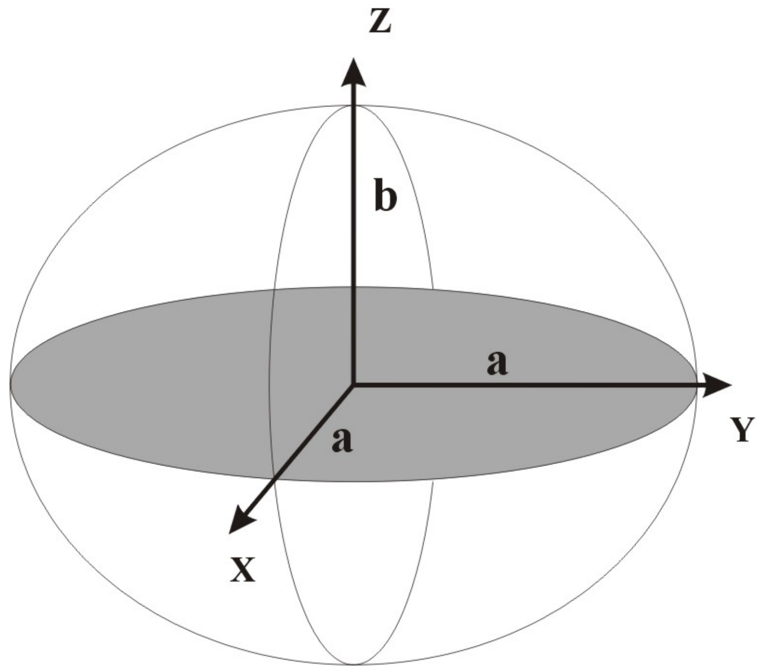
5. Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

5.1 Στοιχεία από την ελλειψοειδή Γεωδαισία

Η γήινη επιφάνεια έχει πολύπλοκη μορφή και δεν είναι δυνατό να περιγραφή με μαθηματικές εξισώσεις. Στην προσπάθεια να περιγράψουν την γήινη επιφάνεια οι γεωδαίτες από τα αρχαία χρόνια προσπάθησαν να προσαρμόσουν σε αυτή διάφορες μαθηματικές επιφάνειες, όπως η σφαίρα και το ελλειψοειδές εκ' περιστροφής (το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι η επιφάνεια που προκύπτει αν περιστρέψουμε μια έλλειψη γύρω από ένα άξονα της.. Το ελλειψοειδές εκ' περιστροφής προσαρμόζεται καλύτερα στην επιφάνεια της Γης από την σφαίρα, αλλά ακόμη και αυτή η προσέγγιση δεν καλύπτει τις τοπικές εξάρσεις και υφέσεις του γήινου φλοιού. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν ελλειψοειδή διαφορετικών διαστάσεων που προσαρμόζονται σε συγκεκριμένες περιοχές της γης, αλλά και ελλειψοειδή που προσαρμόζονται σε όλη την γήινη επιφάνεια.



Σχήμα 5.1: Ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Χαρακτηριστικά μεγέθη του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

a : Μεγάλος ημιάξονας.

b : Μικρός ημιάξονας.

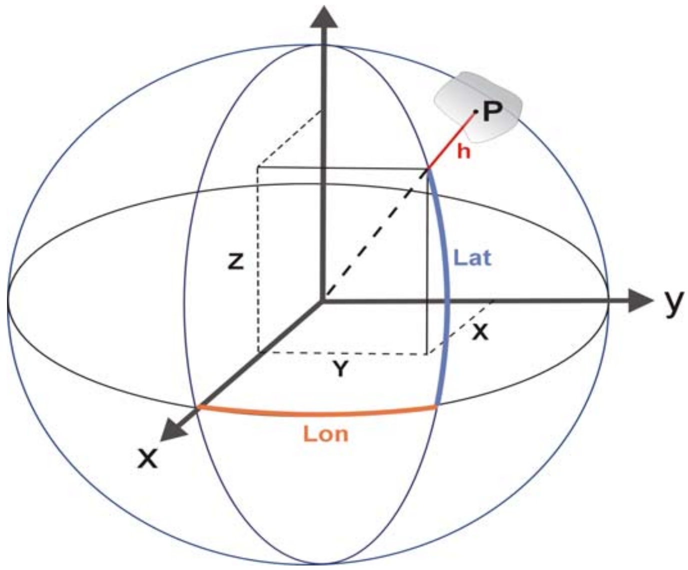
f : επιπλάτυνση

e : εκκεντρότητα.

Όπου $f = \dfrac{a-b}{a}$ και $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$

Πίνακας 5.1. Διαστάσεις ελλειψοειδών εκ περιστροφής που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα.

ΕΕΠ	a(m)	b(m)	F
Bessel	6377397	6356079	1/299.5
Hayford	6378388	6356912	1/297
GRS '80	6378137	6356752	1/298.26



Σχήμα 5.2: Ελλειψοειδείς και καρτεσιανές συντεταγμένες.

Εάν γνωρίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (X, Y, Z) ενός σημείου τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες του (φ, λ, h) και αντιστρόφως χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις :

$$X = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$Y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$Z = \left[(1-e^2)N + h\right]\sin\varphi$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{Z + e^2 N\sin\varphi}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$
$$h = \frac{Z}{\sin\varphi} - (1-e^2)N$$

όπου h το γεωμετρικό υψόμετρο και Ν η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης κάθετου τομής . Η ακτίνα της πρώτης κάθετου τομής προκύπτει από τον τύπο:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi}}$$

όπως φαίνεται από τον τύπο που μας δίνει το γεωδαιτικό πλάτος φ συναρτήσει των X, Y, Z για τον υπολογισμό του φ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο αριθμητικής ανάλυσης επειδή η άγνωστη ποσότητα φ εμφανίζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Παρατήρηση: Δεν θα πρέπει να συγχέουμε την ακτίνα καμπυλότητας N με την αποχή του γεωειδούς η οποία συμβολίζεται επίσης με *N*.

5.1.1 Αναγωγή από την γήινη επιφάνεια στο ΕΕΠ

Αν και η επιφάνεια του ελλειψοειδούς αποτελεί μια καλή προσέγγιση της γήινης επιφάνειας εν τούτοις δεν μπορούμε να αποφύγουμε τις παραμορφώσεις που υφίστανται τα διάφορα μεγέθη που μετρούνται στο πεδίο. Για το λόγω αυτό είμαστε αναγκασμένοι να ανάγουμε πάντα τις παρατηρήσεις του πεδίου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Στην περίπτωση δε όπου οι παρατηρήσεις μας πρέπει να αναχθούν σε ένα προβολικό επίπεδο, αφού αναχθούμε στο ελλειψοειδές στη συνέχεια απαιτείται να αναχθούμε στο προβολικό επίπεδο, οι αναγωγές για τα ελλειψοειδή και τις προβολές που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα δίνονται από τους Ε.Λιβιεράτο και Α. Φωτίου (Λιβιεράτος, Φωτίου 1993) και αναλυτικά είναι :

- **Αναγωγή αζιμουθίου**

Αν A το αστρονομικό αζιμούθιο, A^g το γεωδαιτικό αζιμούθιο, z η ζενίθια απόσταση, $\overline{\varphi}$ το μέσο πλάτος που προκύπτει από τα φ_i, φ_j, $\overline{\rho}$ η μέση ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινής τομής υπολογισμένη από το μέσο πλάτος, h_Σ γεωμετρικό υψόμετρο του στόχου, S το μήκος της γεωδαισιακής γραμμής, a ο μεγάλος ημιάξονας του ΕΕΠ και e η κύρια εκκεντρότητα τότε η αναγωγή δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha - \mathrm{A} = -\eta \tan(\varphi) - (\xi \sin A - \eta \cos A)\cot z + \frac{e^2 h_\Sigma \cos^2 \overline{\varphi} \sin 2A}{2\overline{\rho}} - \frac{e^2 S^2 \cos^2 2\alpha^\kappa}{12a^2}$$

Η τάξη μεγέθους της αναγωγής είναι των $\pm 0''.45$.

- **Αναγωγή διεύθυνσης**

Η αναγωγή της διεύθυνσης δίνεται όπως και του αζιμουθίου με μόνη διαφορά ότι λείπει ο όρος η tan(φ). Δηλαδή:

$$\alpha - \mathrm{A} = -\eta \tan(\varphi) - (\xi \sin A - \eta \cos A)\cot z + \frac{e^2 h_\Sigma \cos^2 \overline{\varphi} \sin 2A}{2\overline{\rho}} - \frac{e^2 S^2 \cos^2 2\alpha^\kappa}{12a^2}$$

Η τάξη μεγέθους της αναγωγής είναι των $\pm 0''.20$.

- **Αναγωγή γωνιών**

Η ανηγμένη γωνία γ στο ΕΕΠ μιας γωνίας $\Gamma(\Sigma_1 T \Sigma_2)$ στο χώρο, προκύπτει ως διαφορές αζιμουθίων σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\Gamma = A_{T\Sigma 2} - A_{T\Sigma 1}$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\delta\gamma = \gamma - \Gamma$$

- **Αναγωγή αποστάσεων**

Αν s μια μετρημένη κεκλιμένη απόσταση στον χώρο, τότε η ανηγμένη στο προβολικό επίπεδο θα δίνεται από τις σχέσεις:

Αναγωγή κλίσης $\Delta_\kappa = \sqrt{s^2 - \delta h^2} - s = s_o - s$

Αναγωγή στη χορδή $\Delta_\chi = s_o \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}} - 1 \right) = S' - s_o$

Αναγωγή στο τόξο $\Delta_r = 2R \arcsin\left(\frac{S'}{2R}\right) - S' = S - S'$

οπότε :

$$S = s + \Delta_\kappa + \Delta_\chi + \Delta_r$$

5.1.2 Αναγωγή από το ΕΕΠ στο προβολικό επίπεδο

Προβολή Hatt

- **Αναγωγή απόστασης**

Όταν δουλεύουμε στην προβολή Hatt τότε λόγω της ιδιότητας της προβολής οι γωνιακές αναγωγές δεν υπερβαίνουν το 1″, γι΄ αυτό στην πράξη αγνοούνται.

Η ανηγμένη απόσταση είναι :

$$S' = \left(1 + \frac{S^2{}_{oi}}{6\overline{R}^2}\sin^2\gamma_{oij}\right)S_{ij} = m_{ij}S_{ij}$$

όπου $\overline{R}$ η μέση ακτίνα Gauss υπολογισμένη στο κέντρο φύλλου T_o και m_{ij} ο συντελεστής α-ναγωγής της απόστασης.

Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή

- **Αναγωγή αζιμουθίου**

Αν α_{ij} ένα γεωδαιτικό αζιμούθιο στο ΕΕΠ, η ανηγμένη τιμή α'_{ij} δίνεται από την σχέση :

$\alpha'_{ij}=\alpha_{ij}-\gamma_i+\delta_{ij}$

όπου γ_i η σύγκλιση μεσημβρινών και υπολογίζεται ή από τις προβολικές ή από τις γεωδαιτι-κές συντεταγμένες :

$$\gamma = \Delta\lambda\sin\varphi\left[1 + \frac{\Delta\lambda^2\cos^2\varphi}{3}\left(1+3\eta^2+2\eta^4\right)\right.$$
$$+\frac{\Delta\lambda^4\cos^4\varphi}{15}\left(2-t^2+15\eta^2+35\eta^4-15t^2\eta^2+33\eta^6-50t^2\eta^4\right.$$
$$\left.+11\eta^8-60t^2\eta^6-24t^2\eta^8\right)$$
$$\left.+\frac{\Delta\lambda^6\cos^6\varphi}{315}\left(17-26t^2+2t^4\right)\right]$$

$$\gamma = t'\frac{E'}{N'm_o} - \frac{t'}{3}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^3\left(1+t'^2-\eta'^2-2\eta'^4\right)+\frac{t'}{15}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^5\left(2+5t'^2+2\eta'^2\right.$$
$$\left.3t'^4+t'^2\eta'^2+9\eta'^4+20\eta'^6-7t'^2\eta'^4-27t'^2\eta'^6+11\eta'^8-24t'^2\eta'^8\right)$$
$$\left.-\frac{t'}{315}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^7\left(17+77t'^2+105t'^4+45t'^6\right)\right]$$

και το δ_{ij} η γωνιακή διόρθωση τόξου-χορδής και υπολογίζεται από τις προβολικές συντεταγμένες :

$$\delta_{ij} = -\frac{\Delta N'_{ij}\left(2E'_i+E'_j\right)}{6m_o{}^2R_3{}^2} - \frac{\Delta E'_{ij}\left(2E'_i+E'_j\right)^2 e'^2\sin\varphi'\cos\varphi}{9m_o{}^3R_3{}^3}$$
$$+\frac{\Delta N'_{ij}\left(2E'_i+E'_j\right)}{72m_o{}^4R_3{}^4}\left[\frac{4\left(2E'_i+E'_j\right)^2\left(1-\eta'^2\right)}{9}+\frac{\Delta E'_{ij}\left(E'_i+2E'_j\right)}{3}-\Delta N'^2_{ij}\right]$$

όπου R^2_3 = ρN για $\varphi = \frac{1}{3}\left(2\varphi'_i + \varphi'_j\right)$ και ρ,Ν οι ακτίνες καμπυλότητας.

- **Αναγωγή διεύθυνσης**

Αν β_{ij} μια διεύθυνση στο ΕΕΠ και β_{ij}' στο προβολικό επίπεδο τότε :

$$\beta_{ij}' = \beta_{ij} + \delta_{ij}$$

- **Αναγωγή γωνίας**

Αν γ_{ijk}' η ανηγμένη γωνία στο προβολικό επίπεδο και γ_{ijk} η γωνία στο ΕΕΠ τότε :

$$\gamma_{ijk}' = \gamma_{ijk} + \delta_{ik} + \delta_{ij}$$

- **Αναγωγή απόστασης**

Η ανηγμένη απόσταση S′ δίνεται από την σχέση :

$$S' = m_{ij} S$$

όπου m_{ij} ο συντελεστής αναγωγής και υπολογίζεται από τις προβολικές συντεταγμένες:

$$m_{ij} = m_o \left[1 + \frac{E_i'^2 + E_i'E_j' + E'^2_j}{6 m_o^2 R^2} \left(1 + \frac{E_i'^2 + E_i'E_j' + E_j'^2}{36 m_o^2 R^2} \right) \right]$$

όπου R η ακτίνα που υπολογίζεται στο μέσο πλάτος.

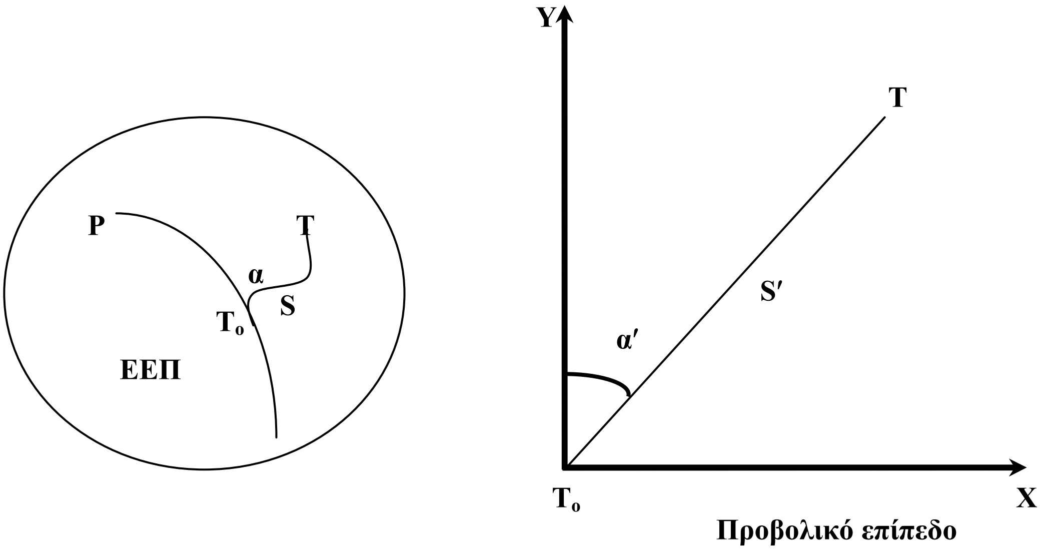
5.2 Τα γεωδαιτικά συστήματα στην Ελλάδα

Στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται σήμερα τέσσερα γεωδαιτικά συστήματα. Το παλαιότερο και πιο χρησιμοποιημένο σύστημα είναι το Ελληνικό Datum σε προβολή Hatt. Σε αυτό το σύστημα αναφέρονται τα κτηματογραφικά διαγράμματα της Τοπογραφικής Υπηρεσίας του Υπουργείου Γεωργίας (μικρά φύλλα), αλλά και χρησιμοποιήθηκε και από την ΓΥΣ (μεγάλα φύλλα). Λόγω του ότι τα διαγράμματα της Τοπογραφικής Υπηρεσίας αποτελούν μια σημαντική αναφορά για το ιδιοκτησιακό καθεστώς των αγροτεμαχίων και των ρυμοτομικών σχεδίων των αγροτικών περιοχών, το συγκεκριμένο γεωδαιτικό σύστημα χρησιμοποιείται αρκετά μέχρι και σήμερα.

Το 1982 στα πλαίσια της ΕΠΑ (Επιχείρηση Πολεοδομικής Ανασυγκρότησης) από το Υπουργείο ΠΕΧΩΔΕ χρησιμοποιήθηκε η προβολή ΤΜ 3^o (τρεις ζώνες) με αναφορά το Ελληνικό Datum. Το Ευρωπαϊκό Datum με την προβολή UTM (δύο ζώνες) η οποία χρησιμοποιείται κυρίως από την ΓΥΣ για τις ανάγκες του Στρατού. Το 1987 ο Ο.Κ.Χ.Ε. σε συνεργασία με την Γεωδαιτική και Γεωφυσική Επιτροπή του Κράτους (ΓΓΕΚ) ίδρυσε ένα νέο γεωδαιτικό σύστημα το ΕΓΣΑ 87 με προβολή την Εγκάρσια Μερκατορική με κεντρικό μεσημβρινό τις 24^o. Το νέο αυτό σύστημα χρησιμοποιεί ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφήσεων (ΟΚΧΕ).

5.2.1 Προβολή HATT

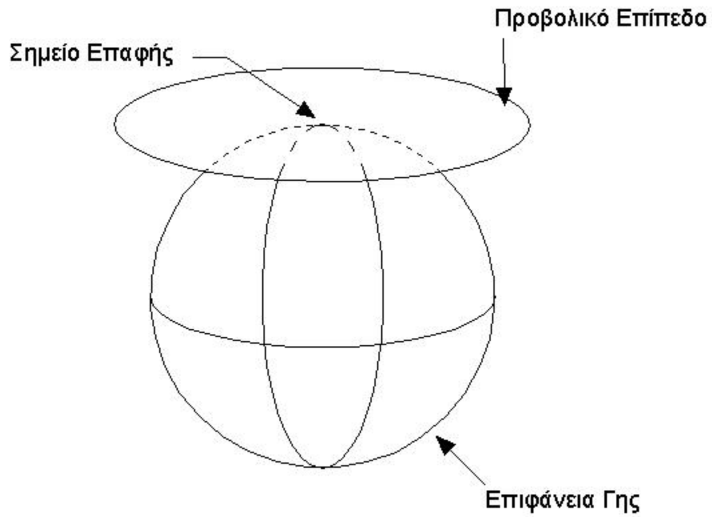
Έστω δύο σημεία στο ΕΕΠ, T_o (φ_o, λ_o) και T (φ, λ) που ενώνονται από την γεωδαισιακή γραμμή S και με γεωδαιτικό αζιμούθιο α (Σχήμα 5.3). Θεωρούμε ένα επίπεδο εφαπτόμενο του Ε-ΕΠ στο σημείο T_o. Στο επίπεδο αυτό ορίζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) με αρχή το σημείο T_o, άξονα των y να εφάπτεται στο μεσημβρινό του ΕΕΠ στο σημείο T_o και άξονα των x να είναι κάθετος στον άξονα των y.



Σχήμα 5.3. Προβολή γεωδαιτικού αζιμουθίου και γεωδαισιακής γραμμής από το ΕΕΠ στο επίπεδο (προβολή HATT).

Ένα τυχόν σημείο T του ΕΕΠ, προβάλλεται στο επίπεδο έτσι ώστε η εικόνα S' της γεωδαισιακής γραμμής και η εικόνα α' του αζιμουθίου να παραμένουν αναλλοίωτα, δηλαδή ίσα με τα αντίστοιχα στο ΕΕΠ.

Ο Ελληνικός χώρος, στο ΕΕΠ του Bessel που είναι το ΕΕΠ αναφοράς για το Ελληνικό Datum, υποδιαιρείτε σε σφαιροειδή τραπέζια πλευρών 30’ x 30’, σε κάθε ένα από αυτά έχουμε ένα κέντρο T_o όπως αυτό ορίζεται από την τομή του κεντρικού μεσημβρινού και παραλλήλου. Ο μεσημβρινός αφετηρίας είναι ο μεσημβρινός του βάθρου του αστεροσκοπείου Αθηνών. Τα σφαιροειδή τραπέζια, αντιστοιχούν σε 130 φύλλα - χάρτη, με κέντρα τις εικόνες τους T_0 κλίμακας 1:10000. Κάθε φύλλο έχει το δικό του σύστημα, με κέντρο που έχει γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ_o ,λ_o) ακέραιες μοίρες πλέον 15’ ή πλέον 45’.



Σχήμα 5.4. Επίπεδη ή αζιμουθιακή προβολή.

Οι σχέσεις με τις οποίες υπολογίζουμε τα φ, λ ή τα x, y στην προβολή αυτή με βάση το κέντρο φύλλου (φ_o, λ_o) και των ακτινών καμπυλότητας ρ_o και N_o της μεσημβρινής και πρώτης κάθετης τομής αντίστοιχα υπολογισμένες στα φ_o και λ_o είναι (Λιβιεράτος, Φωτίου 1993):

$$x = N_o \cos\varphi_o \Delta\lambda - \rho_o \sin\varphi_o \Delta\lambda\Delta\varphi - \frac{\rho_o \cos\varphi_o}{6}\left(2+9e'^2\sin^2\varphi_o\right)\Delta\lambda\Delta\varphi^2 -$$
$$- \frac{N_o\cos\varphi_o\sin^2\varphi_0}{6}\Delta\lambda^3 - \frac{N_o \sin\varphi_o\left(1-2\sin^2\varphi_o\right)}{6}\Delta\lambda^3\Delta\varphi + \dots$$

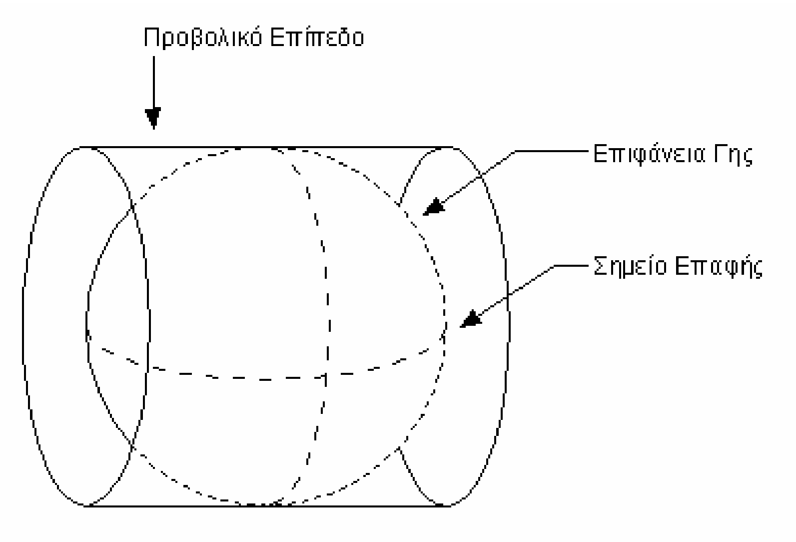
$$y = \rho_o\Delta\varphi + \frac{N_o\cos\varphi_o\sin\varphi_o}{2}\Delta\lambda^2 + \frac{3e'^2{\rho_o}^2\sin\varphi_o\cos\varphi_o}{2N_o}\Delta\lambda^2 +$$
$$+\frac{\rho_o\left(1-4\sin^2\varphi_o+e'^2\cos^4\varphi_o\right)}{6}\Delta\varphi\Delta\lambda^2 + \frac{e'^2\rho_o\left(1-2\sin^2\varphi_0\right)}{2}\Delta\varphi^3 +$$
$$+\frac{N_o\sin\varphi_o\cos\varphi_o\left(1-2\sin^2\varphi_0\right)}{24}\Delta\lambda^4 - \frac{N_o\sin\varphi_o\cos\varphi_o}{3}\Delta\varphi^2\Delta\lambda^2+\dots$$

$$\varphi-\varphi_o = \frac{y}{\rho_o} - \frac{\tan\varphi_o}{2\rho_oN_o}x^2 - \frac{3e'^2\sin2\varphi_o}{4\rho_oN_o}y^2 - \frac{1+3\tan^2\varphi_o - e'^2\left(1-10\sin^2\varphi_o\right)}{6\rho_o{N_o}^2}x^2y -$$
$$-\frac{\left(1-2\sin^2\varphi_o\right)e'^2}{2{\rho_o}^2N_o}y^3 + \tan\varphi_o\left(\frac{1+3\tan^2\varphi_o}{24{\rho_o}^2{N_o}^2}\right)x^4 - \tan\varphi_o\left(\frac{2+3\tan^2\varphi_o}{6{\rho_o}^2{N_o}^2}\right)x^2y^2+\dots$$

$$\lambda-\lambda_{\bullet} = \frac{x}{N_o\cos\varphi_o} + \frac{\tan\varphi_o}{{N_o}^2\cos\varphi_o}xy - \frac{\tan^2\varphi_o}{3{N_o}^3\cos\varphi_o}x^3 + \frac{1+3\tan^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o}{3{N_o}^3\cos\varphi_o}xy^2 +$$
$$+\frac{\tan\varphi_o\left(2+3\tan^2\varphi_o\right)}{3{N_o}^4\cos\varphi_o}xy^3 - \frac{\tan\varphi_o\left(1+3\tan^2\varphi_o\right)}{3N{N_o}^4\cos\varphi_o}x^3y+\dots$$

5.2.2 Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή

Αν Θεωρήσουμε την γη σαν μια σφαίρα η οποία να περιβάλλεται από ένα κύλινδρο, έτσι ώστε ο κύλινδρος να εφάπτεται κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου και συνεπώς ο άξονας του να είναι κάθετος με την διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τους δύο πόλους της σφαίρας ή να ταυτίζεται με μια διεύθυνση διαμέτρου του ισημερινού κύκλου της σφαίρας. Προβάλουμε όλα τα σημεία της σφαίρας πάνω στον κύλινδρο κατά τις προεκτάσεις των ευθειών τους από το κέντρο της σφαίρας και αναπτύσσουμε τον κύλινδρο σε ένα επίπεδο γύρω από μια γενέτειρά του. Ο κύλινδρος επειδή είναι αναπτυκτή επιφάνεια έχει ως συνέπεια τα σημεία να μην έχουν καμιά παραμόρφωση κατά την ανάπτυξή του. Αυτή είναι μια σύμμορφη απεικόνιση της σφαίρας σε ένα επίπεδο.



Σχήμα 5.5. Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή.

Στο προβολικό αυτό επίπεδο ιδρύουμε ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων με άξονα των y να ταυτίζεται με τον μέγιστο κύκλο επαφής και ο οποίος προβάλλεται ως ευθεία και άξονα των x τον ισημερινό, ο οποίος επίσης προβάλλεται ως ευθεία και είναι κάθετος στον άξονα των y. Η αρχή του συστήματος είναι η τομή του κεντρικού μεσημβρινού με τον ισημερινό.

Αν αντί για σφαίρα χρησιμοποιήσουμε ένα ΕΕΠ, τότε για μια ζώνη ο κύλινδρος θα εφάπτεται σε ένα σημείο του κεντρικού μεσημβρινού που στο ΕΕΠ δεν είναι κύκλος αλλά έλλειψη. Οι παράλληλοι προβάλλονται ως καμπύλες γραμμές με τα κυρτά να στρέφονται προς τον ισημερινό, ενώ οι μεσημβρινοί ως καμπύλες γραμμές με τα κοίλα να στρέφονται προς τον κεντρικό μεσημβρινό και αποκλίνοντας απ' αυτόν τόσο όσο περισσότερο απέχουν.

Οι σχέσεις με τις οποίες υπολογίζουμε τις συντεταγμένες (E,N) στην Μερκατορική προβολή είναι :

$$
\begin{aligned}
N = m_0 S_\varphi + m_0 N\Bigg[& \frac{\Delta\lambda^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\Delta\lambda^4}{24}\sin\varphi\cos^3\varphi\left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right) \\
& + \frac{\Delta\lambda^6}{720}\sin\varphi\cos^5\varphi\left(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 + 445\eta^4 + 324\eta^6 - 680t^2\eta^4\right. \\
& \left. + 88\eta^8 - 600t^2\eta^6 - 192t^2\eta^8\right) + \frac{\Delta\lambda^8}{40230}\sin\varphi\cos^7\varphi\left(1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E' = m_o N_\varphi\Bigg[& \Delta\lambda\cos\varphi + \frac{\Delta\lambda^3\cos^3\varphi}{6}\left(1 - t^2 + \eta^2\right) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^5\cos^5\varphi}{120}\left(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 + 4\eta^6 - 64t^2\eta^4 - 24t^2\eta^6\right) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^7\cos^7\varphi}{5040}\left(61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

με E=E'+c όπου c=200000 ή c=500000.

και

$t = \tan\varphi$

$\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

και οι σχέσεις για τις συντεταγμένες (φ, λ) είναι:

$$
\begin{aligned}
\varphi = \varphi' & - \frac{t'}{2\rho' N' m_o^2}E'^2 + \frac{t'}{24\rho' N'^3 m_o^4}E'^4\left(5 + 3t'^2 + \eta'^2 - 4\eta'^4 - 9t'^2\eta'^2\right) \\
& - \frac{t'}{720\rho' N'^5 m_o^6}E'^6\left(61 + 90t'^2 + 45t'^4 + 46\eta'^2 - 252t'^2\eta'^2 - 3\eta'^4 + 100\eta'^6\right. \\
& \left. - 66t'^2\eta'^4 - 90t'^4\eta'^2 + 88\eta'^8 + 225t'^4\eta'^4 + 84t'^2\eta'^6 - 192t'^2\eta'^8\right) \\
& + \frac{t'}{40320\rho' N'^7 m_o^8}E'^8\left(1385 + 3633t'^2 + 4095t'^4 + 1575t'^6\right)
\end{aligned}
$$

$$\lambda = \lambda_o + \sec\varphi' \left[\frac{E'}{N'm_o} - \frac{1}{6}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^3 \left(1 + 2t'^2 + \eta'^2\right) \right.$$
$$+ \frac{1}{120}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^5 \left(5 + 6\eta'^2 + 28t'^2 - 3\eta'^4 + 8t'^2\eta'^2 + 24t'^4 - 4\eta'^6 + 4t'^2\eta'^4 + 24t'^2\eta'^6\right)$$
$$\left. - \frac{1}{5040}\left(\frac{E'}{N'm_o}\right)^7 \left(61 + 662t'^2 + 1320t'^4 + 720t'^6\right) \right]$$

όπου ρ’, N’ οι ακτίνες καμπυλότητας για πλάτος φ’ και

$$t' = \tan\varphi'$$
$$\eta' = e'^2 \cos^2\varphi'$$

Στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται τρεις παραλλαγές της ***εγκάρσιας μερκατορικής προβολής.***

- ## Η Εγκάρσια μερκατορική προβολή ζώνης 3^o (TM 3^o)

Η προβολή TM 3^0 είναι μια παραλλαγή της εγκάρσιας μερκατορικής προβολής. Έχει μέτρο γραμμική παραμόρφωσης m_o=0.9999, εύρος ζώνης 3^o με αναφορά το Ελληνικό Datum και το ελλειψοειδές του Bessel και σταθερή ποσότητα c=200000. Η αφετηρία των λ είναι ο μεσημβρινός του βάθρου του Αστεροσκοπείου Αθηνών. Τρεις είναι οι ζώνες για τον Ελλαδικό χώρο :

1. Η Δυτική με κεντρικό μεσημβρινό λ_0=-3^0
2. Η Κεντρική με κεντρικό μεσημβρινό λ_0=0^0
3. Η Ανατολική με κεντρικό μεσημβρινό λ_0=3^0

Ο άξονας των τετμημένων θεωρείται η εφαπτόμενη στον παράλληλο αφετηρίας 34^0.

- ## Η Εγκάρσια μερκατορική μιας ζώνης.

Η TM μιας ζώνης χρησιμοποιείται παράλληλα με το νέο Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ 87) και το ελλειψοειδές εκ’ περιστροφής GRS’80, με κεντρικό μεσημβρινό λ=24^o και άξονα τετμημένων τον ισημερινό. Το μέτρο γραμμικής παραμόρφωσης είναι m_0=0.9996 και η σταθερή ποσότητα c=500000. Η προβολή TM ’87 είναι το προβολικό σύστημα που χρησιμοποιείται από τον ΟΚΧΕ για την δημιουργία του Ελληνικού Κτηματολογίου.

- **Η προβολή UTM.**

Η UTM στην Ελλάδα εφαρμόζεται σε συνδυασμό με το Ευρωπαϊκό Datum (ED 50) και το ΕΕΠ του Hayford. Ο Ελληνικός χώρος περιλαμβάνεται από τις ζώνες 34 και 35 με κεντρικούς μεσημβρινούς $\lambda=21^o$ και $\lambda=27^0$ αντίστοιχα. Το μέτρο γραμμικής παραμόρφωσης είναι $m_o=0.9996$ και η σταθερή ποσότητα c=500000. Ο άξονας των τετμημένων θεωρείται η εφαπτόμενη στον ισημερινό.

5.3 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

5.3.1 Αλλαγή συστήματος αναφοράς

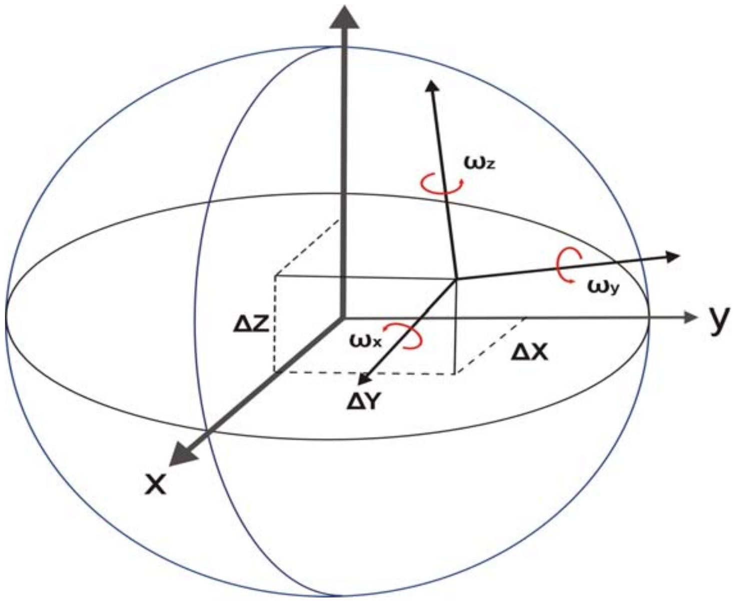
Το παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού θέσης (Global Positioning System - GPS) χρησιμοποιείται πλέον στην συντριπτική πλειοψηφία των Τοπογραφικών και Γεωδαιτικών εργασιών διότι, όπως ήδη αναφέρθηκε υπερτερεί σε σχέση με τις υπόλοιπες - προγενέστερες - μεθόδους. Το σύστημα μέτρησης των συντεταγμένων του συστήματος GPS είναι το WGS'84 (World Geodetic System 1984) και το ελλειψοειδές εκ' περιστροφής που χρησιμοποιείται έχει σταθερές:

Μεγάλο ημιάξονα a=6378137.0

Επιπλάτυνση f=298.257223563

στο σύστημα αναφοράς WGS'84 αναφέρονται όλες οι παρατηρήσεις που κάνουμε με το GPS αν στη συνέχεια θέλουμε να μεταβούμε σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς τότε είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις παραμέτρους που συνδέουν τα δύο συστήματα.

Έστω ότι έχουμε δύο καρτεσιανά συστήματα αναφοράς το πρώτο είναι το WGS '84 το σύστημα αναφοράς του GPS και το δεύτερο ένα τοπικό σύστημα αναφοράς ΤΣ. Τα δυο συστήματα διαφέρουν κατά τρεις συνιστώσες παράλληλης μετάθεσης της αρχής των αξόνων καθώς επίσης και κατά τρεις γωνίες στροφής των αξόνων του ενός συστήματος ως προς το άλλο (Σχήμα 5.6).



Σχήμα 5.6. Γεωδαιτικά Συστήματα αναφοράς.

Αναλυτικά οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα δύο συστήματα είναι (Ρωσσικόπουλος 1998):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{T\Sigma}} = \lambda \cdot \boldsymbol{R} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

όπου **R** είναι ο ορθογώνιος πίνακας στροφής που προκύπτει από το γινόμενο τριών επιμέρους πινάκων στροφής Euler. Για δεξιόστροφα συστήματα αναφοράς η σειρά των διαδοχικών στροφών μπορεί να είναι :

i. Στροφή κατά γωνία ω_x γύρω από τον άξονα x , ο πίνακας στροφής είναι

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix}$$

ii. Στροφή κατά γωνία ω_y γύρω από τον άξονα y , ο πίνακας στροφής είναι

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix}$$

iii. Στροφή κατά γωνία ω_z γύρω από τον άξονα z , ο πίνακας στροφής είναι

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε ο πίνακας **R** είναι :

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\omega_x)\cdot\boldsymbol{R}_2(\omega_y)\cdot\boldsymbol{R}_3(\omega_z) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\omega_y\cos\omega_z & \cos\omega_y\sin\omega_z & -\sin\omega_y \\ \sin\omega_x\sin\omega_y\cos\omega_z - \cos\omega_x\sin\omega_z & \sin\omega_x\sin\omega_y\sin\omega_z + \cos\omega_x\cos\omega_z & \sin\omega_x\cos\omega_y \\ \cos\omega_x\sin\omega_y\cos\omega_z + \sin\omega_x\sin\omega_z & \cos\omega_x\sin\omega_y\sin\omega_z - \sin\omega_x\cos\omega_z & \cos\omega_x\cos\omega_y \end{bmatrix}$$

Στις συνήθεις γεωδαιτικές εφαρμογές επειδή οι γωνίες στροφής είναι μικρές ο παραπάνω πίνακας απλοποιείται ως εξής :

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς για να μεταβούμε από το σύστημα αναφοράς του GPS στο τοπικό σύστημα πρέπει να γνωρίζουμε τις συνιστώσες μετάθεσης και τις γωνίες στροφής . Σε αντίθεση περίπτωση θα πρέπει να υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους εφαρμόζοντας ένα μετασχηματισμό στις τρεις διαστάσεις μεταξύ των δύο συστημάτων. Οι εξισώσεις του μετασχηματισμού ομοιότητας για δύο δεξιόστροφα γεωδαιτικά συστήματα στις συνήθεις περιπτώσεις είναι:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{T\Sigma}} = \lambda\cdot\begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός των παραμέτρων του μετασχηματισμού γίνεται με ελάχιστα τετράγωνα ομοίως με τον μετασχηματισμό ομοιότητας στις δύο διαστάσεις.

Στην περίπτωση όπου το τοπικό σύστημα είναι το ΕΓΣΑ’87 και οι απαιτήσεις μας σε ακρίβεια είναι της τάξης του μέτρου, σαν σχέση που συνδέει τα δύο συστήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{E\Gamma\Sigma A'87}} = \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix}_{WGS'84} + \begin{bmatrix} 199.723 \\ -75.030 \\ -246.018 \end{bmatrix}$$

Τα συστήματα ΕΓΣΑ'87 και WGS'84 έχουν σχεδόν παράλληλους άξονες.

5.3.2 Υπολογισμός των προβολικών συντεταγμένων από συντεταγμένες στο WGS'84

Οι μετρήσεις με το GPS χαρακτηρίζονται από καλή ακρίβεια στον προσδιορισμό της σχετικής θέσης μεταξύ των σημείων παρατήρησης (της τάξης του εκατοστού) ως προς το σύστημα αναφοράς WGS'84. Επειδή όμως στον υπολογισμό του υψομέτρου η ακρίβεια προσδιορισμού του υψομέτρου δεν είναι ανάλογη της οριζόντιας ακρίβειας (ελλιπής γνώση του πεδίου βαρύτητας κτλ.), για να διατηρήσουμε την καλή ακρίβεια της οριζόντιας θέσης η διαδικασία μετατροπής των συντεταγμένων εκτελείται σε δύο στάδια, ξεχωριστά για την οριζόντια θέση και ξεχωριστά για το υψόμετρο. Η μετατροπή των συντεταγμένων των σημείων από το σύστημα αναφοράς WGS'84 σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς για την οριζόντια θέση γίνεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Συνορθώνουμε το δίκτυο GPS στο σύστημα WGS'84 ως ελεύθερο ή με ελάχιστες δεσμεύσεις.

2. Από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) στο WGS'84 υπολογίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο τοπικό σύστημα αναφοράς, για όλες τις κορυφές του δικτύου. Οι νέες συντεταγμένες στο τοπικό σύστημα καλούνται και προσεγγιστικές, επειδή δεν μας δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια στο τοπικό σύστημα, ο λόγος είναι ότι συνήθως δεν γνωρίζουμε τις σχέσεις μετατροπής μεταξύ των δύο συστημάτων με την απαιτούμενη ακρίβεια.

3. Από τις προσεγγιστικές καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) στο τοπικό σύστημα υπολογίζουμε τις προσεγγιστικές γεωδαιτικές (φ,λ,h) .

4. Από τις προσεγγιστικές γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ,λ,h) του τοπικού συστήματος υπολογίζουμε τις προβολικές συντεταγμένες (x,y) στην αντίστοιχη προβολή με βάση τις εξισώσεις απεικόνισης.

5. Υπολογίζουμε τις παραμέτρους του μετασχηματισμού ομοιότητας στο προβολικό επίπεδο, μεταξύ των προσεγγιστικών προβολικών συντεταγμένων και ενός αριθμού σημείων γνωστών προβολικών συντεταγμένων (τουλάχιστον τριών σημείων).

6. Με βάση τις παραμέτρους του μετασχηματισμού ομοιότητας που υπολογίσαμε μετασχηματίζουμε και τα υπόλοιπα σημεία του δικτύου.

Ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιούμε στο 5^o βήμα είναι ο ομοιότητας. Ο λόγος που επιλέγουμε αυτόν το μετασχηματισμό είναι για να διατηρήσουμε την καλή γεωμετρία του αρχικού δικτύου μας. Στην συνέχεια περιγράφουμε τους αλγορίθμους των δύο συνηθέστερων μετασχηματισμών, του μετασχηματισμού ομοιότητας και του αφινικού.

5.3.3 Μετασχηματισμός Ομοιότητας

Οι μετασχηματισμοί είναι διαδικασίες που μας επιτρέπουν να μεταβούμε από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο. Για να υπολογίσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τα δύο συστήματα αναφοράς θα πρέπει να γνωρίζουμε τις θέσεις (συντεταγμένες) κάποιου συγκεκριμένου, για κάθε τύπο μετασχηματισμού, αριθμού σημείων <u>κοινών και στα δύο συστήματα.</u>

Ο μετασχηματισμοί μπορεί να αφορούν τρισδιάστατα συστήματα αναφοράς ή δισδιάστατα. Για την επίλυση του προβλήματος του μετασχηματισμού ομοιότητας απαιτούνται τουλάχιστον 2 γνωστά σημεία. Στην περίπτωση όπου γνωρίζουμε περισσότερα των δύο σημείων, καταφεύγουμε στην μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων . Με την προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις των συντεταγμένων είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους και της ίδιας ακρίβειας καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις υπολογισμού των παραμέτρων του μετασχηματισμού:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i X_i + v_i Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(u_i^2 + v_i^2)}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i X_i - u_i Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(u_i^2 + v_i^2)}, \quad t_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad t_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

όπου u_i, v_i είναι οι αναγόμενες συντεταγμένες των x_i, y_i αντίστοιχα ,στο κέντρο βάρους τους δηλαδή

$$u_i = x_i - \bar{x} \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{και} \qquad v_i = y_i - \bar{y} \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

όπου n ο αριθμός των σημείων.Για τα υπόλοιπα σημεία οι σχέσεις του μετασχηματισμού γίνονται :

$$X_i = au_i + bv_i + t_x$$
$$Y_i = -bu_i + av_i + t_y$$

5.3.4 Αφινικός μετασχηματισμός

Στον αφινικό μετασχηματισμό έχουμε δύο επιπλέον παραμέτρους σε σχέση με τον μετασχηματισμό ομοιότητας, συγκεκριμένα υπολογίζουμε δύο μεταθέσεις, δύο γωνίες στροφής, και δύο συντελεστές κλίμακας κατά x και y. Η μορφή του αφινικού μετασχηματισμού για συστήματα δύο διαστάσεων (επίπεδο) είναι :

$$X = a_1 x_i + b_1 y_i + t_x$$
$$Y = a_2 x_i + b_2 y_i + t_y$$

όπου x_i, y_i οι συντεταγμένες των σημείων στο αρχικό σύστημα αναφοράς και X_i, Y_i οι συντεταγμένες στο τελικό σύστημα αναφοράς.

Όπως φαίνεται από την μορφή των εξισώσεων για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους του μετασχηματισμού a_1, a_2, b_1, b_2 απαιτούνται τουλάχιστον τρία κοινά σημεία. Συνήθως όμως για αυξήσουμε την ακρίβεια αλλά και για καλύτερο έλεγχο χρησιμοποιούμε περισσότερα των τριών σημείων. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε n κοινά σημεία γνωστών συντεταγμένων, μπορούμε να δημιουργήσουμε 2n εξισώσεις με 6 αγνώστους και στην περίπτωση που τα κοινά σημεία είναι περισσότερα των τριών, δηλαδή όταν n > 3, το σύστημα έχει περισσότερες από μια λύσεις. Για την επίλυση του προβλήματος καταφεύγουμε στην μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Με την προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις των συντεταγμένων είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους και της ίδιας ακρίβειας καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις υπολογισμού των παραμέτρων του μετασχηματισμού :

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sum_{i=1}^{n} u_i X_i - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \sum_{i=1}^{n} v_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2}, \quad a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i X_i - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \sum_{i=1}^{n} u_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2}, \quad b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2}$$

$$t_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \quad t_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

όπου u_i, v_i είναι οι αναγόμενες συντεταγμένες των x_i, y_i αντίστοιχα ,στο κέντρο βάρους τους δηλαδή

$$u_i = x_i - \overline{x} \quad , \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{και} \qquad v_i = y_i - \overline{y} \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

όπου n ο αριθμός των σημείων. Για να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό και για τα υπόλοιπα σημεία του συστήματος οι αρχικές σχέσεις παίρνουν τη μορφή :

$$X = a_1 u_i + b_1 v_i + t_x$$
$$Y = a_2 u_i + b_2 v_i + t_y$$

5.3.5 Αλλαγή προβολικού συστήματος για τον Ελληνικό Χώρο

Ένα προβολικό σύστημα χαρακτηρίζεται από το είδος της προβολής που χρησιμοποιείται και τον τρόπο εφαρμογής της σε συνδυασμό πάντοτε με το γεωδαιτικό Datum που χρησιμοποιείται. Στους μετασχηματισμούς, με τις προβολές και τα Datum που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα συναντάμε τις εξής δύο περιπτώσεις :

- Αλλάζει η προβολή ενώ το Datum παραμένει το ίδιο. Περίπτωση μετασχηματισμού π.χ από Hatt σε TM 3^0. Σε αυτήν την περίπτωση τα (x, y) της Hatt γίνονται (φ, λ) και στην συνέχεια μετατρέπονται σε (E, N) στην TM 3^0 από τις εξισώσεις απεικόνισης της κάθε προβολής.

- Αλλάζει η προβολή και το Datum. Περίπτωση μετασχηματισμού π.χ από Hatt σε TM μιας ζώνης. Σε αυτήν την περίπτωση τα (χ, y) της Hatt γίνονται (φ, λ). Τα (φ, λ) γίνονται (X, Y, Z) στο Ελληνικό Datum. Τα (X, Y, Z) μετασχηματίζονται σε (X', Y', Z') στο ΕΓΣΑ 87 μέσω των παραμέτρων σύνδεσης DX, DY, DZ. Τα (X', Y', Z') μετατρέπονται σε (φ', λ') στο ΕΓΣΑ 87 και τέλος μετασχηματίζονται σε (E, N) στην TM μιας ζώνης.

Σε όλες τις περιπτώσεις μετασχηματισμών συντεταγμένων, μπορούμε να κάνουμε και μετασχηματισμούς ομοιότητας ή αφινικού για να βελτιώσουμε την ακρίβεια της προσαρμογής. Σημαντική παράμετρος στις Τα σημεία αυτά θα πρέπει να προσέχουμε να έχουν καλή κατανομή στην περιοχή που εργαζόμαστε.

π.χ υπάρχουν (από τον Ο.Κ.Χ.Ε) πολυώνυμα μετασχηματισμού Hatt -> ΕΓΣΑ 87 (όχι το αντίστροφο) που αναφέρονται σε φύλλα 1:50000.

5.4 Υπολογισμός ορθομετρικών υψομέτρων

Το GPS μπορεί να μας δώσει ακρίβεια στον σχετικό προσδιορισμό των γεωμετρικών υψομέτρων (h) της τάξεως του εκατοστού και αναφέρονται στο ΕΕΠ του GPS. Από τα γεωδαιτικά υψόμετρα μπορούν να προσδιοριστούν τα ορθομετρικά υψόμετρα (Η) με διαφορετική ακρίβεια επειδή παρεμβάλλεται και η επιφάνεια του Γεωειδούς. Γενικά η σχέση που μας δίνει το ορθομετρικό υψόμετρο όταν γνωρίζουμε το γεωμετρικό είναι :

$$h=H+N \quad ή \quad H=h-N$$

όπου N η αποχή του γεωειδούς .

Συνεπώς η ακρίβεια προσδιορισμού των ορθομετρικών υψομέτρων εξαρτάται από την γνώση που έχουμε για το Γεωειδές στην περιοχή των μετρήσεων. Τις αποχές του γεωειδούς μπορούμε να τις πάρουμε από ένα χάρτη γεωειδούς, σε αυτή την περίπτωση η ακρίβεια προσδιορισμού των ορθομετρικών υψομέτρων είναι ανάλογη της ακρίβειας του χάρτη και της διακριτικής ικανότητας εντοπισμού του κάθε σημείου.

Στην περίπτωση όπου γνωρίζουμε τα ορθομετρικά υψόμετρα σε ορισμένα σημεία και η περιοχή εργασίας είναι περίπου 10 x 10 Km, έχοντας και ένα ομαλό σχετικά γεωειδές τότε οι αποχές του γεωειδούς μπορούν να προκύψουν με την εφαρμογή μιας αναλυτικής παρεμβολής της μορφής :

$$N_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i$$

Όπου i=1,2,…n και x_i, y_i οι οριζόντιες συντεταγμένες

Σημείωση: Στην αναλυτική παρεμβολή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και μεγαλύτερης τάξης πολυώνυμο, για αύξηση της ακρίβειας.

Με την προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις των συντεταγμένων είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους και της ίδιας ακρίβειας η επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα για το αναλυτικό μοντέλο μας δίνει την παρακάτω λύση (Ρωσσικόπουλος 1998) :

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(h_i - H_i)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{a \cdot b \cdot c^2}\left\{ b \cdot \sum_{k=1}^{n} u_i (h_i - H_i) - c \cdot \sum_{k=1}^{n} v_i (h_i - H_i) \right\}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{a \cdot b \cdot c^2}\left\{ a \cdot \sum_{k=1}^{n} v_i (h_i - H_i) - c \cdot \sum_{k=1}^{n} u_i (h_i - H_i) \right\}$$

για την απλοποίηση των πράξεων αντί για τις συντεταγμένες x_i, y_i χρησιμοποιούμε τις u_i, v_i που είναι οι ανηγμένες συντεταγμένες στο κέντρο βάρους τους

$$u_i = x_i - \bar{x} \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{και} \qquad v_i = y_i - \bar{y} \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

και τις βοηθητικές μεταβλητές a, b και c

$$a = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \quad , \quad b = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \qquad \text{και} \quad c = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

και τελικά εκτιμήσεις των αποχών του γεωειδούς είναι

$$\hat{N}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i + \hat{a}_2 y_i$$

Η αναλυτική παρεμβολή μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μικρές περιοχές με την προϋπόθεση ότι τα σημεία γνωστών ορθομετρικών υψομέτρων καλύπτουν όλη την περιοχή και είναι χωροσταθμικές αφετηρίες της ΓΥΣ ή είναι σημεία που έχουν προκύψει από χωροσταθμική όδευση. Για μεγαλύτερης έκτασης περιοχές θα πρέπει να χρησιμοποιούμε πιο σύνθετα μοντέλα Γεωειδούς.