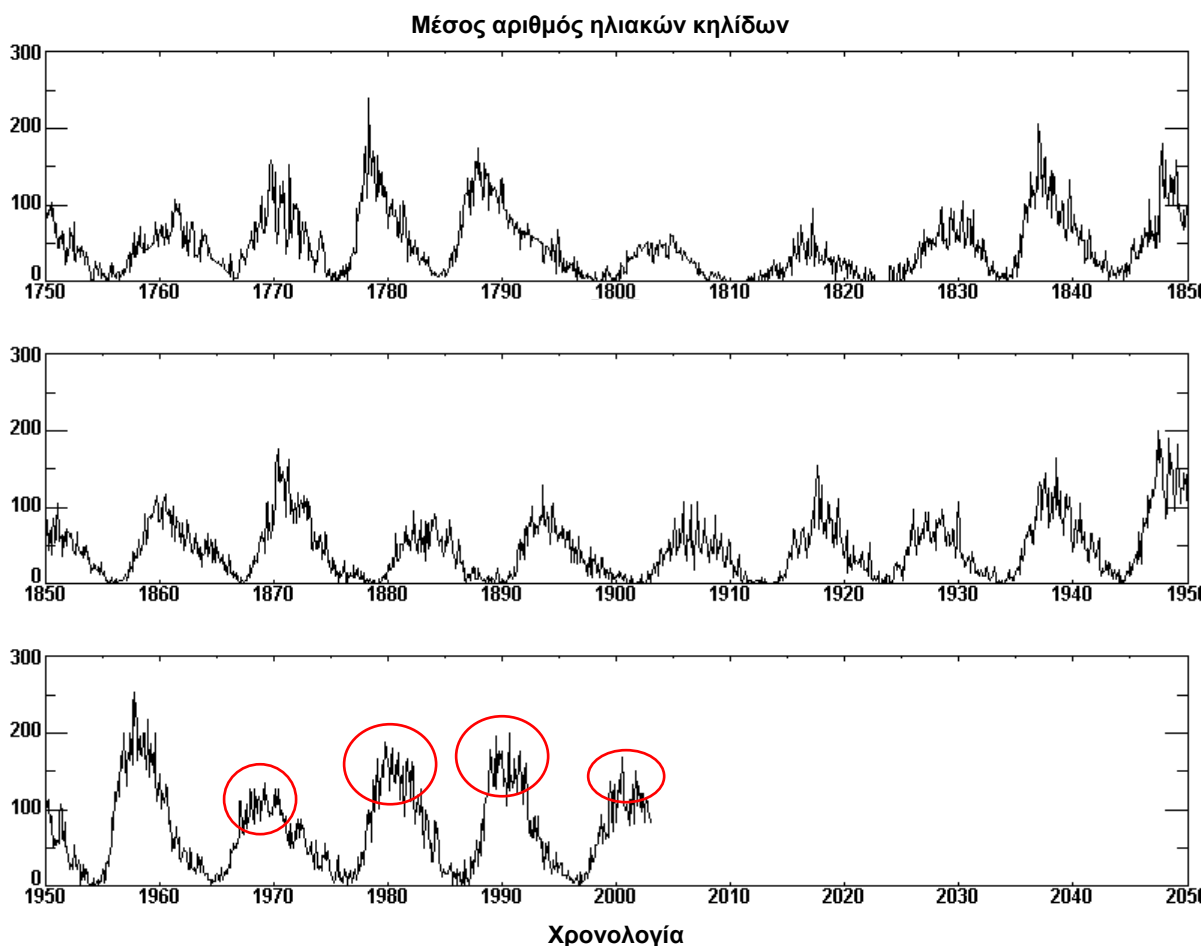
### 3.2.3.1 Επιδράσεις της ιονόσφαιρας στα σήματα G.P.S.

Η ιονόσφαιρα είναι στρώμα της ανώτερης ατμόσφαιρας το οποίο περιέχει φορτισμένα ιόντα και ηλεκτρόνια. Η ιονόσφαιρα επιφέρει στα κύματα του GPS :

- Καθυστέρηση του κύματος του οποίου η ταχύτητα γίνεται μικρότερη από αυτή του φωτός.
- Διάθλαση

Η καθυστέρηση και η διάθλαση του σήματος στην ιονόσφαιρα, εξαρτάται από την περιεκτικότητα ηλεκτρονίων κατά την πορεία του σήματος και από τη συχνότητα του

διερχόμενου κύματος. Η περιεκτικότητα των ηλεκτρονίων επηρεάζεται από την ηλιακή ακτινοβολία και το γεωμαγνητικό πεδίο. Η επίδραση της ιονόσφαιρας εκφράζεται συνήθως σε σχέση με τη λεγόμενη συνολική περιεκτικότητα ηλεκτρονίων (total electron content - TEC) που αποτελεί τον συνολικό αριθμό των ηλεκτρονίων σε μία κατακόρυφη εγκάρσια επιφάνεια εμβαδού  $1 \text{ m}^2$ . Η περιεκτικότητα της ατμόσφαιρας σε ηλεκτρόνια έχει ημερήσιες, εποχικές και περιοδικές μεταβολές με συνέπεια η επίδραση της ιονόσφαιρας στις μετρήσεις GPS, και κατά συνέπεια το σφάλμα που εισάγεται, να ποικίλει. Έτσι το TEC και το ιονοσφαιρικό σφάλμα είναι μεγαλύτερα τις μεσημβρινές ώρες από ότι τις βραδινές, κατά τους μήνες Μάρτιο – Μάιο σε σχέση με τους υπόλοιπους και τέλος κατά την κορυφή της ηλιακής δραστηριότητας που λαμβάνει χώρα κάθε 11 χρόνια. Στο Σχ. 3.6 φαίνεται ο κύκλος της ηλιακής δραστηριότητας από το 1750 έως σήμερα, από όπου διαπιστώνουμε την περιοδικότητα του φαινομένου (11 χρόνια) καθώς και ότι σήμερα (2003) τείνουμε προς το επόμενο ελάχιστο που θα λάβει χώρα το 2006.



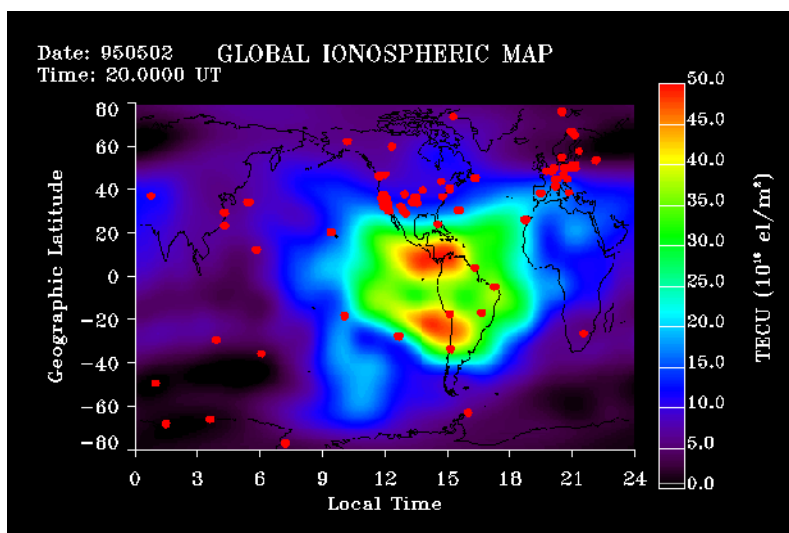
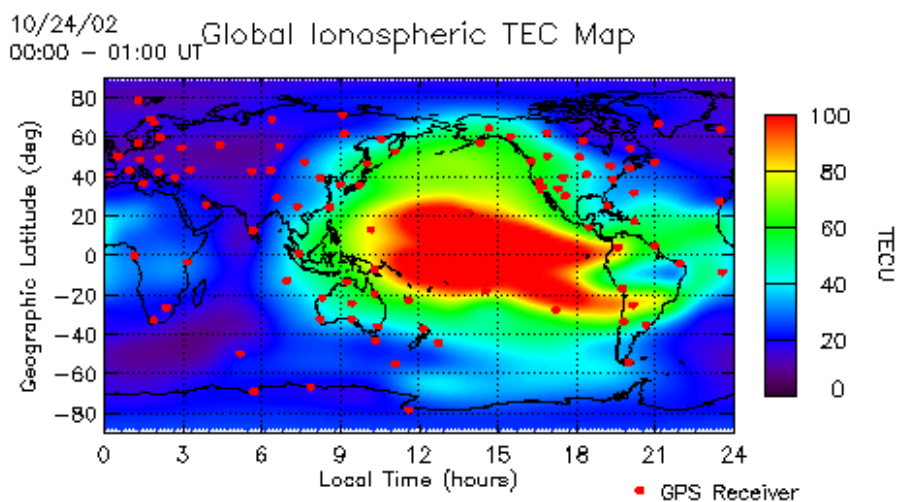
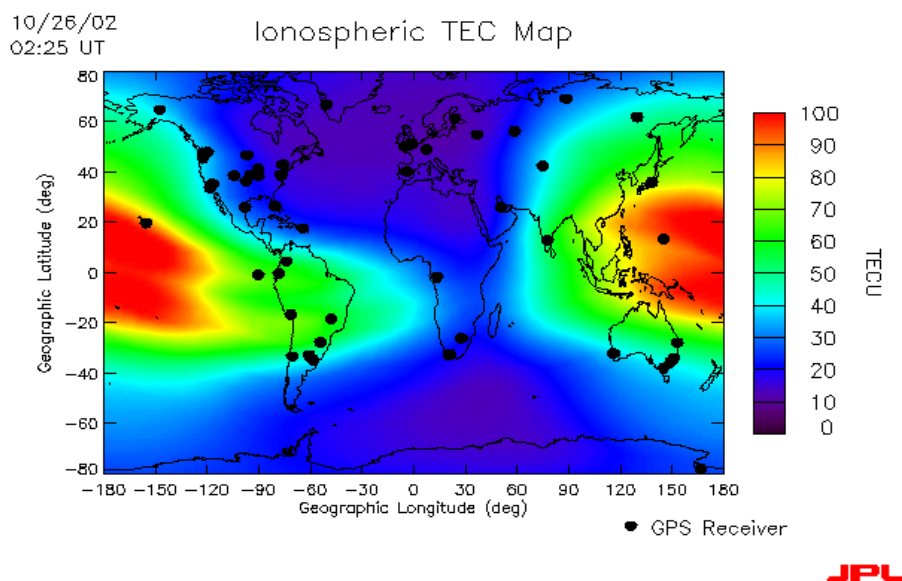
**Σχήμα 3.6:** Η ηλιακή δραστηριότητα από το 1750 – σήμερα (Φώτο από NASA<sup>1</sup>).

Η ιονοσφαιρική επίδραση εξαρτάται από τη συχνότητα, τη γεωγραφική θέση και το χρόνο. Το σφάλμα στη μέτρηση των αποστάσεων ποικίλει από λιγότερο του 1 m έως και

<sup>1</sup> <http://science.nasa.gov/ssl/pad/solar/images/zurich.gif>.

περισσότερο από 100 m (Wells et al. 1986, Klobuchar 1991). Οι δέκτες διπλής συχνότητας κάνουν χρήση του γεγονότος ότι τα L1 και L2 σήματα υφίστανται διαφορετική καθυστέρηση στην ιονόσφαιρα. Ο συνδυασμός της L1 και L2 συχνότητας μειώνει την επίδραση της ιονοσφαιρικής διάθλασης. Πρέπει να επισημανθεί επιπλέον ότι η ιονόσφαιρα είναι ένα μέσο διασποράς (dispersive) για τα ραδιοκύματα με συνέπεια η καθυστέρηση της φάσης να είναι διαφορετική αυτής του κώδικα. Ανωμαλίες στην ιονόσφαιρα της γης μπορούν να παράγουν μικρής περιόδου μεταβολές στο πλάτος του σήματος και στη φάση (Wanninger L 1992). Αυτές οι μεταβολές λαμβάνουν κατά κύριο λόγο χώρα σε μία ζώνη 30° εκατέρωθεν του γήινου γεωμαγνητικού ισημερινού και στις πολικές ζώνες (polar auroral zone). Πολύ μεγάλη περιεκτικότητα ηλεκτρονίων συναντάται σε περιοχές του ισημερινού (βλ. Σχ. 3.7). Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 3.7) η Ελλάδα και η ευρύτερη περιοχή βρίσκονται εκτός της ζώνης επικινδυνότητας. Οι επιδράσεις στον ισημερινό παίρνουν μέγιστες τιμές μια ώρα περίπου μετά την τοπική ανατολή του ηλίου μέχρι περίπου τα μεσάνυχτα (Klobuchar JA 1991). Η μεταβολή της περιεκτικότητας της ατμόσφαιρας σε ηλεκτρόνια για την Ελλάδα, φαίνεται στο Σχ. 3.8 από όπου φαίνεται ότι το μέγιστο βρίσκεται περί τις 12:00 το μεσημέρι.

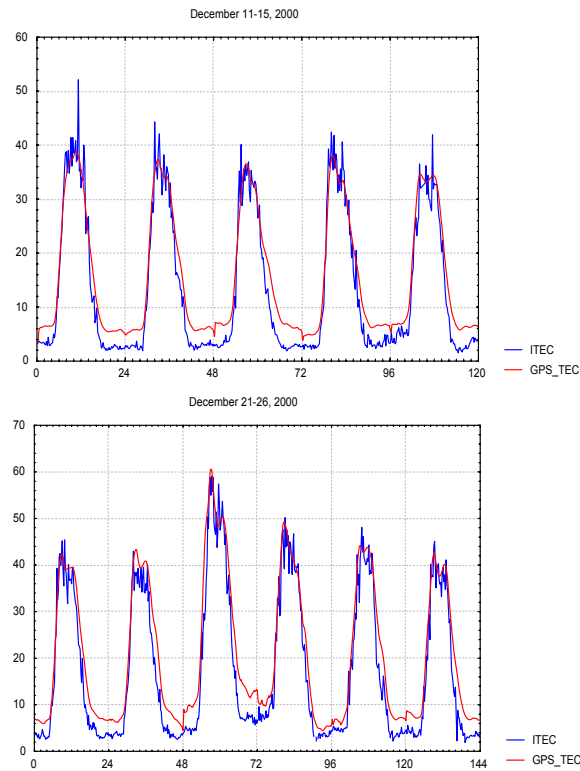
Οι επιδράσεις λόγω ιονόσφαιρας μπορούν να προκαλέσουν και έναν μεγάλο αριθμό κύκλων ολίσθησης (cycle slips) επειδή ο δέκτης δεν μπορεί να ακολουθήσει τις σύντομες διαλείψεις του σήματος. Μια πολύ μεγάλη περιεκτικότητα ηλεκτρονίων προκαλεί αισθητά οριζοντιογραφικές αποκλίσεις και αλλοιώνει την επίλυση των ασαφειών με τη γεωμετρική μέθοδο, ακόμα και σε μικρές αποστάσεις, επειδή η ιονοσφαιρική επίδραση επικαλύπτει ακόμα και το μεγάλο μήκους κύμα L5 (wide lane  $\lambda = 86$  cm) μέσα σε λίγα λεπτά χρόνου παρατήρησης (Wanninger and Jahn 1991). Η μόνη αξιόπιστη πιθανότητα επίλυσης των ασαφειών έως τώρα είναι ο συνδυασμός κώδικα - φάσης χρησιμοποιώντας δεδομένα από δέκτες που λαμβάνουν τον P - κώδικα. Τέλος μια εναλλακτική προσπάθεια αντιμετώπισης της παραπάνω επίδρασης είναι η μοντελοποίηση της ιονόσφαιρας με τη βοήθεια παρατηρήσεων TRANSIT (Lohmar 1985) ή με παρατηρήσεις διπλής συχνότητας δέκτη G.P.S. τοποθετημένο στο κέντρο της περιοχής εργασίας (Georgiady and Kleusberg 1988). Η ιονόσφαιρα αποτελεί τον κύριο παράγοντα επίδρασης σφαλμάτων στα σήματα G.P.S.



**Σχήμα 3.7:** Περιοχές του κόσμου με υψηλή ιονοσφαιρική δραστηριότητα και πυκνότητα ηλεκτρονίων (Πηγή: NASA - JPL<sup>2</sup>).

<sup>2</sup> <http://www.jpl.nasa.gov>





**Σχήμα 3.8:** Περιεκτικότητα της ατμόσφαιρας σε ηλεκτρόνια σε σταθμό των Αθηνών κατά τη διάρκεια πέντε ημερών (Σχ. από Reinisch et al. (2002)<sup>3</sup>).

### 3.2.3.2 Επιδράσεις της τροπόσφαιρας στα σήματα G.P.S.

Ένα άλλο σφάλμα που υπεισέρχεται στις μετρήσεις G.P.S. είναι και το τροποσφαιρικό εξαιτίας της καθυστέρησης του σήματος κατά τη διέλευσή του από την τροπόσφαιρα. Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, η τροπόσφαιρα αποτελεί εκείνο το στρώμα της ατμόσφαιρας στο οποίο δημιουργούνται και λαμβάνουν χώρα όλα τα μετεωρολογικά φαινόμενα του πλανήτη μας, μιας και σε αυτό συγκεντρώνεται το σύνολο σχεδόν των υδρατμών της ατμόσφαιρας. Η τροπόσφαιρα εκτείνεται σε ένα υψόμετρο περίπου 9 km πάνω από τους πόλους και περίπου 16 km πάνω από τον ισημερινό. Η καθυστέρηση του σήματος στην τροπόσφαιρα είναι σημαντική για τον ακριβή προσδιορισμό θέσης και βάσης μιας και οι τροποσφαιρικές παράμετροι είναι φτωχά συσχετισμένες για μεγάλες αποστάσεις. Για συχνότητες του ραδιοφάσματος η τροποσφαιρική καθυστέρηση είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα, γι' αυτό και σε αντίθεση με την επίδραση της ιονόσφαιρας δεν μπορεί να καθοριστεί από μετρήσεις με δέκτες διπλής συχνότητας. Η τροποσφαιρική

<sup>3</sup> Reinisch BW, Huang X, Belehaki A, Jodogne J-C (2001) Bottom and Topside Ionospheric TEC Obtained From Ground-Based Ionosonde Measurements. Beacon Satellite Symposium Proceedings.

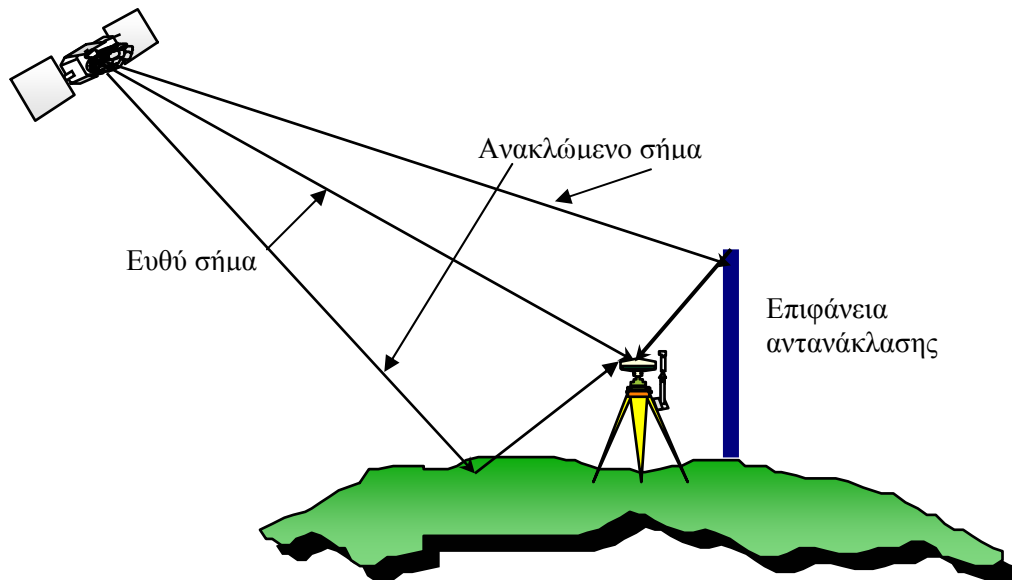
επίδραση μεταβάλλεται συναρτήσει της ζενίθιας γωνίας μεταξύ δορυφόρου δέκτη και λαμβάνει τιμή 2.3 m όταν ο δορυφόρος βρίσκεται στο ζενίθ της θέσης του δέκτη και τιμή 9.3 m για γωνία 75°. Σχετικά απλά μοντέλα προσεγγίζουν τη συνολική επίδραση με μια ακρίβεια της τάξης των 20 cm που είναι αρκετή για προσδιορισμό θέσης χαμηλής ακρίβειας. Όταν όμως το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός θέσης με πολύ μεγάλη ακρίβεια (π.χ. καλύτερη του 1 cm) τότε γίνεται κατανοητό ότι τέτοια μοντέλα δεν είναι επαρκή. Για τον υπολογισμό της τροποσφαιρικής καθυστέρησης θεωρούμε ένα διαχωρισμό της ατμόσφαιρας σε δύο συνιστώσες την **ξηρή συνιστώσα**, δηλαδή την επίδραση της ατμόσφαιρας χωρίς περιεκτικότητα υδρατμών και την **υγρή συνιστώσα**, δηλαδή την επίδραση της υγρασίας της ατμόσφαιρας που υπολογίζεται ξεχωριστά.

Η υγρή συνιστώσα εξαρτάται από την κατανομή των υδρατμών στην ατμόσφαιρα και γι' αυτό είναι δύσκολο να μοντελοποιηθεί. Η υγρή συνιστώσα αποτελεί το 10% του συνόλου της τροποσφαιρικής διάθλασης. Η συνολική καθυστέρηση στις ζενίθιες διευθύνσεις ανέρχεται σε 2.3 m και αυξάνει κοντά στον ορίζοντα (10° κλίση) σε περίπου 20 m. Η ξηρή συνιστώσα μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια του 1% από τα γνωστά μοντέλα. Αν οι σταθμοί παρατηρήσεις είναι κοντά μεταξύ τους το τροποσφαιρικό υπολειπόμενο σφάλμα σχεδόν εξαλείφεται χρησιμοποιώντας τη διαφορική μεθοδολογία μετρήσεων. Επομένως δεν ενδείκνυται η εισαγωγή παρατηρηθέντων μετεωρολογικών δεδομένων (ξεχωριστή για κάθε σταθμό) στη συνόρθωση ενός μικρού δικτύου. Σε πεδινές εκτάσεις οι τοπικές παρατηρήσεις συνήθως δεν περιγράφουν την κατάσταση της ατμόσφαιρας στην περιοχή με επαρκή ακρίβεια. Όταν οι αποστάσεις των σταθμών είναι μεγαλύτερες των 50 Km ή οι υψομετρικές τους διαφορές είναι μεγάλες ιδιαίτερα σε ορεινές περιοχές οι τοπικές ατμοσφαιρικές συνθήκες δεν είναι πλέον ικανοποιητικά συσχετισμένες. Επομένως η μοντελοποίηση παραμένει δύσκολη. Θεωρείται ότι η υγρή καθυστέρηση είναι η λιγότερο ελεγχόμενη από όλες τις αιτίες εισαγωγής λαθών στο σύστημα G.P.S. (Bock, Shimada 1990). Για μεγάλες βάσεις ή όταν η υψομετρική διαφορά των σταθμών είναι μεγάλη θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ραδιόμετρο υγρασίας (water-vapour radiometer) προκειμένου να μετρώνται οι μετεωρολογικές παράμετροι (θερμοκρασία, πίεση, περιεκτικότητα σε υδρατμούς, κ.λ.π.) του σταθμού. Βέβαια αυτή η λύση είναι πολύ ακριβή ( ) και ενδείκνυται μόνο για μόνιμους σταθμούς G.P.S..

### **3.2.4 Η επίδραση της πολυδιαδρομής (multipath) στις μετρήσεις GPS.**

Ένα από τα κύρια σφάλματα που επισέρχεται στις μετρήσεις με το σύστημα GPS είναι η (πολύ) διαδρομή-ανάκλαση του σήματος. Λέγοντας (πολύ) διαδρομή-ανάκλαση (multipath)

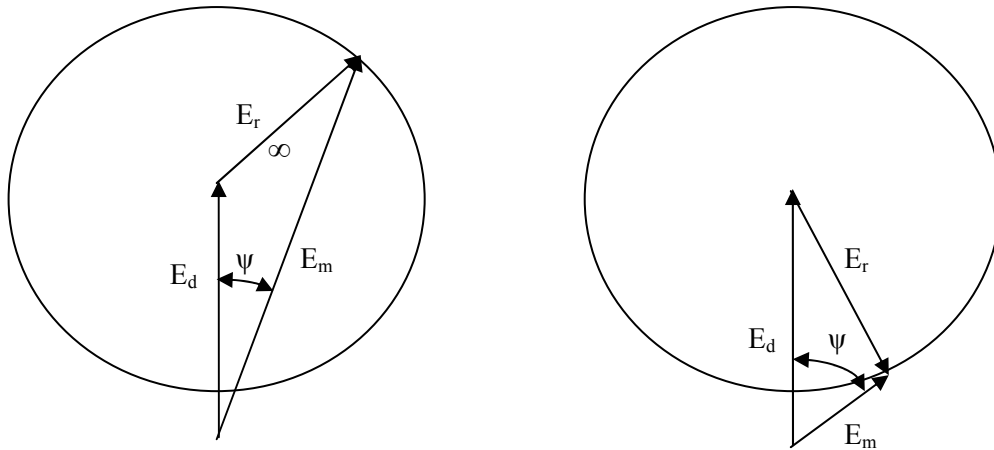
εννοούμε την άφιξη του σήματος στην κεραία του δέκτη ύστερα από αρκετές ανακλάσεις που έχουν συμβεί σ' αυτό από την επιφάνεια του εδάφους και των γειτονικών αντικειμένων (π.χ. κτίρια, αυτοκίνητα, δέντρα κ.λπ.) (Σχ. 3.9). Το ανακλώμενο σήμα παραποιεί όχι μόνο τους κώδικες αλλά και τις φάσεις. Κάτω από άσχημες συνθήκες η ανάκλαση μπορεί να επιφέρει μέχρι και χάσιμο του σήματος (loss of lock) (Σχ. 3.9).



**Σχήμα 3.9:** Το φαινόμενο της πολυδιαδρομής (multipath).

Η υποβάθμιση στις ψευδοαποστάσεις συμβαίνει εξαιτίας της παραποίησης της μέγιστης τιμής (κορυφής) της συνάρτησης συσχέτισης, μεταξύ του δορυφορικού σήματος και του αντίγραφου που παράγεται στο δέκτη, λόγω της ύπαρξης του ανακλώμενου σήματος. Η επίδραση στη φέρουσα συχνότητα γίνεται κατανοητή με το παρακάτω σχήμα (βλ. Σχ. 3.10).

Το στιγμιαίο λάθος εξαιτίας της διαδρομής στη συχνότητα είναι η γωνία  $\psi$  μεταξύ του διανύσματος  $E_d$  ευθύ σήμα (direct signal) και του διανύσματος  $E_m$  που είναι το διάνυσμα του αθροίσματος του ευθέως διαδιδόμενου σήματος και του ανακλώμενου  $E_r$  (reflected signal). Όπως φαίνεται από το σχήμα η γωνία  $\psi$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το διάνυσμα του ανακλώμενου σήματος και το διάνυσμα αθροίσματος ( $E_r + E_d$ ) γίνουν κάθετα μεταξύ τους.



**Σχήμα 3.10:** Επίδραση της πολυδιαδρομής (multipath) στη φέρουσα συχνότητα.

Για μικρές αποστάσεις (baselines) και μικρά δίκτυα, το σφάλμα από την ανάκλαση θα είναι το ίδιο και στα δύο άκρα κάθε απόστασης οπότε κατά την επεξεργασία του σχετικού προσδιορισμού θα αφαιρείται (Young et al. 1985). Η ύπαρξη του φαινομένου της ανάκλασης εξαρτάται κυρίως από την ανακλαστικότητα των αντικειμένων που υπάρχουν στο χώρο γύρω από την κεραία. Εάν η κεραία παραμένει στο ίδιο σημείο (στατικός προσδιορισμός) η επίδραση της ανάκλασης θα επαναληφθεί ξανά μετά από μία αστρική ημέρα εξαιτίας της επαναλαμβανόμενης γεωμετρίας δορυφόρων-δέκτη και ανακλώμενων επιφανειών. Το μέγεθος του σφάλματος αυτού μπορεί να φτάσει και τα 10-20 m για μετρήσεις μόνο με κώδικες. Οι Tranquilla και Carr ταξινομούν τα λάθη από την ανάκλαση (για μετρήσεις κωδικών) σε τρεις τάξεις: (1) όταν το δορυφορικό σήμα διέρχεται μέσα σε ένα χώρο όπου βρίσκονται αρκετές μεταλλικές κατασκευές γύρω από την κεραία. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να εισαχθεί σφάλμα μέχρι και 10 m στην απόσταση δορυφόρου δέκτη, (2) ανακλάσεις από τα κτίρια που βρίσκονται κοντά στην κεραία, όπου το σφάλμα που επισέρχεται τότε μπορεί να φτάσει και τα 6 m και (3) ανακλάσεις από χαμηλής συχνότητας σήματα που συνήθως περιέχονται στο δορυφορικό σήμα όταν αυτό διέρχεται πάνω από υδάτινες επιφάνειες. Το εισερχόμενο σφάλμα σ' αυτή την περίπτωση μπορεί να φτάσει και πάλι τα 10 m. Στο Σχ. 3.10 φαίνεται γραφικά η διαφορά μεταξύ του ευθέως και του ανακλώμενου σήματος.

### 3.2.4.1 Μαθηματική περιγραφή των ανακλώμενων σημάτων GPS

Η τάση ενός σήματος που λαμβάνεται από το κέντρο φάσης της κεραίας περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:  $S_d = V \cos(\varphi)$ , όπου η ποσότητα  $V$  δηλώνει το εύρος της τάσης του σήματος και η  $\varphi$  τη φάση αυτού. Το ανακλώμενο σήμα θα έχει γενικά μία μετάθεση στη φάση κατά  $\theta$  και μία μείωση στο εύρος της τάσης κατά  $\alpha V$  όπου  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Επομένως, το

ανακλώμενο σήμα θα ισούται με  $S_r = aV\cos(\varphi+\theta)$ . Οπότε το τελικό σήμα που θα φτάνει στην κεραία θα ισούται με  $S = S_d + S_r$ , δηλαδή θα ισχύει ότι

$$S = S_d + S_r = V\cos(\varphi) + aV\cos(\varphi+\theta) \quad (3.5)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων, καταλήγουμε ότι

$$S = V\cos(\varphi) + aV\cos(\varphi)\cos(\theta) - aV\sin(\varphi)\sin(\theta) = ((1+V\cos(\theta))a\cos(\varphi) - V\sin(\theta) - a\sin(\varphi)) \quad (3.6)$$

το οποίο ισούται με  $S = \beta V\cos(\varphi+\psi)$

θέτοντας ως:  $\beta\cos(\psi) = 1+V\cos(\theta)$  και  $\beta\sin(\psi) = V\sin(\theta)$ . Υψώνοντας στο τετράγωνο τις δύο προηγούμενες σχέσεις και αθροίζοντας ταυτόχρονα έχουμε

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1+V^2\cos^2(\theta) + 2V\cos(\theta) + V^2\sin^2(\theta) \Rightarrow \beta^2 = 1+V^2 + 2V\cos(\theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta &= \sqrt{1+V^2 + 2V\cos(\theta)} \quad \text{και} \quad \psi = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{a^{-1} + \cos(\theta)}\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Θεωρώντας ότι  $a \ll 1$  έχουμε ότι  $\psi \approx a\sin(\theta)$ .

Εξαιτίας της συνεχούς αλλαγής της γεωμετρίας μεταξύ δορυφόρων, δέκτη και ανακλώμενης επιφάνειας η διαφορά φάσης ( $\theta$ ) μεταξύ του ευθέως και του ανακλώμενου σήματος θα αλλάζει σιγά-σιγά με το χρόνο επιφέροντας κυκλικές αλλαγές του σφάλματος  $\psi$ . Για δεδομένη τιμή του  $a$  η μέγιστη τιμή του  $\psi$  θα ισούται με  $\psi_{max} = \pm\arcsin(a)$  για  $\theta_{(\psi_{max})} = \pm\arccos(-a)$ . Από αυτό προκύπτει ότι το εύρος του ανακλώμενου σήματος εξαρτάται μόνο από την ισχύ του που εκφράζεται μέσω του συντελεστή  $a$ . Το μέγιστο σφάλμα στη φάση συμβαίνει όταν  $a=1$  και  $\theta=90^\circ$ . **Αυτό αντιστοιχεί σε ένα λάθος στην απόσταση περίπου ίσο με 4.8 cm, για μετρήσεις στη μία συχνότητα (L1).** Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το παραπάνω σφάλμα αυξάνει εάν χρησιμοποιηθούν γραμμικοί συνδυασμοί συχνοτήτων, όπως για παράδειγμα ο συνδυασμός της ευρείας οδού -wide lane- με μήκος κύματος  $\lambda=86$  cm.

### 3.2.4.2 Ανίχνευση και μείωση των ανακλώμενων σημάτων στις μετρήσεις GPS.

Στις μετρήσεις με τις φέρουσες συχνότητες το σφάλμα από την ανακλώμενη φάση είναι δύσκολο να ανιχνευθεί. Μόνο η ανάλυση των εκτιμήσεων των σφαλμάτων μετά την συνόρθωση μπορεί να δείξει την ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων. Όπως έχει αναφερθεί, ο κύριος σκοπός των μετρήσεων και στις δύο συχνότητες είναι η μείωση -εξάλειψη- της ιονοσφαιρικής επίδρασης. Για μικρές αποστάσεις η υπολειπόμενη

ιονοσφαιρική επίδραση θα είναι πολύ μικρή, οπότε οι μεγάλες διακυμάνσεις των σφαλμάτων θα είναι ένας δείκτης για την ύπαρξη του φαινομένου της ανάκλασης.

Ο καλύτερος τρόπος προκειμένου να μειωθεί δραματικά η επίδραση της ανάκλασης είναι να αποφεύγουμε τις μετρήσεις μέσα σε περιοχές με έντονη δόμηση και γενικά κοντά σε οποιαδήποτε επιφάνεια. Εάν όμως αυτό δεν είναι εφικτό τότε η ανάκλαση εισάγει ένα σημαντικό σφάλμα στον προσδιορισμό των αποστάσεων και κυρίως σε αποστάσεις μικρού εύρους. Η μείωση τότε της ανάκλασης μπορεί να επιτευχθεί εάν ο χρόνος παρατήρησης είναι μεγαλύτερος από την μεγαλύτερη περίοδο ανάκλασης που συμβαίνει μέσα σε ταυτόχρονες παρατηρήσεις. Αυτό όμως έχει σαν επίπτωση την αύξηση του κόστους των μετρήσεων. Η εμπειρία έδειξε ότι απαιτείται ένα παράθυρο παρατήρησης τουλάχιστον 30 λεπτών. Η επίδραση των ανακλώμενων σημάτων γίνεται εξαιρετικά “επικίνδυνη” στις κινηματικές μεθόδους/εφαρμογές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η χρησιμοποίηση κεραίας τύπου Choke Ring όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11, η οποία έχει σχεδιαστεί κατάλληλα με σκοπό την μείωση της ανάκλασης.



**Σχήμα 3.11:** Το Choke Ring που χρησιμοποιείται για την ελαχιστοποίηση του φαινομένου της πολυδιαδρομής στους δέκτες GPS.

### 3.3 Ολίσθηση κύκλων

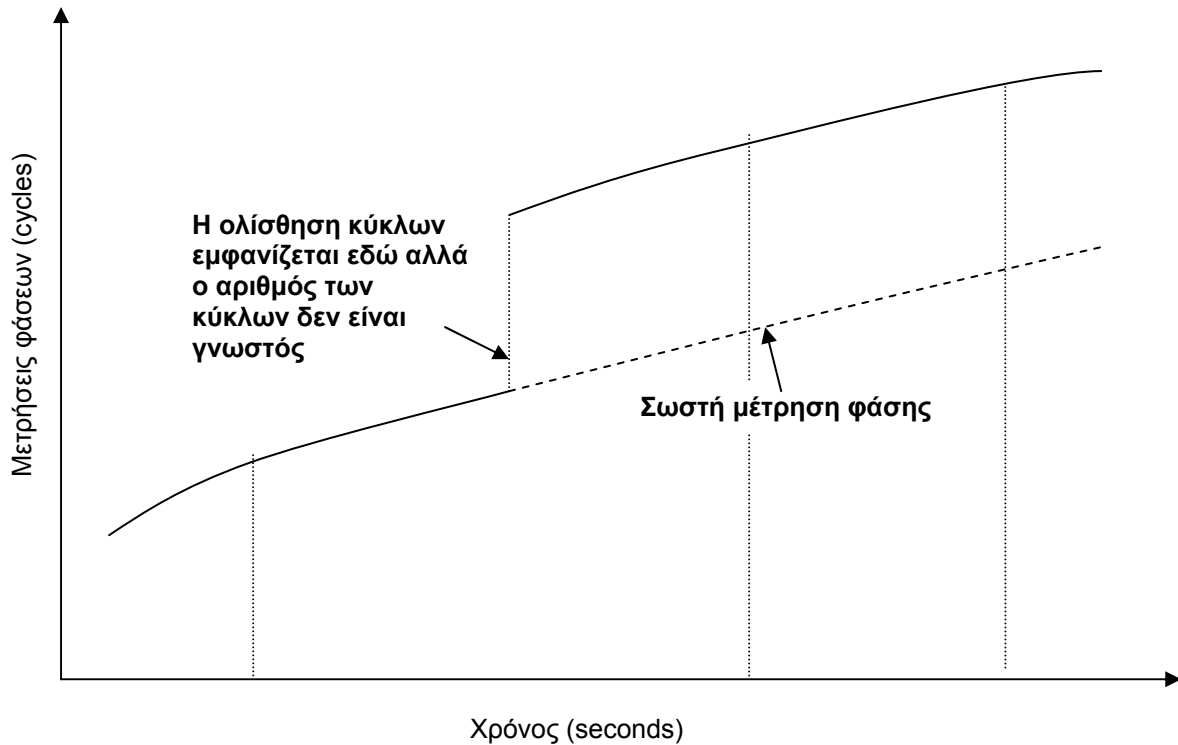
Όταν ένας δέκτης GPS μπαίνει σε λειτουργία τότε παρατηρείται το κλασματικό μέρος της φάσης, δηλαδή η διαφορά μεταξύ του δορυφορικού σήματος και του αντίγραφου που παράγεται στο δέκτη, ενώ ένας μετρητής ακεραίων τιμών είναι έτοιμος για να αρχίσει να μετρά. Κατά τη διάρκεια της παρατήρησης ο μετρητής αυξάνει κατά ένα κύκλο, οπότε η παρατηρούμενη διαφορά φάσης  $\Delta\phi$  αλλάζει από  $2\pi$  σε 0. Επομένως, σε μία εποχή η παρατηρούμενη (συσσωρευμένη) φάση  $\Delta\phi$  θα είναι το άθροισμα των κλασματικών διαφορών φάσης και των ακέραιων τιμών του μετρητή. Η αρχική τιμή, τη στιγμή της πρώτης παρατήρησης, των ακέραιων κύκλων ( $N$ ) μεταξύ δορυφόρου - δέκτη παραμένει άγνωστη. Αυτή η ασάφεια φάσης ( $N$ ) παραμένει σταθερή από τη στιγμή που δεν υπάρχει απώλεια του δορυφορικού σήματος. Σε περίπτωση που συμβεί αυτό, ο

μετρητής αρχίζει να μετράει ξανά από την αρχή το οποίο επιφέρει τη λεγόμενη **ολίσθηση των κύκλων** στη στιγμιαία παρατηρούμενη (συσσωρευμένη) φάση κατά κάποιο ακέραιο αριθμό κύκλων. **Αυτή η ολίσθηση - πτήδημα των κύκλων (cycle slips) παρατηρείται μόνο στις μετρήσεις φάσης.**

Μία γραφική παρουσίαση ολίσθησης κύκλων φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί (Σχ. 3.12), όπου οι μετρούμενες φάσεις (ομαλοποιημένες) σχεδιάζονται σε σχέση με το χρόνο. Στην περίπτωση της ολίσθησης των κύκλων ένα απότομο πτήδημα φαίνεται στη σχεδιασμένη καμπύλη. Οι αιτίες που προκαλούν το φαινόμενο της ολίσθησης των ακέραιων κύκλων μπορούν να συνοψιστούν σε τρεις. Πρώτη είναι η αιτία της ύπαρξης φυσικών και τεχνητών εμποδίων μεταξύ δορυφόρου-δέκτη, όπως είναι η ύπαρξη δένδρων, ψηλών κτιρίων, διέλευση του δέκτη κάτω από γέφυρα, ανάμεσα από βουνά κ.λ.π. Η αιτία αυτή είναι και η πιο συνηθισμένη. Η δεύτερη αιτία είναι ο χαμηλός λόγος σήματος προς θόρυβο (signal to noise ratio) εξαιτίας άσχημων ιονοσφαιρικών συνθηκών, ανακλάσεων του σήματος ή λόγω του χαμηλού ύψους διέλευσης του δορυφόρου. Τέλος ολίσθηση κύκλων μπορεί να προκύψει από κάποιο πρόβλημα στο λειτουργικό πρόγραμμα του δέκτη και έτσι να μην έχουμε σωστή επεξεργασία στο σήμα.

### **3.3.1 Τεχνικές ανίχνευσης της ολίσθησης των κύκλων**

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, για την ανίχνευση και τη διόρθωση του φαινομένου της ολίσθησης των κύκλων χρειάζεται να ξέρει κανείς τη χρονική στιγμή που αυτό έλαβε χώρα και πιο το μέγεθος των χαμένων κύκλων, το οποίο μπορεί να είναι από δεκάδες μέχρι και εκατομμύρια (σπανίως). Η διόρθωση τους γίνεται βρίσκοντας τον αριθμό των κύκλων σε κάθε παρατήρηση φάσης. Η ανίχνευση τους, η οποία προηγείται της διόρθωσης, βασίζεται στον έλεγχο με τη βοήθεια μετρήσεων φάσης κωδικών, doppler και σε συνδυασμούς αυτών.



**Σχήμα 3.12 :** Διάγραμμα ολίσθησης κύκλων (παρατηρήστε ότι δεν γνωρίζουμε τον ακέραιο αριθμό κύκλων που χάθηκαν κατά την ολίσθηση κύκλων).

Όταν έχουμε μετρήσεις με δύο δέκτες τότε εφαρμόζονται απλές, διπλές και τριπλές διαφορές για τον εντοπισμό των χαμένων κύκλων (Goad 1985, Remondi 1985, Hilla 1986, Buetler et al. 1987). Η μετρούμενη φάση μεταξύ δορυφόρου - δέκτη θα ισούται με:

$$\lambda\Phi_i^j(t) = \rho_i^j(t) + \lambda N_i^j + c\Delta\delta_i^j(t) - \frac{A_i^j(t)}{f^2} + \dots \quad (3.8)$$

όπου τα  $i, j$  συμβολίζουν το δέκτη και το δορυφόρο αντίστοιχα. Η ποσότητα  $A_i^j(t)$  ισούται με τον όρο  $\frac{40.3TVEC}{\cos z}$  ενώ πρέπει να τονιστεί ότι αυτή η εξίσωση περιέχει ένα αριθμό από χρονικά ανεξάρτητες ποσότητες (δεξί μέρος), οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στην ανίχνευση της ολίσθησης των κύκλων. Εάν διαθέτουμε μετρήσεις και στις δύο συχνότητες τότε θα ισχύει ότι :

$$\lambda_{L1}\Phi_{L1}(t) = \rho(t) + \lambda_{L1}N_{L1} + c\Delta\delta(t) - \frac{A(t)}{f_{L1}^2} + \dots \quad (3.9)$$

$$\lambda_{L2}\Phi_{L2}(t) = \rho(t) + \lambda_{L2}N_{L2} + c\Delta\delta(t) - \frac{A(t)}{f_{L2}^2} + \dots \quad (3.10)$$

άν αφαιρέσουμε τις δύο εξισώσεις μεταξύ τους, τότε οι ποσότητες που είναι ανεξάρτητες των συχνοτήτων απαλείφονται (δηλαδή τα  $\rho(t)$  και  $c\Delta\delta(t)$ ). Οπότε είναι



$$\lambda_{L1}\Phi_{L1}(t) - \lambda_{L2}\Phi_{L2}(t) = \lambda_{L1}N_{L1} - \lambda_{L2}N_{L2} - \frac{A(t)}{f_{L1}^2} + \frac{A(t)}{f_{L2}^2} \quad (3.11)$$

διαιρώντας τη νέα σχέση με  $\lambda_{L1}$  καταλήγουμε στην

$$\Phi_{L1}(t) - \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}}\Phi_{L2}(t) = N_{L1} - \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}}N_{L2} - \frac{A(t)}{\lambda_{L1}f_{L1}^2} \left(1 - \frac{f_{L1}^2}{f_{L2}^2}\right) \quad (3.12)$$

αλλά, όπως είναι γνωστό,  $\lambda = c/f \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{L1} = c/f_{L1} \\ \lambda_{L2} = c/f_{L2} \end{cases}$  και αντικαθιστώντας στην (3.12)

προκύπτει

$$\Phi_{L1}(t) - \frac{f_{L1}}{f_{L2}}\Phi_{L2}(t) = N_{L1} - \frac{f_{L1}}{f_{L2}}N_{L2} - \frac{A(t)}{\lambda_{L1}f_{L1}^2} \left(1 - \frac{f_{L1}^2}{f_{L2}^2}\right) \quad (3.13)$$

Η εξίσωση αυτή συχνά λέγεται και ως ιονοσφαιρικό υπόλοιπο (ionosphere free) Goad (1986) και το δεξιό της μέρος μας δείχνει ότι δεν περιέχει αλλαγές σε σχέση με την πάροδο του χρόνου εκτός από τις μεταβολές της ιονοσφαιρικής επίδρασης (ποσότητα  $A(t)$ ). Πρέπει να πούμε ότι η επίδραση της ιονόσφαιρας με τον γραμμικό συνδυασμό διπλής συχνότητας μειώνεται κατά ένα συντελεστή  $(1 - (f_{L1}/f_{L2})^2)$  ο οποίος φτάνει το 65% αυτής. Εάν δεν έχει συμβεί ολίσθηση κύκλων τότε οι προσωρινές μεταβολές του ιονοσφαιρικού υπόλοιπου θα είναι μικρές για κανονικές ιονοσφαιρικές συνθήκες και για μικρές βάσεις. Δείκτες ύπαρξης ολίσθησης κύκλων θα είναι τα ξαφνικά πηδήματα στις τιμές του ιονοσφαιρικού υπόλοιπου. Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί σε ποια συχνότητα συνέβη η ολίσθηση των κύκλων, στην L1, στην L2 ή και στις δύο.

Μία άλλη ποσότητα που χρησιμεύει στην ανίχνευση είναι ο συνδυασμός από μετρήσεις φάσης και κώδικα. Έτσι θα έχουμε ότι

$$\rho_i^j(t) = \rho_i^j(t) + c\Delta dt_i^j(t) + d_{ion}(t) + d_{trop}(t) \quad (3.14)$$

$$\lambda\Phi_i^j(t) = \rho_i^j(t) = \Phi_i^j(t) + c\Delta dt_i^j(t) + \lambda N_i^j(t) - d_{ion}(t) + d_{trop}(t) \quad (3.15)$$

αφαιρώντας και πάλι τις δύο σχέσεις καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\lambda\Phi_i^j(t) - \rho_i^j(t) = \lambda N_i^j(t) - 2d_{ion}(t) \quad (3.16)$$

Οι αλλαγές της ιονοσφαιρικής επίδρασης θα είναι ομαλές για μικρά διαστήματα εποχών. Επίσης με την εφαρμογή των διπλών διαφορών η  $d_{ion}(t)$  σχεδόν απαλείφεται. **Επομένως ο συνδυασμός των μετρήσεων με κώδικα και φάση θεωρείται ο ιδανικότερος για τον εντοπισμό της ολίσθησης των κύκλων.**

### 3.3.2 Τεχνικές διόρθωσης της ολίσθησης των κύκλων.

Όλες οι τεχνικές που αναφέρθηκαν παραπάνω μας βοηθούν να εντοπίσουμε πότε συνέβη το φαινόμενο της ολίσθησης των κύκλων, ενώ παράλληλα μας δίνουν και μία προσεγγιστική τιμή για το μέγεθος αυτών. Πρέπει να τονιστεί ότι το μέγεθος των ακεραίων κύκλων θα πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Για τον ακριβή λοιπόν προσδιορισμό του αριθμού των ακεραίων κύκλων εφαρμόζονται οι παρακάτω τεχνικές.

Θέτουμε με  $y(t_i)$ ,  $i= 1,2,3, \dots 7$  τη χρονική σειρά των παρατηρήσεων, η οποία περιέχει μία ολίσθηση μεγέθους  $\varepsilon$  στην εποχή  $t_4$ , όπως φαίνεται γραφικά στο σχήμα που ακολουθεί (Σχ. 3.13). Στο παρακάτω σχήμα συμβολίζουμε με  $y^1, y^2, y^3, y^4$  τις διαφορές πρώτης, δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας όπου  $y(t_i)$  την αντίστοιχη μέτρηση της φάσης και θεωρώντας  $\varepsilon$  την ολίσθηση των κύκλων τότε εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες διαφορές γίνεται πλέον φανερή η ύπαρξη των κύκλων. Μια μέθοδος προσδιορισμού του μεγέθους των κύκλων είναι να εφαρμόσουμε μία καμπύλη πάνω στις ελεγχόμενες ποσότητες (πχ. μετρήσεις φάσης) πριν και μετά την ολίσθηση. Ο αριθμός των κύκλων θα προκύψει από τη μετάθεση-διαφορά των δύο καμπύλων. Η εφαρμογή της καμπύλης μπορεί να γίνει με μια απλή γραμμική παλινδρόμηση (Mader, 1986) ή με την εφαρμογή μιας μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (Beutler et al. 1984). Αυτές οι τεχνικές ονομάζονται τεχνικές παρεμβολών. Άλλες μέθοδοι είναι οι τεχνικές πρόγνωσης των φίλτρων Kalman (Kalman filtering).

$t_i$	$y(t_i)$	$y^1$	$y^2$	$y^3$	$y^4$	$y^5$	$y^6$
$t_1$	0						
$t_2$	0	0					
$t_3$	0	0	0				
$t_4$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$-\varepsilon$	$\varepsilon$	$-\varepsilon$		
$t_5$	$\varepsilon$	0	0	0	$-\varepsilon$		
$t_6$	$\varepsilon$	0	0				
$t_7$	$\varepsilon$	0					

Σχήμα 3.13 : Ανίχνευση της ολίσθησης κύκλων με απλές, διπλές, τριπλές και τετραπλές διαφορές.

Μία επίσης διαδεδομένη μέθοδος για τη διόρθωση της ολίσθησης κύκλων είναι αυτή που αναπτύχθηκε από τον Hilla (1986) και αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος έχει σαν σκοπό τη διόρθωση του μεγάλου μέρους των χαμένων κύκλων και αυτό διότι έχει ακρίβεια ολίγων κύκλων, και το δεύτερο μέρος να διορθώσει τους λίγους κύκλους που έχουν παραμείνει με την βοήθεια των διπλών διαφορών. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Έστω οι μετρήσεις φάσεων  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_4$  και έστω με  $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3, \dots, \Phi'_n$  οι αναμενόμενες φάσεις που υπολογίζονται από τις γνωστές θέσεις των δορυφόρων και τις προσεγγιστικές συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης. Στη συνέχεια εφαρμόζονται και για τις δύο σειρές μετρήσεων οι πρώτες, δεύτερες αλλά και οι διαφορές μεταξύ των δευτέρων διαφορών τους, όπως φαίνεται και από τον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 3.3). Οι διαφορές  $D^2\Phi$  και των δύο σειρών ( $\Phi$  και  $\Phi'$ ) που είναι στην τελευταία στήλη του πίνακα θα πρέπει να είναι της τάξης των λίγων κύκλων, στην περίπτωση που στις μετρήσεις των φάσεων δεν έχουν συμβεί ολισθήσεις κύκλων (cycle slips) και οι προβλεπόμενες φάσεις είναι ικανοποιητικά ακριβείς. Σε περίπτωση που εμφανιστεί μία μεγάλη τιμή στις παραπάνω διαφορές, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα για την ύπαρξη μεγάλου αριθμού από χαμένους κύκλους. Έτσι φαίνεται και το ότι αυτές οι διαφορές ( $D^2\Phi$ ) μπορούν να εντοπίσουν ολισθήσεις κύκλων μεγαλύτερες από ένα σχετικά μικρό αριθμό.

Ένας χαμένος κύκλος μπορεί να ορισθεί ως  $\Delta\Phi = \bar{\Phi} - \Phi$  όπου  $\bar{\Phi}$  είναι η άγνωστη πραγματική τιμή φάσης που θα μετρούσαμε αν δεν συνέβαινε η ολίσθηση και  $\Phi$  η παρατηρούμενη φάση επηρεασμένη από ένα χαμένο κύκλο. Υποθέτοντας ότι το χάσιμο γίνεται σε μία μέτρηση π.χ.  $\Phi_3$ , τότε θα έχουμε  $\Phi_3 = \bar{\Phi}_3 - \Delta\Phi_3$  και

$\Phi$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$	$\Phi'$	$\Delta\Phi'$	$\Delta^2\Phi'$	$D^2\Phi$
$\Phi_1$	$\Phi_1 - \Phi_2$		$\Phi'_1$	$\Phi'_1 - \Phi'_2$		
$\Phi_2$	$\Phi_2 - \Phi_3$	$\Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_3$	$\Phi'_2$	$\Phi'_2 - \Phi'_3$	$\Phi'_1 - 2\Phi'_2 + \Phi'_3$	$(\Phi_1 - \Phi'_1) - 2(\Phi_2 - \Phi'_2) + (\Phi_3 - \Phi'_3)$
$\Phi_3$	$\Phi_3 - \Phi_4$	$\Phi_2 - 2\Phi_3 + \Phi_4$	$\Phi'_3$	$\Phi'_3 - \Phi'_4$	$\Phi'_2 - 2\Phi'_3 + \Phi'_4$	$(\Phi_2 - \Phi'_2) - 2(\Phi_3 - \Phi'_3) + (\Phi_4 - \Phi'_4)$
$\Phi_4$			$\Phi'_4$			

Πίνακας 3.3. Διόρθωση της ολίσθησης κύκλων με τη χρήση πρώτων και δευτέρων διαφορών.

$$D^2\Phi(1) = (\Phi_1 - \Phi'_1) - 2(\Phi_2 - \Phi'_2) + (\Phi_3 - \Phi'_3) = (\Phi_1 - \Phi'_1) - 2((\Phi_2 - \Phi'_2) + (\Phi_3 - \Phi'_3)) - \Delta\Phi_3 \approx \Delta\Phi_3 \quad (3.17)$$

όπου  $\Delta\Phi_3$  ο αριθμός των χαμένων κύκλων. Από την τρίτη εποχή και μετά όλες οι μετρήσεις φέρουν τον ίδιο αριθμό χαμένων κύκλων  $\Delta\Phi_3$ , δηλαδή

$$D^2\Phi(2) = (\Phi_2 - \Phi'_2) - 2(\Phi_3 - \Phi'_3) + (\Phi_4 - \Phi'_4) = (\Phi_2 - \Phi'_2) - 2((\Phi_3 - \Phi'_3) + (\Phi_4 - \Phi'_4)) - \Delta\Phi_3 \approx \Delta\Phi_3 \quad (3.18)$$

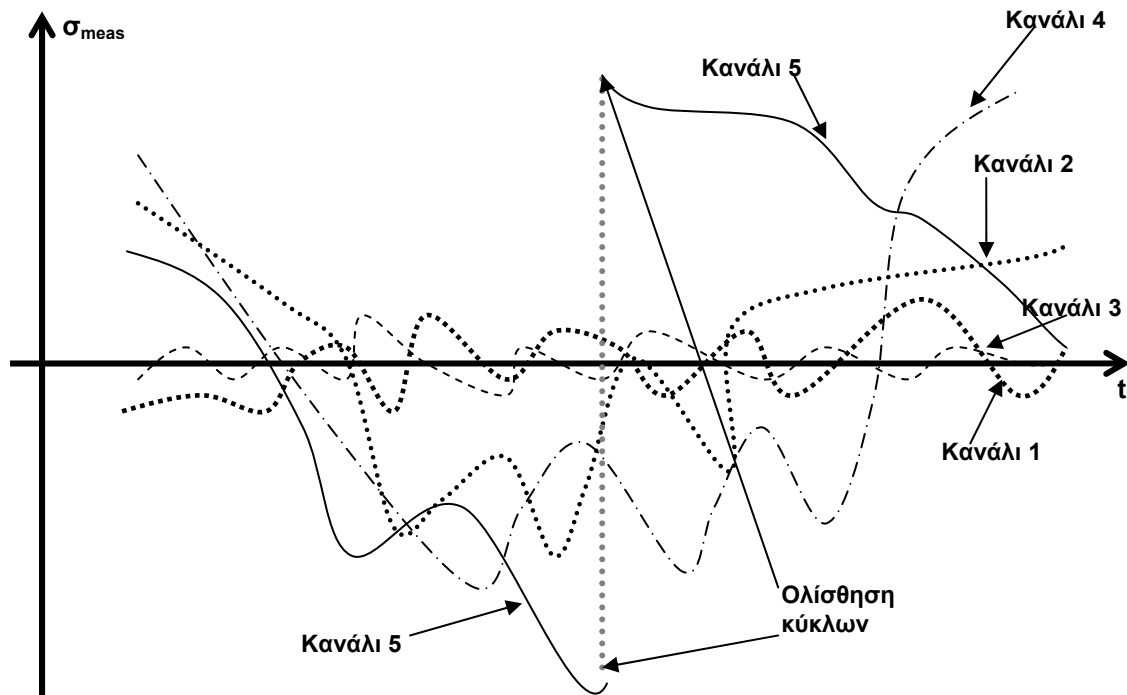
Προφανώς, θα ισχύει ότι οι διαφορές  $D^2\Phi(i)$  για  $i \geq 3$ , δεν θα είναι επηρεασμένες από την ποσότητα  $\Delta\Phi_3$ . Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι εάν μία ολίσθηση κύκλων συμβαίνει σε μία εποχή ( $t$ ) θα εμφανίζεται σε δύο ακόμη συνεχόμενες εποχές με αντίθετο όμως πρόσημο. Εάν μία ολίσθηση συμβαίνει σε δύο διαδοχικές εποχές, έστω στις εποχές 3 και 4, τότε θα έχουμε ότι:  $D^2\Phi(1) \approx -\Delta\Phi_3$ ,  $D^2\Phi(2) \approx \Delta\Phi_3 - \Delta\Phi_4$ ,  $D^2\Phi(3) \approx \Delta\Phi_4$ . Οι διαφορές  $D^2\Phi(i)$  με  $i \geq 4$  δεν θα επηρεάζονται από τις ποσότητες  $\Delta\Phi_3$  και  $\Delta\Phi_4$ . Ομοίως, εάν ένα χάσιμο κύκλων συμβαίνει σε τρεις συνεχόμενες εποχές, τότε οι διαφορές από  $D^2\Phi(i)$  με  $i \geq 5$  δεν θα είναι επηρεασμένες από τον αριθμό των χαμένων κύκλων. Η ακρίβεια της παραπάνω μεθόδου μπορεί να ανιχνεύσει και να διορθώσει την ολίσθηση των κύκλων με μια ακρίβεια ολίγων κύκλων και αυτό γιατί η ακρίβεια της επηρεάζεται από την ακρίβεια των εκπεμπόμενων εφημερίδων και των προσεγγιστικών συντεταγμένων του σημείου παρατήρησης.

### 3.3.3 Διόρθωση ολίγων κύκλων.

Προκειμένου να μπορέσει να διορθωθεί ένας χαμένος κύκλος, ο οποίος είναι πάντα ακέραιος, πρέπει το επίπεδο του θορύβου που υπάρχει στις μετρήσεις φάσεων να είναι μικρό και πάντα μικρότερο από ένα κύκλο. Σε περίπτωση που ο θόρυβος των μετρήσεων είναι επί παραδείγματι ίσος με 2.34 κύκλους τότε είναι πολύ δύσκολο να ξεχωρίσουμε πιο μέρος των κύκλων ανήκει στο «χαμένο» ακέραιο κομμάτι και πιο στο θόρυβο. Βέβαια ο θόρυβος των μετρήσεων είναι συνήθως μικρότερος των 0.02 κύκλων οπότε και δεν αντιμετωπίζουμε το παραπάνω πρόβλημα. Παρόλα αυτά οι αστάθειες που υπάρχουν στα ωρολόγια των δορυφόρων και των δεκτών δημιουργούν ένα θόρυβο στις μετρήσεις των φάσεων της τάξης των ολίγων κύκλων από εποχή σε εποχή. Αυτό αποκλείει την πιθανότητα διόρθωσης των χαμένων κύκλων χρησιμοποιώντας μετρήσεις από τη μια μόνο συχνότητα (L1) τις απλές και διπλές διαφορές φάσης (βλ. Παράγραφο 4.1). Εφαρμόζοντας διπλές και τριπλές διαφορές απαλείφουμε την επίδραση των ρολογιών δορυφόρου και δέκτη και έτσι οι παραπάνω διαφορές μπορούν να ανιχνεύσουν το χάσιμο μικρών τιμών κύκλων.

Από αυτές, η μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως είναι αυτή των διπλών διαφορών. Μία ολίσθηση κύκλου θα επιφέρει ένα πήδημα -μία απότομη μεταβολή- στις εκτιμήσεις των σφαλμάτων των διπλών διαφορών για την εποχή στην οποία συνέβη. Στο σχήμα που

ακολουθεί (Σχ. 3.14) φαίνονται οι εκτιμήσεις σφαλμάτων των διπλών διαφορών για τα πέντε κανάλια ενός δέκτη GPS. Όπως φαίνεται σε ένα από τα κανάλια (κανάλι 5) έχει συμβεί ολίσθηση κύκλων, όπου και έχουμε μια απότομη μεταβολή των σφαλμάτων. Έχοντας λοιπόν ανιχνεύσει την ολίσθηση κύκλων από τις απότομες αλλαγές των σφαλμάτων, το επόμενο βήμα είναι η συμπλήρωση της αντίστοιχης παρατήρησης με το χαμένο αριθμό αυτών. Στη συνέχεια η επίλυση των διαφορών επαναλαμβάνεται με σκοπό τον έλεγχο της παραπάνω τεχνικής.

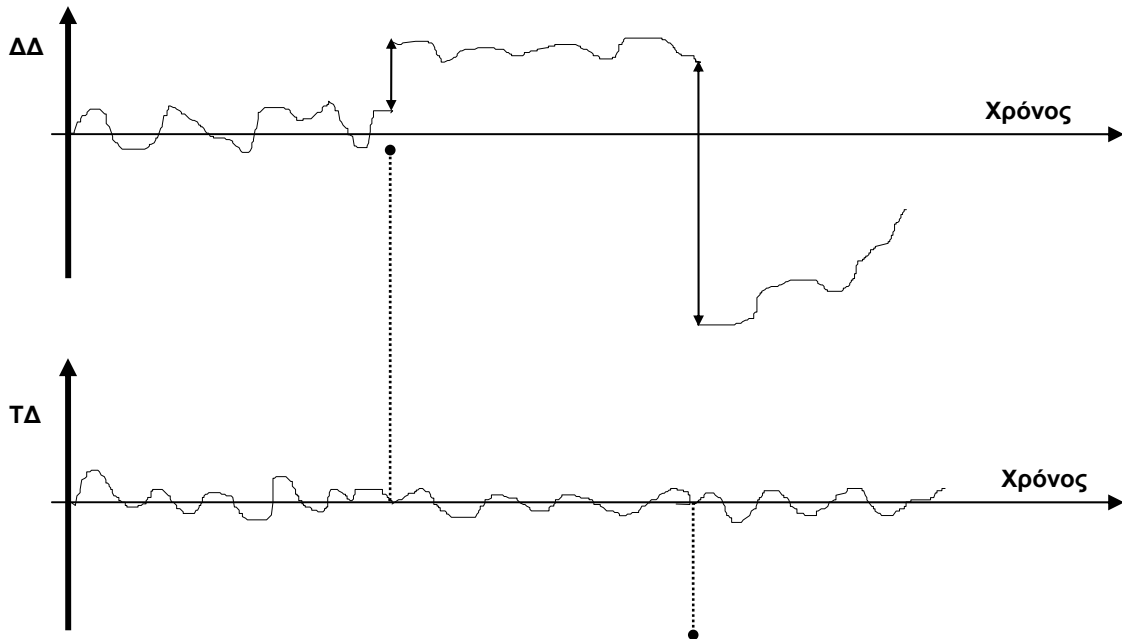


**Σχήμα 3.14:** Διάγραμμα ολίσθησης κύκλων (παρατηρήστε ότι δεν γνωρίζουμε τον ακέραιο αριθμό κύκλων που χάθηκαν κατά την ολίσθηση κύκλων).

### 3.3.4 Ο ρόλος των τριπλών διαφορών στην ανίχνευση και διόρθωση της ολίσθησης των κύκλων.

Οι τριπλές διαφορές φάσης, οι οποίες είναι διαφορές διπλών διαφορών αλλά μεταξύ δύο (συνήθως συνεχόμενων) διαφορετικών χρονικών εποχών π.χ.  $t_1$  και  $t_2$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο στάδιο της προεπεξεργασίας των δεδομένων. Στο στάδιο αυτό, ένα από τα κύρια σημεία που ενδιαφέρουν είναι ο εντοπισμός και η διόρθωση των “χαμένων” κύκλων. Εάν λοιπόν μέσα σε ένα χρονικό διάστημα  $t_1, t_2$  οι δέκτες δεν έχουν χάσει το δορυφορικό σήμα τότε (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως) δεν θα υπάρχουν χαμένοι κύκλοι οπότε και οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων δεν θα παρουσιάζουν μεγάλα “πηδημάτα”. Εάν όμως συμβαίνει το αντίθετο, τότε οι αντίστοιχες τριπλές διαφορές θα παρουσιάζουν

και αυτές απότομες μεταβολές αλλά σε μία μόνο διαφορά (ή σε κάθε μία από αυτές). Αυτό είναι και το πλεονέκτημα των τριπλών διαφορών έναντι των διπλών διαφορών, δηλαδή ένας μη εντοπιζόμενος κύκλος θα επηρεάζει μόνο μία τριπλή διαφορά και όχι και όλες τις επόμενες όπως συμβαίνει με τις διπλές διαφορές. Ένα γραφικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (Σχ. 3.15).



Σχήμα 3.15: Διπλές και τριπλές διαφορές μετρήσεων φάσης για τον εντοπισμό των χαμένων κύκλων.

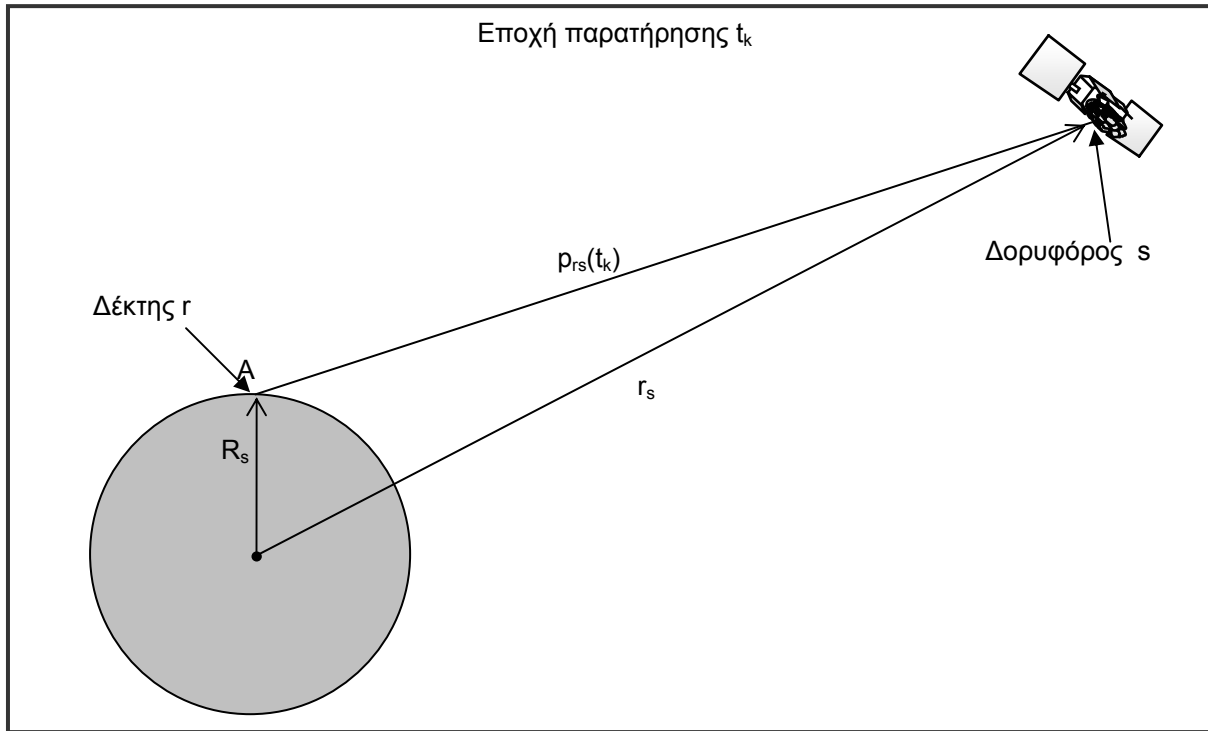
### 3.4 Γραμμικά μοντέλα για απόλυτο προσδιορισμό σημείου με μετρήσεις κωδικών

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω η απόσταση μεταξύ δορυφόρου - δέκτη στο σημείο A (βλ. Σχ. 3.16) για την χρονική στιγμή ( $t_k$ ) θα ισούται με

$$\rho_{rs}(t_k) = \rho_{rs}(t_k) + c(dt - dT) + d_{trop} + d_{ion} + \varepsilon_p \quad (3.19)$$

όπου με  $s$  συμβολίζεται ο δορυφόρος (satellite) και με  $r$  ο δέκτης (receiver). Εξαιρείται το ιονοσφαιρικό και τροποσφαιρικό σφάλμα και το θόρυβο των μετρήσεων ο οποίος θεωρούμε ότι λόγω της τυχαίας φύσης του -random- θα εκτιμηθεί με τα υπόλοιπα σφάλματα στη διαδικασία της συνόρθωσης. Τα διανύσματα θέσης του δορυφόρου και του δέκτη σε ένα τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς θα δίνονται ως

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{R}_r = \mathbf{X}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \quad (3.20)$$



Σχήμα 3.16: Διάταξη μέτρησης με GPS της απόστασης μεταξύ του δέκτη  $r$  και του δορυφόρου  $s$ .

Προσοχή πρέπει να δοθεί στο ότι τα έντονα γράμματα (π.χ.  $X_s$ ) συμβολίζουν πάντα πίνακα ενώ τα κανονικά ένα γραμμικό μέγεθος ή στοιχεία ενός πίνακα/διανύσματος (π.χ.  $x_s$ ).

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, η (3.19) αποτελεί τη βασική εξίσωση παρατήρησης του GPS για μετρήσεις ψευδοαποστάσεων (κώδικα). Οπότε θα έχουμε ότι η πραγματική απόσταση δορυφόρου-δέκτη είναι

$$\rho_{rs} = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2} \quad (3.21)$$

που δεν είναι τίποτα παραπάνω από την βασική εξίσωση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στις τρεις διαστάσεις. Αντικαθιστώντας την (3.21) στην (3.19) έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_{rs} &= \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2} + c(dt - dT) + d_{trop} + d_{ion} + \varepsilon_p \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{rs} &= \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2} + c(dt - dT) + \varepsilon_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου τα ατμοσφαιρικά σφάλματα έχουν απομακρυνθεί μιας και θεωρούμε ότι περιγράφονται επαρκώς από το μοντέλα και έχουν γίνει οι απαραίτητες διορθώσεις. Επιπλέον, το σφάλμα του δορυφορικού ρολογιού ( $dT$ ) μπορεί να θεωρηθεί γνωστό. Η παραδοχή αυτή είναι σωστή λόγω του ότι οι διορθώσεις του δορυφορικού ρολογιού μπορούν να ληφθούν μέσω του μηνύματος ναυσιπλοΐας (navigation message).

Γραμμικοποιώντας κατά Taylor την Εξ. 3.22 και λαμβάνοντας μόνο τους γραμμικούς όρους έχουμε

$$\rho_{rs} = \rho_{rs}^o - \frac{x_s - x_r^o}{\rho_r^o} dX_r - \frac{y_s - y_r^o}{\rho_r^o} dY_r - \frac{z_s - z_r^o}{\rho_r^o} dZ_r - cdT \quad (3.23)$$

όπου ο εκθέτης (<sup>ο</sup>) δηλώνει προσεγγιστικές τιμές/συντεταγμένες. (Όπως είναι γνωστό από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η προσεγγιστική τιμή μπορεί να επιλεγεί τυχαία μιας και ανάλογα με το πόσο κοντά ή όχι είναι στην πραγματική τιμή του μεγέθους που προσεγγίζεται τόσο μικρό ή μεγάλο θα είναι και το τελικό διάνυσμα των υπολοίπων/σφαλμάτων). Αφήνοντας τις άγνωστες παραμέτρους στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης θα έχουμε

$$\rho_{rs} - \rho_{rs}^o = -\frac{x_s - x_r^o}{\rho_r^o} dX_r - \frac{y_s - y_r^o}{\rho_r^o} dY_r - \frac{z_s - z_r^o}{\rho_r^o} dZ_r - cdT \quad (3.24)$$

Γίνεται επομένως φανερό ότι έχουμε τέσσερις αγνώστους. Πρέπει δηλαδή να εκτιμήσουμε τις άγνωστες διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των άγνωστων συντεταγμένων  $dX_r$ ,  $dY_r$ ,  $dZ_r$  καθώς και την άγνωστη διόρθωση της προσεγγιστικής τιμής του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη  $dT$ . Οπότε, χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερις δορυφόροι για λύσουμε το παραπάνω σύστημα (περίπτωση συνόρθωσης ενός απλού τοπογραφικού δικτύου). Αν θέσουμε

$$a_{X_{rs}}^1 = -\frac{x_s - x_r^o}{\rho_r^o}, \quad a_{Y_{rs}}^1 = -\frac{y_s - y_r^o}{\rho_r^o}, \quad a_{Z_{rs}}^1 = -\frac{z_s - z_r^o}{\rho_r^o}, \quad a_{dT_{rs}}^1 = -c \quad (3.25)$$

παρατηρούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την (3.24) σε μια πιο συνεπτυγμένη μορφή που προσομοιάζει σε μια έκφραση πινάκων. Πρέπει και πάλι να τονίσουμε ότι α) ο δείκτης (<sup>ο</sup>) δηλώνει προσεγγιστικές τιμές, β) στην παράμετρο  $a_{X_{rs}}^1$  το  $X$  δηλώνει ότι αναφέρεται στην άγνωστη προς προσδιορισμό ποσότητα  $X$  που είναι η  $X$ -συντεταγμένη του δέκτη  $r$  και προσδιορίζεται με μέτρηση προς τον δορυφόρο  $s$  που είναι ο δορυφόρος  $1$  των παρατηρήσεων (τα αντίστοιχα ισχύουν για τα  $Y$ ,  $Z$  και  $dT$ ). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πραγματοποιήσει παρατηρήσεις προς τέσσερις δορυφόρους. Τότε, χρησιμοποιώντας την (3.25) η (3.24) αναπτύσσεται στο σύστημα

$$\begin{cases} \rho_{r1} - \rho_{r1}^o \\ \rho_{r2} - \rho_{r2}^o \\ \rho_{r3} - \rho_{r3}^o \\ \rho_{r4} - \rho_{r4}^o \end{cases} = \begin{cases} a_{X_r}^1 dX_r + a_{Y_r}^1 dY_r + a_{Z_r}^1 dZ_r - cdT \\ a_{X_r}^2 dX_r + a_{Y_r}^2 dY_r + a_{Z_r}^2 dZ_r - cdT \\ a_{X_r}^3 dX_r + a_{Y_r}^3 dY_r + a_{Z_r}^3 dZ_r - cdT \\ a_{X_r}^4 dX_r + a_{Y_r}^4 dY_r + a_{Z_r}^4 dZ_r - cdT \end{cases} \quad (3.26)$$



όπου απλοποιήσαμε την μορφή των όρων  $a_{X_{rs}}^1$  σε  $a_{X_r}^1$  ώστε να είναι πιο απλή. Η (3.26) μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{X_r}^1 + a_{Y_r}^1 + a_{Z_r}^1 - c \\ a_{X_r}^2 + a_{Y_r}^2 + a_{Z_r}^2 - c \\ a_{X_r}^3 + a_{Y_r}^3 + a_{Z_r}^3 - c \\ a_{X_r}^4 + a_{Y_r}^4 + a_{Z_r}^4 - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ dT \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

και

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} \quad (3.28)$$

δηλαδή είναι ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων παρατήρησης. Αν μάλιστα παραστήσουμε και με  $\mathbf{v}$  τον πίνακα των αγνώστων σφαλμάτων (προσοχή στο ότι όλοι οι πίνακες συμβολίζονται με έντονα γράμματα π.χ. ( $\mathbf{x}$ ) προκειμένου να ξεχωρίζουν από τις απλές παραμέτρους π.χ. ( $x$ )) θα έχουμε

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{v} \quad (3.28)$$

Σε μια πιο αναλυτική μορφή η Εξ. 3.28 γράφεται

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_{r1} - \rho_{r1}^o \\ \rho_{r2} - \rho_{r2}^o \\ \rho_{r3} - \rho_{r3}^o \\ \rho_{r4} - \rho_{r4}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_s^1 - x_r^o}{\rho_{r1}^o} & -\frac{y_s^1 - y_r^o}{\rho_{r1}^o} & -\frac{z_s^1 - z_r^o}{\rho_{r1}^o} & -c \\ -\frac{x_s^2 - x_r^o}{\rho_{r2}^o} & -\frac{y_s^2 - y_r^o}{\rho_{r2}^o} & -\frac{z_s^2 - z_r^o}{\rho_{r2}^o} & -c \\ -\frac{x_s^3 - x_r^o}{\rho_{r3}^o} & -\frac{y_s^3 - y_r^o}{\rho_{r3}^o} & -\frac{z_s^3 - z_r^o}{\rho_{r3}^o} & -c \\ -\frac{x_s^4 - x_r^o}{\rho_{r4}^o} & -\frac{y_s^4 - y_r^o}{\rho_{r4}^o} & -\frac{z_s^4 - z_r^o}{\rho_{r4}^o} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_r \\ dY_r \\ dZ_r \\ dT_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Αν υποθέσουμε ότι η άγνωστη ποσότητα που θέλουμε να προσδιορίσουμε δεν είναι μόνο το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη  $dT$  αλλά η  $cdT$  τότε η (3.29) γίνεται

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_{r1} - \rho_{r1}^o \\ \rho_{r2} - \rho_{r2}^o \\ \rho_{r3} - \rho_{r3}^o \\ \rho_{r4} - \rho_{r4}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_s^1 - x_r^o}{\rho_{r1}^o} & -\frac{y_s^1 - y_r^o}{\rho_{r1}^o} & -\frac{z_s^1 - z_r^o}{\rho_{r1}^o} & -1 \\ -\frac{x_s^2 - x_r^o}{\rho_{r2}^o} & -\frac{y_s^2 - y_r^o}{\rho_{r2}^o} & -\frac{z_s^2 - z_r^o}{\rho_{r2}^o} & -1 \\ -\frac{x_s^3 - x_r^o}{\rho_{r3}^o} & -\frac{y_s^3 - y_r^o}{\rho_{r3}^o} & -\frac{z_s^3 - z_r^o}{\rho_{r3}^o} & -1 \\ -\frac{x_s^4 - x_r^o}{\rho_{r4}^o} & -\frac{y_s^4 - y_r^o}{\rho_{r4}^o} & -\frac{z_s^4 - z_r^o}{\rho_{r4}^o} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_r \\ dY_r \\ dZ_r \\ cdT_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

μπορούμε δηλαδή στον υπολογισμό του πίνακα  $\mathbf{A}^4$  να αποφύγουμε το μεγάλο νούμερο  $c=3 \cdot 10^8$ . Πρέπει βέβαια αφού υπολογίσουμε τις λύσεις να διαιρέσουμε το  $cdT$  με  $c$  προκειμένου να προκύψει το καθαρό σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη.

Ας υποθέσουμε στο σημείο αυτό ότι συμβολίζουμε με  $\mathbf{y}$  τις παρατηρηθείσες ποσότητες, με  $\mathbf{x}$  τις άγνωστες ποσότητες και με  $\mathbf{v}$  τα άγνωστα σφάλματα. Επίσης, ο δείκτης  $(^\alpha)$  θα δηλώνει πάντα πραγματικές τιμές και ο δείκτης  $(^\circ)$  θα δηλώνει πάντα προσεγγιστικές τιμές. Παρακάτω θα δοθούν οι αναλυτικές σχέσεις για τη συνόρθωση δεδομένων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατήρησης. Θεωρούμε δηλαδή ότι έχουμε ένα σύνολο εξισώσεων που συνδέουν τις παρατηρούμενες ποσότητες με τις άγνωστες, δηλαδή ένα σύστημα της μορφής (3.27).

**Με τον όρο συνόρθωση των παρατηρήσεων εννοούμε με απλά λόγια την ανάλυση των δεδομένων που συλλέξαμε προκειμένου να προσδιοριστούν κάποιες άγνωστες ποσότητες που συνδέονται με τις παρατηρηθείσες μέσω κάποιων εξισώσεων. Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων τότε έχουμε μία και μοναδική λύση. Αν όμως οι παρατηρήσεις είναι περισσότερες, τότε το σύστημά μας έχει θεωρητικά άπειρες λύσεις, αφού εισέρχονται και ως άγνωστοι τα σφάλματα των παρατηρήσεων και ο αριθμός των αγνώστων γίνεται μεγαλύτερος από αυτόν των παρατηρήσεων. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημά μας έχει άπειρες λύσεις και πρέπει να «διαλέξουμε» μία ανάμεσα σε αυτές. Για να επιτευχθεί αυτό, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή να επιλέξουμε τη λύση εκείνη που ελαχιστοποιεί τα άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.**

Ας υποθέσουμε επίσης ότι έχουμε  $m$ -άγνωστες ποσότητες που θέλουμε να προσδιορίσουμε βέλτιστα και  $n$ -παρατηρήσεις, τότε ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$\mathbf{x}^\alpha = \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ x_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ x_m^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.31a)$$

που καλείτε διάνυσμα των πραγματικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων,

---

<sup>4</sup>  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \rho_{rs}}{\partial \mathbf{x}_r} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^\circ}$  και  $\mathbf{a}_{ij} = \left. \frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right|_0$

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \\ \dots \\ \dots \\ x_m^o \end{bmatrix} \quad (3.31\beta)$$

που καλείτε διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων,

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix} \quad (3.31\gamma)$$

που καλείτε διάνυσμα διορθώσεων των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων ή και βέλτιστες εκτιμήσεις των διορθώσεων των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων,

$$\hat{\mathbf{x}}^\alpha = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^\alpha \\ \hat{x}_2^\alpha \\ \hat{x}_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ \hat{x}_m^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.31\delta)$$

που καλείτε διάνυσμα των βέλτιστων εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων,

$$\mathbf{y}^\alpha = \begin{bmatrix} y_1^\alpha \\ y_2^\alpha \\ y_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ y_n^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.32\alpha)$$

που καλείτε διάνυσμα των πραγματικών τιμών των παρατηρούμενων παραμέτρων,

$$\mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} y_1^o \\ y_2^o \\ y_3^o \\ \dots \\ \dots \\ y_n^o \end{bmatrix} \quad (3.32\beta)$$

που καλείτε διάνυσμα των προσεγγιστικών τιμών των παρατηρούμενων παραμέτρων,

$$\mathbf{y}^b = \begin{bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ y_3^b \\ \dots \\ \dots \\ y_n^b \end{bmatrix} \quad (3.32\gamma)$$

που καλείτε διάνυσμα των παρατηρούμενων παραμέτρων ή διάνυσμα των παρατηρήσεων,

$$\hat{\mathbf{y}}^\alpha = \begin{bmatrix} \hat{y}_1^\alpha \\ \hat{y}_2^\alpha \\ \hat{y}_3^\alpha \\ \dots \\ \dots \\ \hat{y}_n^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.32\delta)$$

που καλείτε διάνυσμα των βέλτιστων εκτιμήσεων των παρατηρούμενων παραμέτρων. Συνήθως όταν πραγματοποιούμε παρατηρήσεις τότε αυτές συνοδεύονται και από κάποιο μέτρο της ακρίβειας με την οποία πραγματοποιήθηκαν. Ο πιο συνήθης τρόπος είναι να μας δίνεται η ακρίβεια μιας μέτρησης μέσω της μεταβλητότητάς της ( $\sigma$ ) π.χ. ότι μία μέτρηση απόστασης πραγματοποιήθηκε με ακρίβεια  $\pm 5$  cm ή ότι μια γωνία μετρήθηκε με ακρίβεια  $\pm 1^{\text{cc}}$ , κ.λπ. Έτσι ορίζεται ο πίνακας μεταβλητοτήτων/συμμεταβλητοτήτων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

όπως βλέπουμε ο πίνακας αυτός είναι τετραγωνικός, διαστάσεων  $n \times n$  δηλαδή όσο και οι παρατηρήσεις. Έχει στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο του και όλα τα άλλα είναι μηδενικά. Το στοιχεία της διαγωνίου ανταποκρίνονται στην ακρίβεια ή αντίστοιχα στα σφάλματα με που χαρακτηρίζουν την κάθε παρατήρηση. Για παράδειγμα το  $\sigma_1^2$  ανταποκρίνεται στην ακρίβεια της πρώτης παρατήρησης  $y_1^b$  κ.ο.κ. Αν γνωρίζουμε ότι η ακρίβεια με την οποία πραγματοποιήθηκε η 1<sup>η</sup> παρατήρηση είναι  $\pm 5$  cm, αυτή της 2<sup>ης</sup>  $\pm 10$  cm, της 3<sup>ης</sup>  $\pm 4$  cm, ... και της  $n^{\text{ης}}$   $\pm 3$  cm, τότε ο πίνακας  $C_V$  θα έχει τη μορφή

$$C_V = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 16 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Σε πιο περίπλοκα προβλήματα που δεν θα μας απασχολήσουν στο παρών μάθημα, τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα  $C_V$ , που ανταποκρίνονται στις συμμεταβλητότητες μεταξύ των παρατηρήσεων, μπορούν να έχουν μη μηδενικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε έναν πλήρη πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων.

Από τον πίνακα  $C_V$  ορίζεται και ένα άλλος πίνακας που είναι γνωστός και σαν πίνακας βαρών. Ο πίνακας αυτός  $P$  ορίζεται σαν ο αντίστροφος του πίνακα  $C_V$  δηλαδή

$$P = C_V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

**Πρέπει πάντα να προσέχουμε σε τι μονάδες εκφράζονται τα διάφορα στοιχεία των διαφόρων πινάκων που χρησιμοποιούμε. Για παράδειγμα τα στοιχεία του πίνακα  $C_V$  της Εξ. 3.34 είναι σε  $\text{cm}^2$ . Αν θέλουμε να τα εκφράσουμε σε  $\text{m}^2$  θα πρέπει να διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία με 10000. Για το παραπάνω παράδειγμα, ο πίνακας βαρών θα είναι (βλ. Εξ. 3.34)**

$$P = C_V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.0625 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

οι μονάδες των στοιχείων του πίνακα  $P$  του παραδείγματος είναι  $1/\text{cm}^2$ . Αν θέλουμε να τα μετατρέψουμε σε  $1/\text{m}^2$  δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε το κάθε στοιχείο με 10000.

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε ορίσει ένα σύνολο πινάκων που μας επιτρέπει να προχωρήσουμε στη συνόρθωση των παρατηρήσεων για τη βέλτιστη εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων. Από τις 3.26 και 3.30 με χρήση των 3.32β και 3.32γ μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα  $b$  (που καλείται και πίνακας των ανηγμένων παρατηρήσεων) του γραμμικού συστήματος 3.28 ως

$$b = y^b - y^o = \begin{bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ y_3^b \\ \dots \\ \dots \\ y_n^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1^o \\ y_2^o \\ y_3^o \\ \dots \\ \dots \\ y_n^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^b - y_1^o \\ y_2^b - y_2^o \\ y_3^b - y_3^o \\ \dots \\ \dots \\ y_n^b - y_n^o \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

ο πίνακας σχεδιασμού του συστήματος των κανονικών εξισώσεων είναι (βλ. Εξ. (3.30))

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} \frac{x_s^1 - x_r^o}{\rho_{r1}^o} & \frac{y_s^1 - y_r^o}{\rho_{r1}^o} & \frac{z_s^1 - z_r^o}{\rho_{r1}^o} & -1 \\ \frac{x_s^2 - x_r^o}{\rho_{r2}^o} & \frac{y_s^2 - y_r^o}{\rho_{r2}^o} & \frac{z_s^2 - z_r^o}{\rho_{r2}^o} & -1 \\ \frac{x_s^3 - x_r^o}{\rho_{r3}^o} & \frac{y_s^3 - y_r^o}{\rho_{r3}^o} & \frac{z_s^3 - z_r^o}{\rho_{r3}^o} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_s^n - x_r^o}{\rho_{rn}^o} & \frac{y_s^n - y_r^o}{\rho_{rn}^o} & \frac{z_s^n - z_r^o}{\rho_{rn}^o} & -1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

έχει δηλαδή διαστάσεις  $n \times m$  δηλαδή γραμμές όσες και οι παρατηρήσεις και στήλες όσες και οι αγνώστες παράμετροι, που στην περίπτωση μας, μετρήσεις ψευδοαποστάσεων με GPS, είναι τέσσερις ( $X_r, Y_r, Z_r, cdT$ ).

Μπορούμε στο σημείο αυτό να ορίσουμε και τον πίνακα  $\mathbf{N}$  που ονομάζεται πίνακας των κανονικών εξισώσεων και υπολογίζεται από τους πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (3.39)$$

$m \times m$      $m \times n$   $n \times n$   $n \times m$

δηλαδή ο πίνακας  $\mathbf{N}$  είναι τετραγωνικός και με αριθμό στηλών και γραμμών όσες και οι άγνωστες παράμετροι, π.χ. στο παράδειγμα του προσδιορισμού των  $(X_r, Y_r, Z_r, cdT)$  ο πίνακας  $\mathbf{N}$  θα έχει διαστάσεις  $4 \times 4$ . Τέλος ορίζουμε και τον πίνακα  $\mathbf{u}$  από τους πίνακες  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \quad (3.40)$$

$m \times 1$      $m \times n$   $n \times n$   $n \times 1$

δηλαδή ο πίνακας  $\mathbf{u}$  είναι ένα διάνυσμα (πίνακας στήλη) με αριθμό γραμμών όσες και οι άγνωστες παράμετροι, π.χ. στο παράδειγμα του προσδιορισμού των  $(X_r, Y_r, Z_r, cdT)$  ο πίνακας  $\mathbf{u}$  θα έχει διαστάσεις  $4 \times 1$ . Η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων και κατά συνέπεια η βέλτιστη εκτίμηση των διορθώσεων των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων ( $\hat{\mathbf{x}}$ ) δίνεται ως εξής

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}) \quad (3.41)$$

περιλαμβάνει δηλαδή των αντιστροφή του πίνακα των κανονικών εξισώσεων  $\mathbf{N}$ . Από τις εκτιμήσεις των ανοιγμένων αγνώστων  $\hat{\mathbf{x}}$  μπορούν να προκύψουν και οι βέλτιστες εκτιμήσεις των αρχικών αγνώστων του συστήματος ως εξής

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o \quad (3.42)$$

καθώς και των σφαλμάτων και των ανοιγμένων παρατηρήσεων και των αρχικών παρατηρήσεων αυτών καθ' αυτών

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad (3.43)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad (3.44)$$

$$\hat{\mathbf{y}}^a = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^o \quad (3.45)$$

Τέλος, προκειμένου να υπολογίσουμε ένα μέτρο της ακρίβειας προσδιορισμού των αγνώστων παραμέτρων, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (3.46)$$

$m \times m$

που προφανώς είναι τετραγωνικός και έχει αριθμό γραμμών και στηλών όσοι και οι άγνωστοι. Ως παράδειγμα αναφέρουμε ότι για την περίπτωση που οι άγνωστοι είναι τα  $(X_r, Y_r, Z_r, cdT)$ , τότε ο πίνακας  $\mathbf{C}_{\hat{x}}$  είναι

$$\mathbf{C}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{x}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{y}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{z}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\hat{dT}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

που σε πιο απλή μορφή μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{C}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{dTdT} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{C}_{\hat{x}}$  εκφράζουν τις συμμεταβλητότητες μεταξύ των εκτιμώμενων παραμέτρων (συσχετίσεις) και είναι διάφορα του μηδενός, στις συνήθεις όμως εφαρμογές μπορούμε να τα θεωρήσουμε ίσα με μηδέν επειδή δεν μας δίνουν κάποια πληροφορία που μας είναι χρήσιμη και επιπλέον περιπλέκουν το όλο πρόβλημα.

### Αριθμητικό παράδειγμα συνόρθωσης παρατηρήσεων για τον απόλυτο προσδιορισμό θέσης με GPS.

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου έχουμε πραγματοποιήσει μετρήσεις ψευδοαποστάσεων με GPS. Κατά τη διάρκεια των μετρήσεων παρατηρήθηκαν οι δορυφόροι PRN 2, 15, 6 και 9 οπότε και προέκυψαν οι ψευδοαποστάσεις που δίνονται στον παρακάτω πίνακα μαζί με τις προσεγγιστικές συντεταγμένες του δέκτη και τις συντεταγμένες των δορυφόρων. Ζητούμενο είναι η συνόρθωση των παρατηρήσεων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων ώστε να εκτιμηθούν οι βέλτιστες συντεταγμένες του δέκτη και το σφάλμα του χρονομέτρου αυτού. Σας δίνεται ότι οι παρατηρήσεις είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, ενώ οι γεωδαιτικές συντεταγμένες του σταθμού είναι  $(\varphi=45^\circ$  και  $\lambda=210^\circ)$  και οι προσεγγιστικές συντεταγμένες του δέκτη στο σύστημα WGS 84 ( $\mathbf{X}=-197769.951\text{m}$ ,  $\mathbf{Y}=-5512393.108\text{m}$ ,  $\mathbf{Z}=3191595.792\text{m}$ ).

Οι συντεταγμένες για κάθε δορυφόρο είναι :



Και οι παρατηρήσεις προς τον κάθε δορυφόρο με τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις :

<b>S<sub>r2</sub></b>	<b>20728490,000</b>	<b><math>\sigma_{S_{r2}} = \pm 10cm</math></b>
-----------------------	---------------------	--

<b>SV</b>	<b>X<sub>s</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>s</sub> (m)</b>	<b>Z<sub>s</sub> (m)</b>
<b>2</b>	<b>837729,761</b>	<b>-16372739,124</b>	<b>20806828,321</b>
<b>15</b>	<b>14345304,312</b>	<b>-14543591,765</b>	<b>16824092,647</b>
<b>6</b>	<b>-4338336,160</b>	<b>17265997,291</b>	<b>19490981,421</b>
<b>9</b>	<b>-11645484,452</b>	<b>-1703052,998</b>	<b>23397778,661</b>
<b>S<sub>r15</sub></b>	<b>21890123,000</b>	<b><math>\sigma_{S_{15}} = \pm 5cm</math></b>	
<b>S<sub>r6</sub></b>	<b>28319456,000</b>	<b><math>\sigma_{S_{r6}} = \pm 2cm</math></b>	
<b>S<sub>r9</sub></b>	<b>23542685,000</b>	<b><math>\sigma_{S_{r9}} = \pm 4cm</math></b>	

Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές των αποστάσεων μεταξύ δέκτη και δορυφόρων. Επομένως είναι

$$\begin{aligned}
 S_{r2}^o &= \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 + (z - z_r)^2} = \\
 &= \sqrt{(837729.761 + 197769.951)^2 + (-16372739.124 + 5512393.108)^2 + \\
 &= \sqrt{(20806828.321 - 3191595.792)^2} = \\
 &= 20719937,073m
 \end{aligned}$$

ομοίως υπολογίζουμε και τα  $S_{r_{15}}^o$ ,  $S_{r_6}^o$ ,  $S_{r_9}^o$  και έχουμε

$$S_{r_{15}}^o = 21883978,813m, \quad S_{r_6}^o = 28313765,726m, \quad S_{r_9}^o = 23534040,569m$$

μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{b}$  (Εξ. 3.37) άρα

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} S_{r_2}^b - S_{r_2}^o \\ S_{r_{15}}^b - S_{r_{15}}^o \\ S_{r_6}^b - S_{r_6}^o \\ S_{r_9}^b - S_{r_9}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20728490.000 - 20719937.073 \\ 21890123.000 - 21883978.813 \\ 28319456.000 - 28313765,726 \\ 23542685.000 - 23534040,569 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8552,927 \\ 6144,187 \\ 5690,274 \\ 8644,431 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας βαρών  $\mathbf{P}$  θα δίνεται από την Εξ. 3.35. Πρέπει όμως, όπως άλλωστε τονίσαμε και παραπάνω να προσέξουμε ιδιαίτερα τις μονάδες. Μιας και όλα τα άλλα στοιχεία της άσκησης δίνονται σε m θα είναι καλό να υπολογίσουμε τον πίνακα βαρών σε  $1/cm^2$  προκειμένου να αποφευχθούν λάθη. Έτσι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας σχεδιασμού του συστήματος των κανονικών εξισώσεων υπολογίζεται από την Εξ. (3.38) και είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.049976 & 0.524150 & -0.850159 & -1 \\ -0.664553 & 0.412685 & -0.622944 & -1 \\ 0.146239 & -0.804499 & -0.575670 & -1 \\ 0.486432 & -0.161865 & -0.858594 & -1 \end{bmatrix}$$

όπου για παράδειγμα το στοιχείο  $a_{11}$  προκύπτει ως εξής

$$a_{11} = -\frac{837729.761 - (-197769.951)}{20719937,073} = -0.049976$$

αντίστοιχα προκύπτουν και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Ο ανάστροφος του  $\mathbf{A}$  θα είναι

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -0.049976 & -0.664553 & 0.146239 & 0.486432 \\ 0.524150 & 0.412685 & -0.804499 & -0.161865 \\ -0.850159 & -0.622944 & -0.575670 & -0.858594 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε ο πίνακας του συστήματος των κανονικών εξισώσεων  $\mathbf{N}$  θα είναι (Εξ. 3.39)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 378,251793 & -455,652345 & -301,652139 & -398,797682 \\ -455,652345 & 1730,017947 & 1097,281795 & 1894,923563 \\ -301,652139 & 1097,281795 & 1516,730260 & 2309,989700 \\ -398,797682 & 1894,923563 & 2309,989700 & 3625,000000 \end{bmatrix}$$

και ο αντίστροφός του

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 19,63319955 & 15,29419806 & 58,57002571 & -43,15801874 \\ 15,29419806 & 11,91626822 & 45,63112891 & -33,62443158 \\ 58,57002571 & 45,63112891 & 174,7622485 & -128,7748703 \\ -43,15801874 & -33,62443158 & -128,7748703 & 94,88938868 \end{bmatrix}$$

υπολογίζουμε και τον πίνακα  $\mathbf{u}$  βάσει της Εξ. 3.40, ώστε

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3032425.129 \\ -10856518.646 \\ -15086213.409 \\ -22941421,909 \end{bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό έχουμε υπολογίσει όλους του ενδιάμεσους πίνακες που μας οδηγούν στον υπολογισμό των βέλτιστων εκτιμήσεων των διορθώσεων των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων. Άρα μέσω της Εξ. (3.41) είναι

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 870,847 \\ 645,046 \\ -7929,242 \\ -1517,235 \end{bmatrix}$$

όλες οι ποσότητες στον παραπάνω πίνακα είναι σε  $\mathbf{m}$ . Αυτές οι παράμετροι που προσδιορίστηκαν αποτελούν τις διορθώσεις που πρέπει να κάνουμε στις προσεγγιστικές τιμές των συντεταγμένων του σταθμού και του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη, ώστε να υπολογίσουμε τις βέλτιστες εκτιμήσεις τους βάσει των παρατηρήσεων GPS. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 3.42 είναι

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -196899.104 \\ -5511748.062 \\ 3183666.550 \\ -1517.235 \end{bmatrix}$$

άρα οι συντεταγμένες του σταθμού είναι

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -196899.104 \text{ m} \\ -5511748.062 \text{ m} \\ 3183666.550 \text{ m} \end{bmatrix}$$

και το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη είναι

$$cdT = -1517.235 \text{ m} \Rightarrow dT = -5,05744886 \text{ } \mu\text{sec.}$$

### 3.5 Γεωμετρικά μέτρα ακρίβειας (DOP).

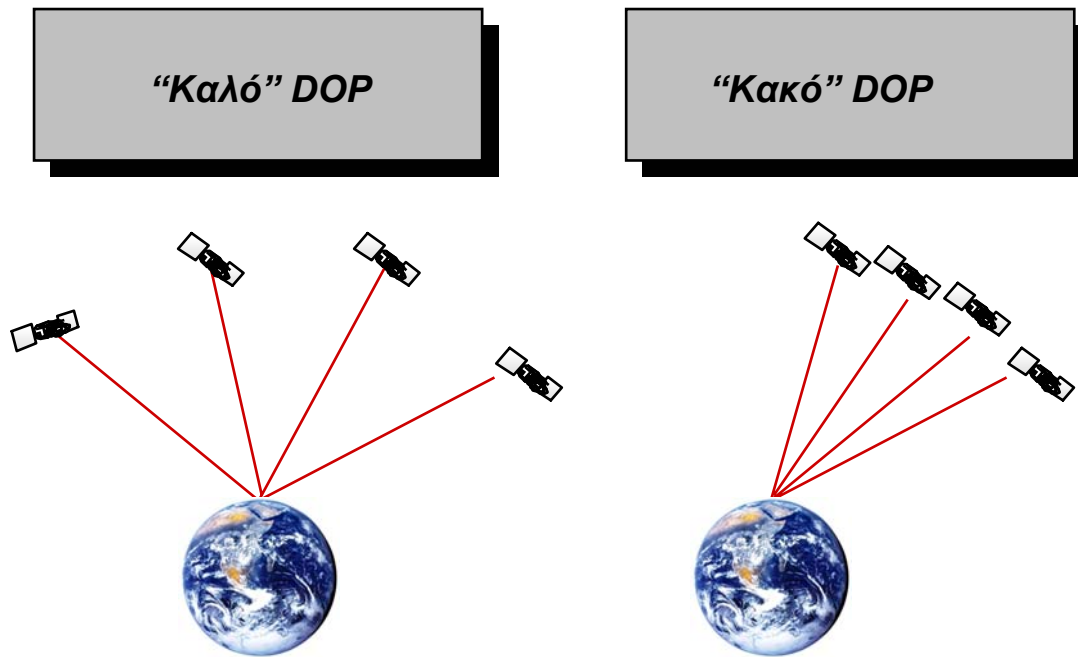
Τα γεωμετρικά μέτρα ακρίβειας (DOP – Dilution of Precision) είναι βαθμωτά μεγέθη της επίδρασης της Γεωμετρίας των δορυφόρων στις τελικές ακρίβειες προσδιορισμού. Μας δίνουν μια εικόνα για την συνεισφορά της γεωμετρίας των πρωτογενών παρατηρήσεων (ανάλυση της εσωτερικής ακρίβειας), υπολογιζόμενα από τον πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων ως εξής :

$$DOP = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}_{\hat{x}})} = \sqrt{\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1})}$$

(3.49)

όπου  $\text{tr}$  είναι το ίχνος του πίνακα μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων  $\mathbf{C}_{\hat{x}}$  δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $DOP$  τόσο καλύτερη είναι η γεωμετρία των δορυφόρων και κατά συνέπεια τόσο ακριβέστερες θα είναι και οι παρατηρήσεις.

Στο **Σχήμα 3.17** δίνεται ένα παράδειγμα καλής και κακής γεωμετρίας του δορυφορικού σχηματισμού που συνεπάγεται αντίστοιχη καλή ή κακή γεωμετρία παρατηρήσεων. Υπάρχουν διάφορα είδη DOP χρήσιμα στον προσδιορισμό θέσης με GPS που εξαρτώνται από τις παραμέτρους της λύσης.



Σχήμα 3.17: Καλό και κακό DOP στη γεωμετρία των δορυφόρων.

Όταν το GDOP λάβει τιμές μεγαλύτερες από 6 η γεωμετρία του συστήματος δεν θεωρείται ικανοποιητική για τον ασφαλή προσδιορισμό θέσης. Η κατάσταση αυτή δεν είναι σπάνια και εμφανίζεται όταν οι παρατηρούμενοι δορυφόροι τείνουν να γίνουν συνεπίπεδοι στο χώρο ή ακόμη όταν ο αριθμός τους είναι μικρός. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τη γνωστή αναξιπιστία του GPS (outage).

Διακρίνουμε διάφορα είδη *DOP* ανάλογα με τις παραμέτρους της λύσης που θέλουμε να ελέγξουμε. Έτσι έχουμε :

- το γεωμετρικό DOP (geometrical dilution of precision – GDOP) που υπολογίζεται ως το ίχνος των αβεβαιοτήτων στις συντεταγμένες της θέσης και τη διόρθωση του χρονομέτρου του δέκτη :

$$GDOP = \pm \sqrt{C_{xx} + C_{yy} + C_{zz} + C_{dTdT}} \quad (3.50)$$

Περιλαμβάνει γεωγραφικό μήκος, γεωγραφικό πλάτος, ελλειψοειδές υψόμετρο και χρόνο ή τις αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) και χρόνο.

- το DOP θέσης (position dilution of precision – PDOP) που υπολογίζεται ως το ίχνος των αβεβαιοτήτων στις συντεταγμένες της θέσης του δέκτη.

$$PDOP = \pm \sqrt{C_{xx} + C_{yy} + C_{zz}} \quad (3.51)$$

Περιλαμβάνει γεωγραφικό μήκος, γεωγραφικό πλάτος, ελλειψοειδές υψόμετρο ή τις αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z).

- το DOP χρόνου (time dilution of precesion – TDOP) που υπολογίζεται ως το ίχνος της αβεβαιότητας στη διόρθωση του χρονομέτρου του δέκτη.

$$TDOP = \pm\sqrt{C_{dTdT}} \quad (3.52)$$

Περιλαμβάνει μόνο χρόνο.

**Παρατήρηση :** πρέπει να σημειωθεί ότι οι υπολογισμοί των GDOP, PDOP και TDOP αναφέρονται στο παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται από το GPS δηλαδή στο WGS84.

Προκειμένου να υπολογίσουμε δύο ακόμη DOP, της οριζόντιας και της κατακόρυφης θέσης, που είναι επίσης χρήσιμα μέτρα ακρίβειας πρέπει να πραγματοποιήσουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων από το παγκόσμιο σύστημα αναφοράς σε ένα τοποκεντρικό σύστημα που θα έχει ως κέντρο το σημείο μέτρησης, Προκειμένου να γίνει αυτό, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα  $C_{\hat{x}}$  με ένα πίνακα στροφής ώστε να μεταφερθούμε σε ένα επίπεδο εφαπτόμενο του σημείου παρατήρησης. Ο πίνακας στροφής  $R$  είναι

$$R = \begin{bmatrix} -\sin\phi \cos\lambda & -\sin\phi \sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi \cos\lambda & \cos\phi \sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

όπου  $\phi, \lambda$  είναι το γεωγραφικό πλάτος και μήκος του σημείου παρατήρησης. Ο νέος, μετασχηματισμένος στο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς, πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων είναι

$$C_{\hat{x}L} = RC_{\hat{x}}R^T = \begin{bmatrix} C_{xLxL} & 0 & 0 \\ 0 & C_{yLyL} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zLzL} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

όπου  $C_{\hat{x}L}$  είναι ο μετασχηματισμένος στο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων. Παρατηρήστε ότι στο μετασχηματισμό από τον  $C_{\hat{x}}$  στον  $C_{\hat{x}L}$  χρησιμοποιήσαμε μόνο τα στοιχεία που αναφέρονται στα X, Y, Z και όχι αυτό που αναφέρεται στο χρόνο  $dT$ . Μπορούμε στο σημείο αυτό να ορίσουμε και τα άλλα δύο είδη DOP που είναι

- το DOP οριζόντιας θέσης (horizontal dilution of precision – HDOP) που υπολογίζεται ως το ίχνος των αβεβαιοτήτων στις οριζόντιες συντεταγμένες της θέσης του δέκτη.

$$HDOP = \pm \sqrt{C_{xLxL} + C_{yLyL}} \quad (3.55)$$

Περιλαμβάνει γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος ή τις αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y).

- το DOP κατακόρυφης θέσης (vertical dilution of precision – VDOP) που υπολογίζεται ως το ίχνος της αβεβαιότητας στην κατακόρυφη θέση του δέκτη

$$VDOP = \pm \sqrt{C_{zLzL}} \quad (3.56)$$

Περιλαμβάνει μόνο ελλειψοειδές υψόμετρο ή την αντίστοιχη καρτεσιανή συντεταγμένη (Z).

Πρέπει να τονιστεί ότι οι τιμές του DOP που επιθυμούμε είναι όσο το δυνατόν μικρότερες γίνεται. Όταν το DOP λάβει τιμές μεγαλύτερες του 8 τότε θεωρούμε ότι η γεωμετρία του συστήματος δεν είναι καλή για τον ασφαλή προσδιορισμό θέσης. Στην πράξη, θεωρούμε ότι οι τιμές του DOP είναι αποδεκτές όταν δεν ξεπερνούν το 6.

Προσοχή πρέπει να δοθεί στο ότι όλα τα DOP αποτελούν μέτρα ακρίβειας των παρατηρήσεων οπότε πρέπει πάντα να εκφράζονται σαν ένα εύρος τιμών, δηλαδή  $\pm$ . Τέλος πρέπει πάντα να συνοδεύονται από τη μονάδα στην οποία εκφράζονται, π.χ. m, cm, κ.ο.κ.

## Αριθμητικό παράδειγμα υπολογισμού των γεωμετρικών μέτρων ακρίβειας.

Έστω ότι δίνεται ο παρακάτω πίνακας  $C_{\hat{x}}$  ο οποίος έχει ήδη υπολογιστεί :

$$C_{\hat{x}} = N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.029432024 & 0.020324039 & 0.007275442 & -0.008273 \\ 0.020324039 & 0.027774897 & 0.008245406 & -0.010387 \\ 0.007275442 & 0.008245403 & 0.008060596 & -0.004803 \\ -0.008273479 & -0.010386999 & -0.004803386 & 0.006917 \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

$$GDOP = \sqrt{0.029432024 + 0.027774897 + 0.008060596 + 0.006717} = \pm 0.2686 \text{ m}$$

$$PDOP = \sqrt{0.029432024 + 0.027774897 + 0.008060596} = \pm 0.2554 \text{ m}$$

$$TDOP = \sqrt{0.008060596} = \pm 0.08317 \text{ m}$$

το  $TDOP$  μπορεί να εκφραστεί και σε μονάδες χρόνου, ως εξής

$$TDOP(s) = TDOP(m)/c \Rightarrow TDOP(s) = 2.77233333 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε και τα  $DOP$  οριζόντιας και κατακόρυφης θέσης πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα στροφής  $R$ , που είναι

$$R = \begin{bmatrix} -0.433012702 & 0.353553391 & 0.707106781 \\ 0.5 & -0.866025404 & 0 \\ -0.612372436 & -0.353553391 & 0.707106781 \end{bmatrix}$$

και ο μετασχηματισμένος στο τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς πίνακας μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων  $C_{\dot{x}_L}$  είναι

$$C_{\dot{x}_L} = \begin{bmatrix} 0.006465145 & -0.00613918 & 0.001695967 \\ -0.00613918 & 0.010588045 & 0.004201244 \\ 0.001695967 & 0.004201244 & 0.016916317 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$HDOP = \sqrt{0.006465145 + 0.010588045} = \pm 0.1306 \text{ m}$$

$$PDOP = \sqrt{0.016916317} = \pm 0.1301 \text{ m}$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο και την παραπάνω εφαρμογή είναι χρήσιμο να τονίσουμε ότι χρειάζεται μεγάλη προσοχή στις μονάδες που χρησιμοποιούνται και πρέπει πάντα να κάνουμε συνεχείς ελέγχους προκειμένου να διαπιστώνουμε αν οι μονάδες των διαφόρων πινάκων συμφωνούν μεταξύ τους.