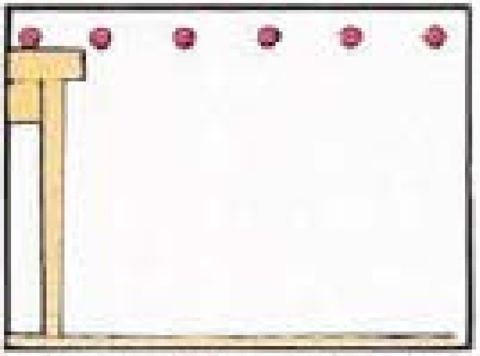
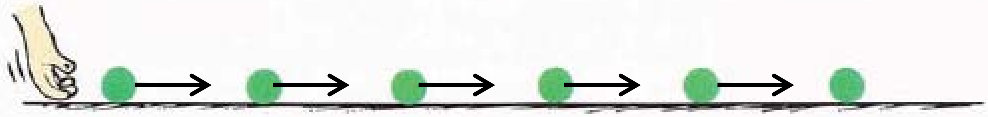
# Κίνηση βλημάτων

Βλήμα είναι ένα οποιοδήποτε σώμα που ρίχνεται με μια αρχική ταχύτητα και έπειτα συνεχίζει να κινείται μόνο με την επίδραση της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα.

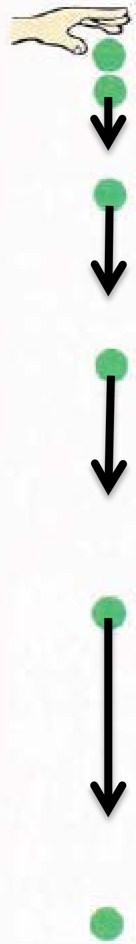
Παραδείγματα είναι η μπάλα του ποδοσφαίρου όταν τη σουτάρουμε,
μια πέτρα που πετάμε σε έναν γκρεμό,
η σφαίρα ενός όπλου μόλις φύγει από την κάνη.

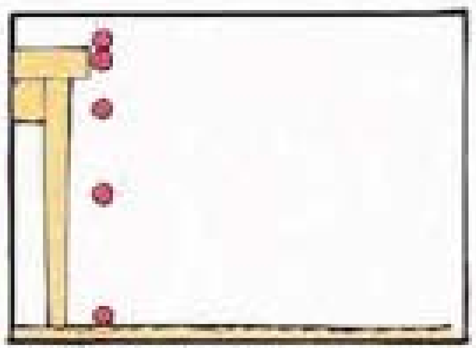
Στο σημερινό μάθημα θα αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα.



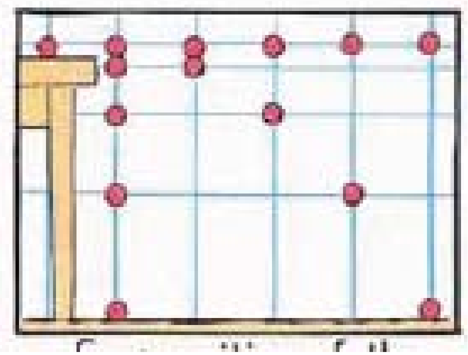


Μια μπάλα που κυλά και φεύγει από το τραπέζι αν δεν υπήρχε βαρύτητα.



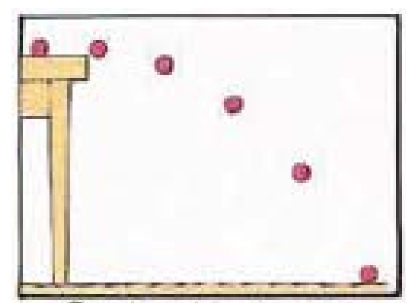


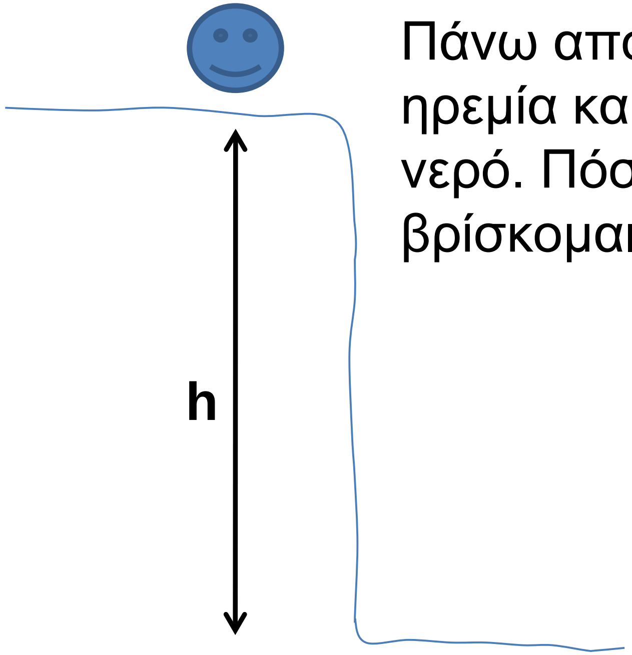
Μια μπάλα που κυλά και φεύγει από το τραπέζι με την επίδραση μόνο της βαρύτητας.



Σύνθεση των δύο κινήσεων

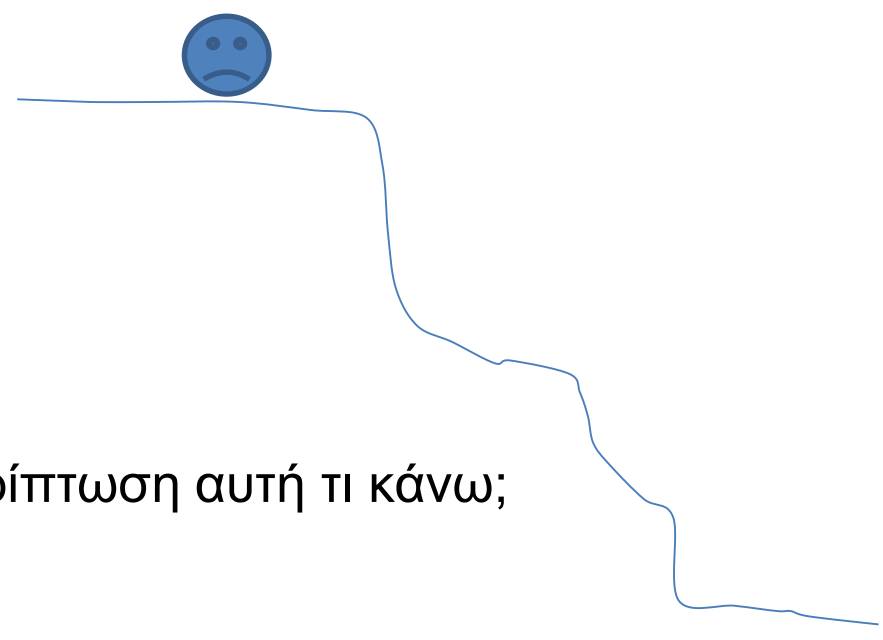
Τελικό αποτέλεσμα



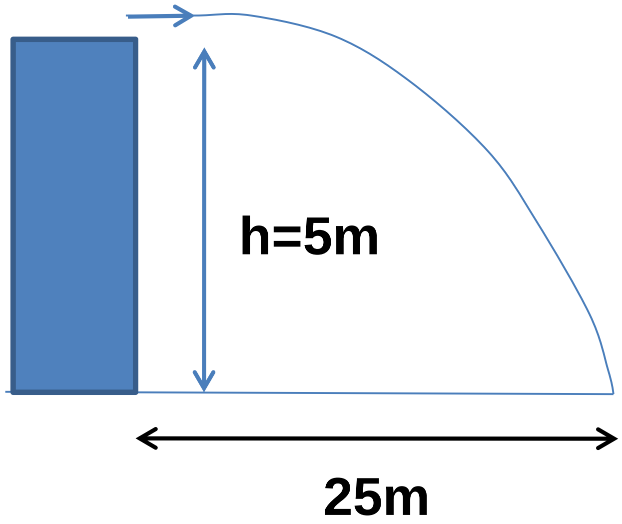



Πάνω από γκρεμό αφήνω πέτρα να πέσει κατακόρυφα από ηρεμία και μετά από 5 δευτερόλεπτα  ακούω το κτύπο της στο νερό. Πόσο ψηλότερα από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκομαι;

$$h = \frac{g}{2}t^2$$



Στην περίπτωση αυτή τι κάνω;




**Κάποιος πετά με οριζόντια ταχύτητα μια μπάλα από 5μ ύψος η οποία προσγειώνεται 25μ μακρύτερα. Για να γίνει αυτό ποια πρέπει να είναι η αρχική της ταχύτητα;**

**Πόσο χρόνο μένει η μπάλα στον αέρα;**

$$h = \frac{g}{2}t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Το χρονικό αυτό διάστημα t, πρέπει να προχωρήσει οριζόντια κατά 25 μέτρα άρα:

$$\upsilon_o = \frac{25m}{t}$$

**Υπάρχει τρόπος να μείνει περισσότερο χρόνο στον αέρα;**

# Κίνηση βλήματος υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας

## Κατακόρυφος άξονας: Ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$y_o = y_o + \upsilon_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \upsilon_{oy} - gt$$

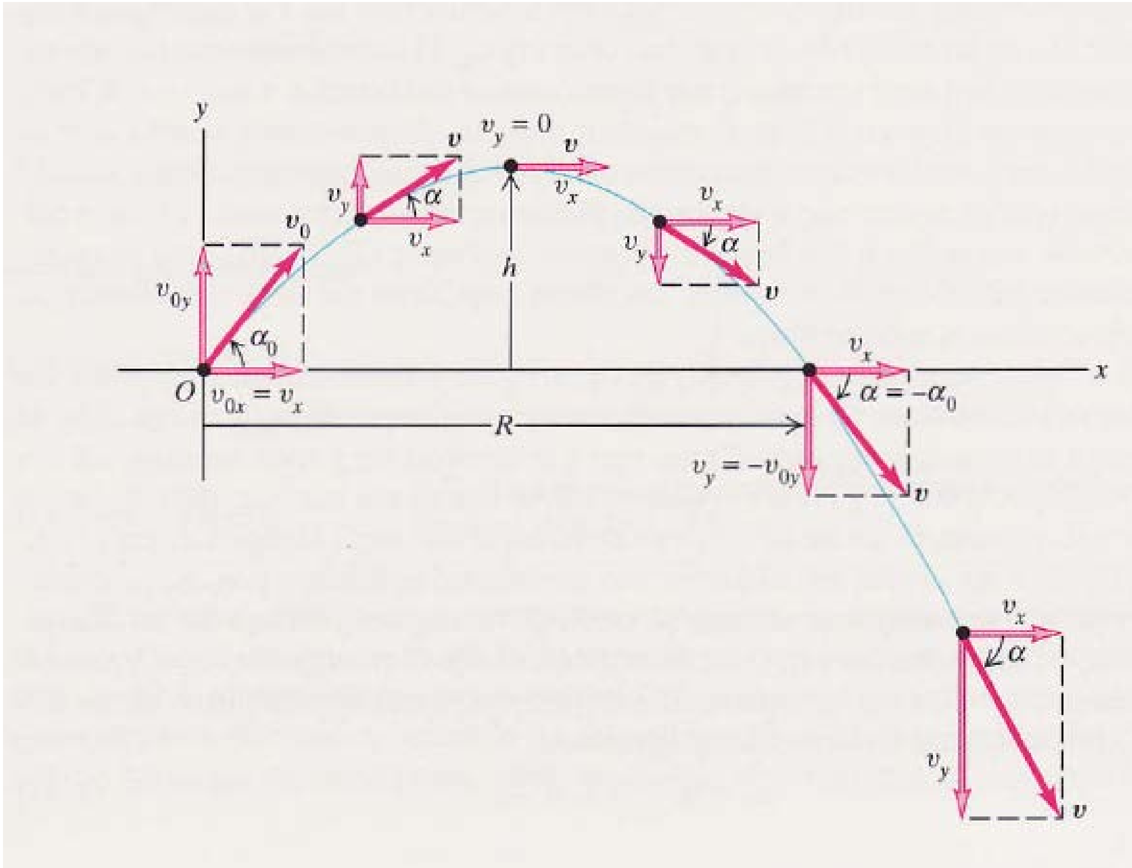
$\alpha_y$=σταθερό=g

$$\upsilon_y^2 = \upsilon_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$$

## Οριζόντιος άξονας: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$x = x_o + \upsilon_{ox} t$$

$\alpha_x$=0



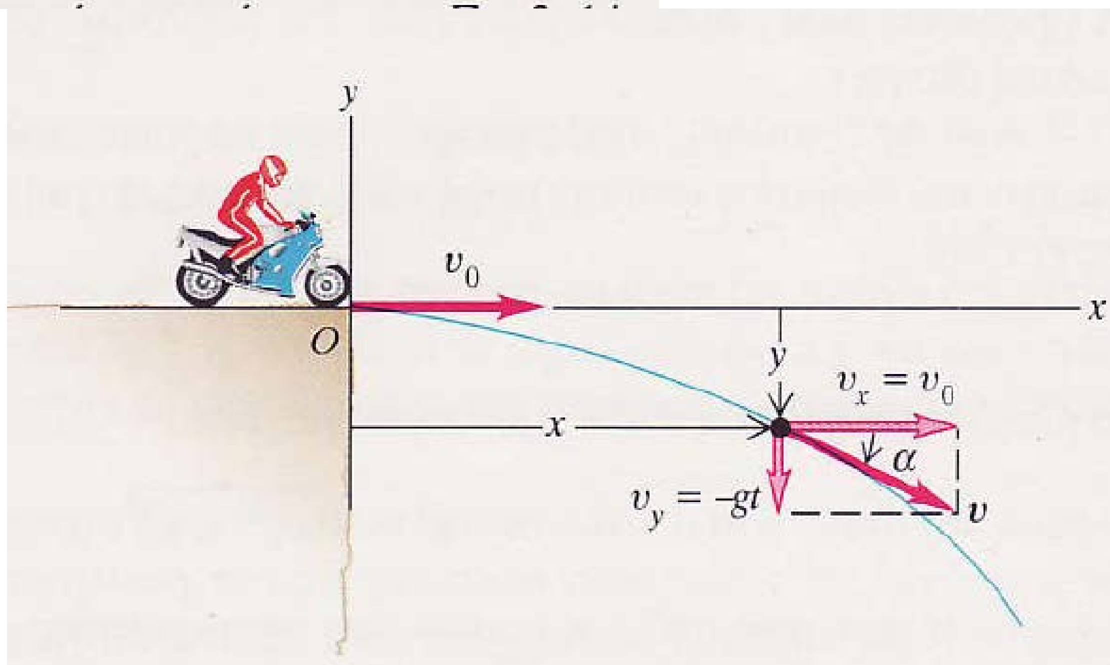

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t,$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0,$$

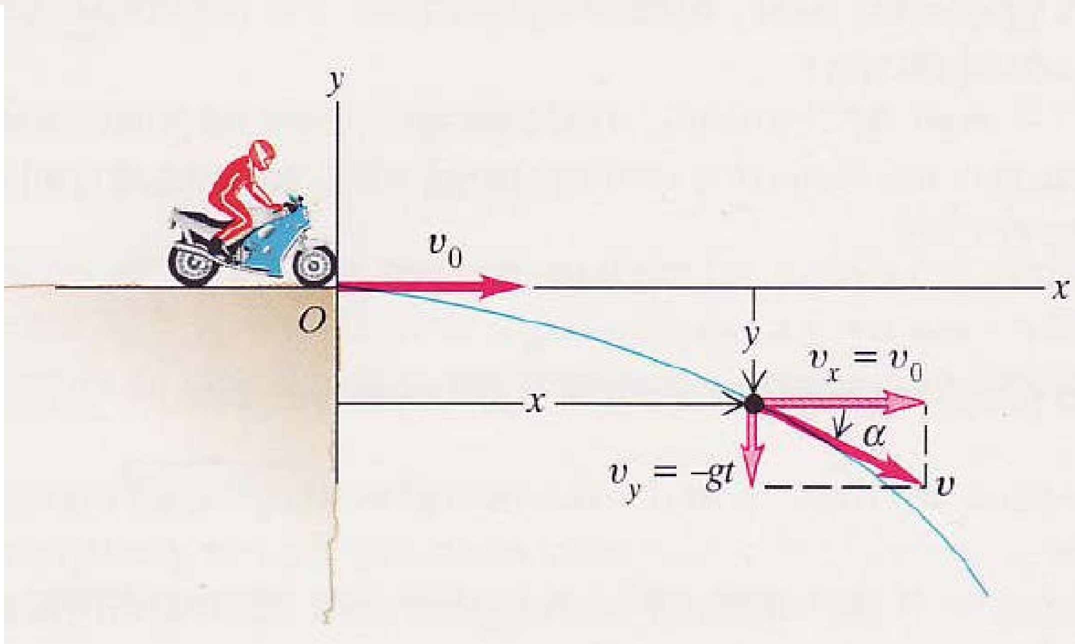
$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt.$$

**Οριζόντια βολή σώματος.** Ένας ριψοκίνδυνος μοτοσυκλετιστής πηδάει από την άκρη ενός γκρεμού. Ακριβώς στην άκρη του γκρεμού η ταχύτητά του είναι οριζόντια και έχει μέτρο 5,0 m/s. Βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή μετά από $\frac{1}{4}$ s.

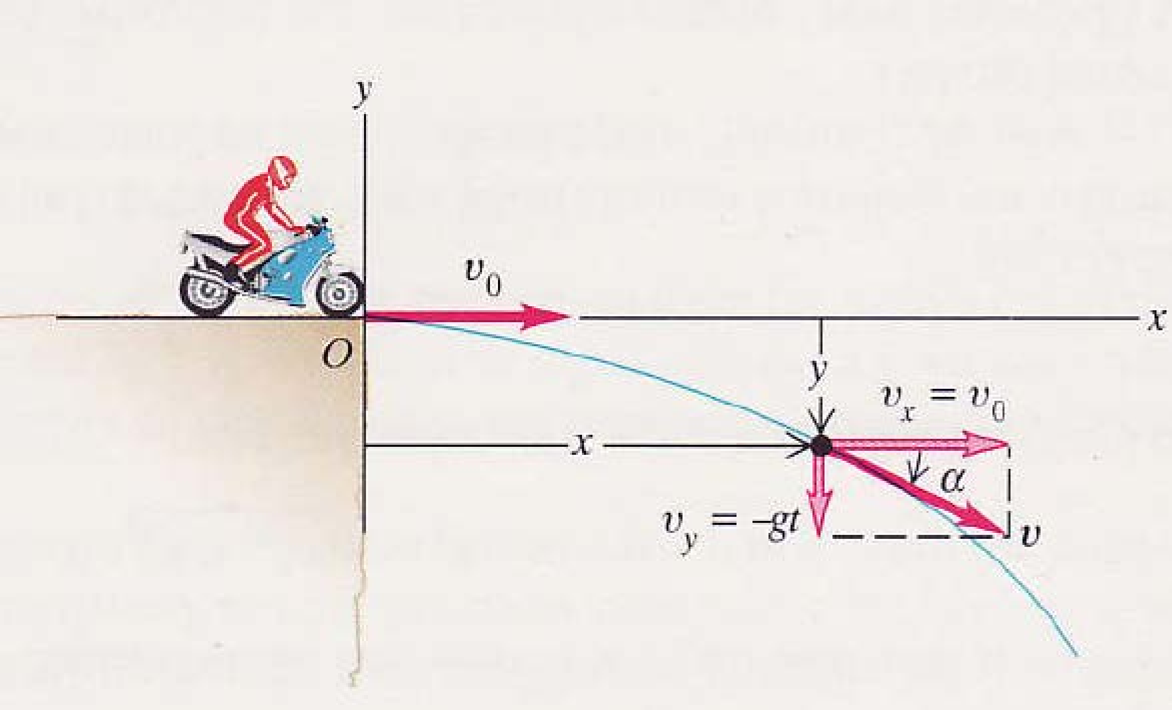



1) **Καθορίζω το αντικείμενο που θα μελετήσω που εδώ είναι η μοτοσυκλέτα και φτιάχνω σχήμα**
2) **Διαλέγω σύστημα συντεταγμένων. Εδώ τοποθετώ την αρχή των αξόνων στην άκρη του γκρεμού.**
3) **Διαλέγω τη χρονική στιγμή t=0 όταν η μοτοσυκλέτα πηδά από την άκρη του γκρεμού.**

**Οριζόντια βολή σώματος.** Ένας ριψοκίνδυνος μοτοσυκλετιστής πηδάει από την άκρη ενός γκρεμού. Ακριβώς στην άκρη του γκρεμού η ταχύτητά του είναι οριζόντια και έχει μέτρο 5,0 m/s. Βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή μετά από $\frac{1}{4}$ s.




Γνωρίζουμε τα παρακάτω μεγέθη: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = 5{,}0$ m/s, $v_{0y} = 0$, $a_x = 0$, $a_y = -g = -9{,}8$ m/s$^2$.

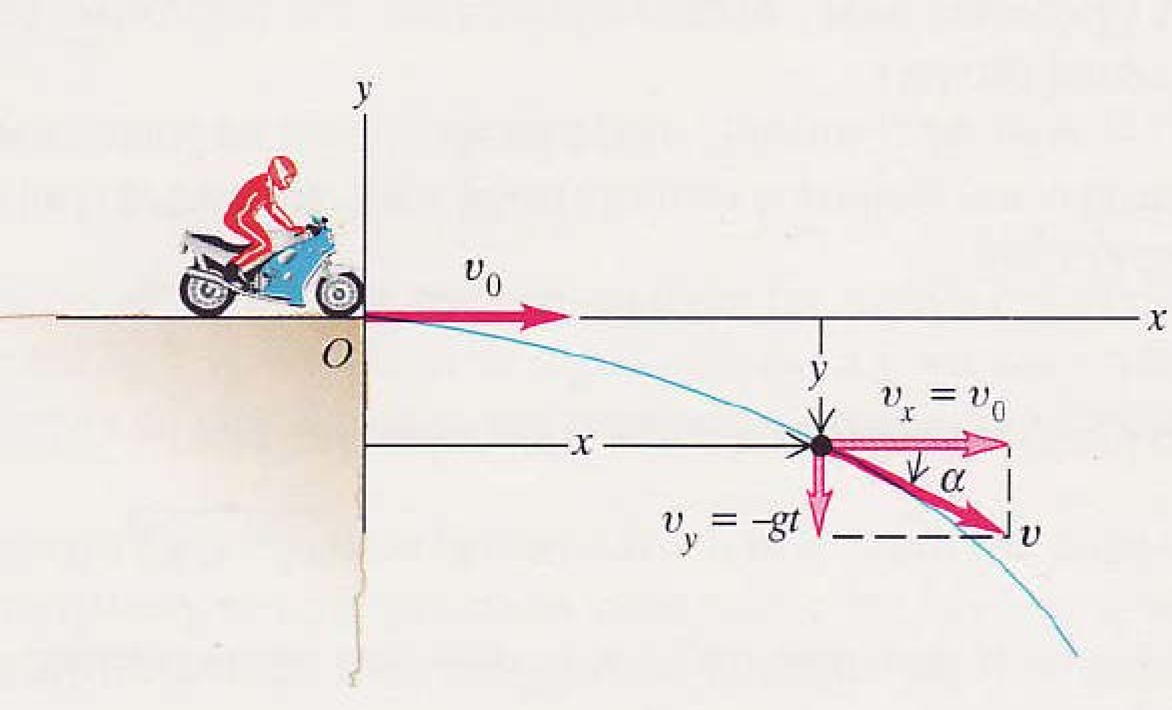



$$x = v_{0x}t = (5{,}0\ \mathrm{m/s})(\tfrac{1}{4}\ \mathrm{s}) = \mathbf{1{,}25\ m}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 = -\tfrac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(\tfrac{1}{4}\ \mathrm{s})^2 = -0{,}31\ \mathrm{m}.$$

Απόσταση του μοτοσυκλετιστή από την αρχή:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} = \sqrt{(1{,}25\boldsymbol{m})^2 + (-0{,}31\boldsymbol{m})^2} = 1{,}3\boldsymbol{m}$$




$$v_x = v_{0x} = 5{,}0\ \text{m/s},$$
$$v_y = -gt = (-9{,}8\ \text{m/s}^2)(\tfrac{1}{4}\ \text{s}) = -2{,}4\ \text{m/s}.$$

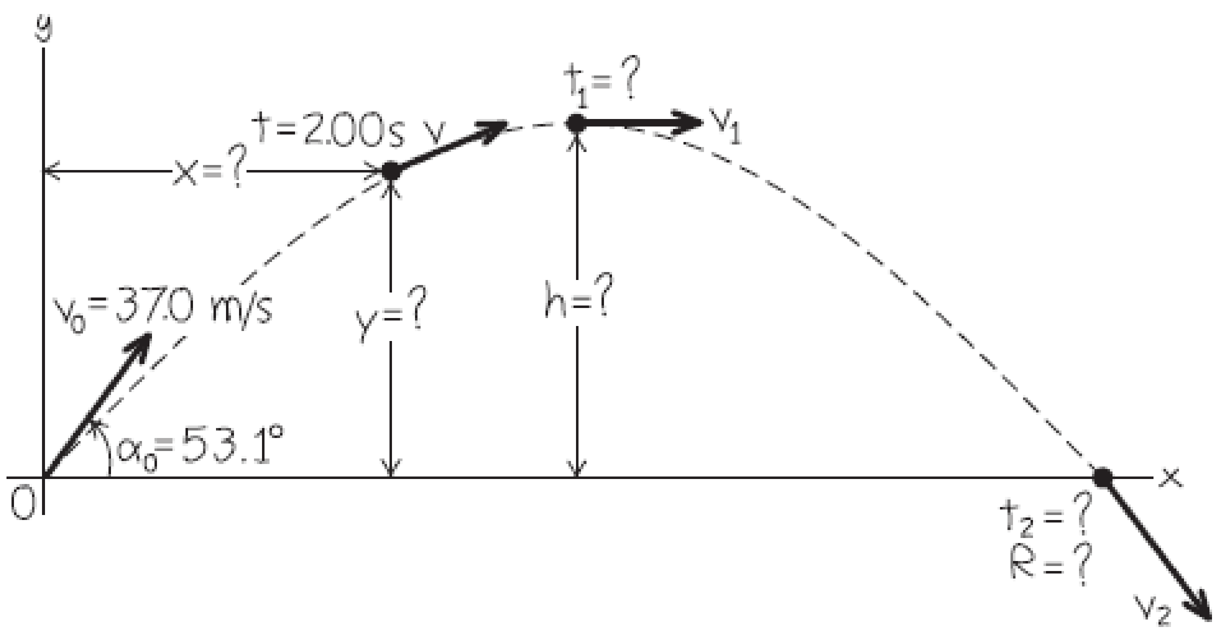
$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$$
$$= 5{,}5\ \text{m/s}.$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x}$$
$$= \arctan\frac{-2{,}4\ \text{m/s}}{5{,}0\ \text{m/s}} = -26°.$$

**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_o$=37m/s που σχηματίζει γωνία $α_0$=53,1° με το έδαφος.**

a) Θα βρούμε τη θέση της μπάλας καθώς επίσης το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητάς της όταν $t = 2$ s.

1) **Φτιάχνω σχήμα**
2) **Διαλέγω σύστημα συντεταγμένων. Εδώ τοποθετώ την αρχή των αξόνων στη θέση της μπάλας αμέσως μετά το κτύπημα .**
3) **Διαλέγω τη χρονική στιγμή t=0 αμέσως μετά το κτύπημα της μπάλας**



**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_ο$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

a) Θα βρούμε τη θέση της μπάλας καθώς επίσης το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητάς της όταν $t = 2$ s.

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0\ \mathrm{m/s})\cos 53.1° = 22.2\ \mathrm{m/s}$$

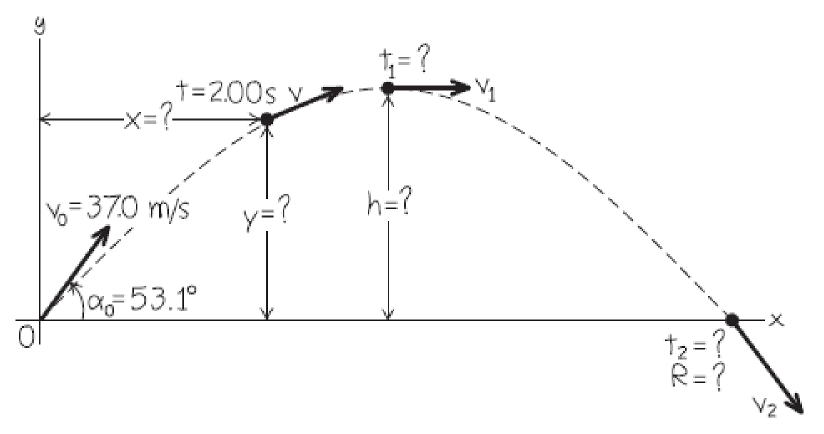
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = (37.0\ \mathrm{m/s})\sin 53.1° = 29.6\ \mathrm{m/s}$$

$$x = v_{0x}t = (22.2\ \mathrm{m/s})(2.00\ \mathrm{s}) = 44.4\ \mathrm{m}$$

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (29.6\ \mathrm{m/s})(2.00\ \mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s})^2 \\ &= 39.6\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

$$v_x = v_{0x} = 22.2\ \mathrm{m/s}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt = 29.6\ \mathrm{m/s} - (9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s}) \\ &= 10.0\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$



**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_ο$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

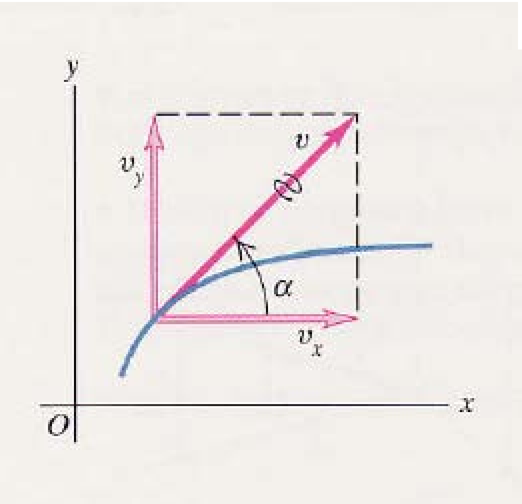
a) Θα βρούμε τη θέση της μπάλας καθώς επίσης το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητάς της όταν $t = 2$ s.

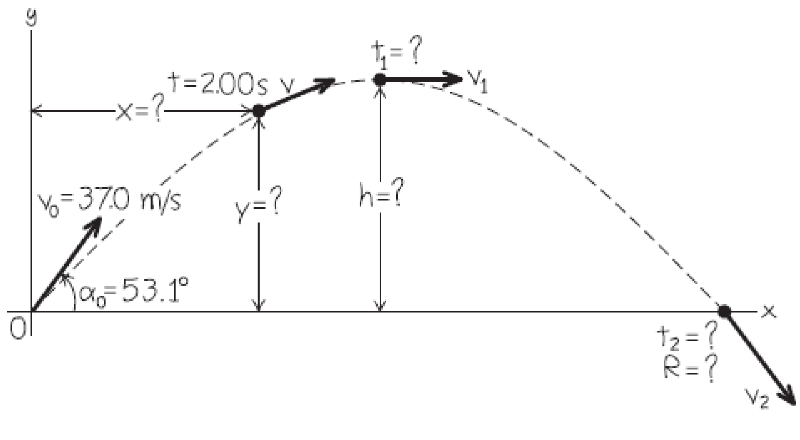
$$v_x = v_{0x} = 22.2 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 10.0 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2} = 24.4 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$



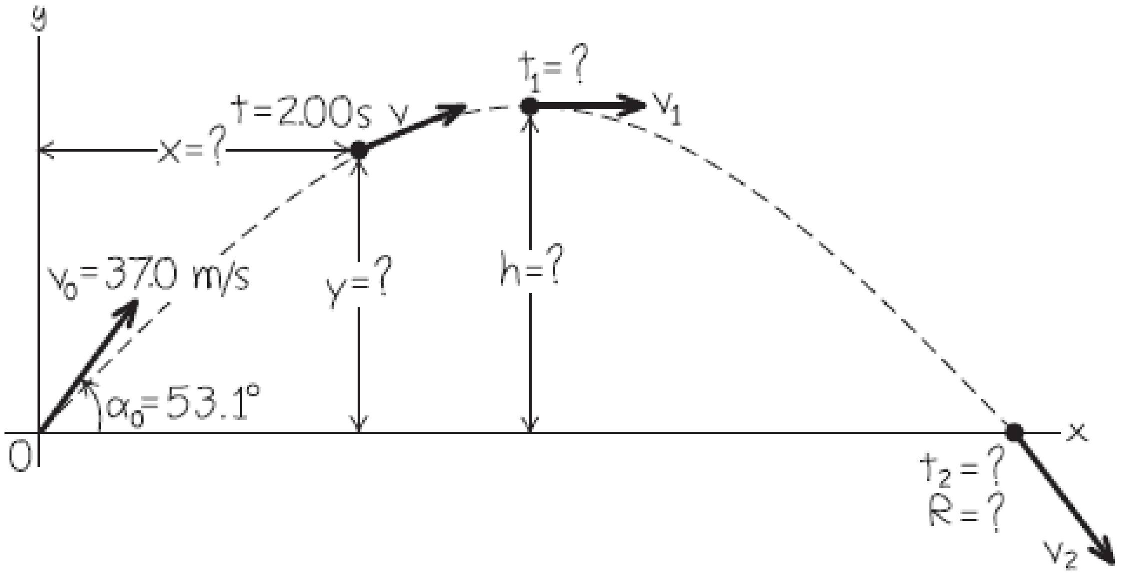
**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_ο$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

b) Θα βρούμε σε πόσο χρόνο η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος της και πόσο είναι αυτό το ύψος.

**Στο μέγιστο ύψος της η μπάλα θα έχει $υ_y$=0 τη χρονική στιγμή $t_1$.**

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6\ \mathrm{m/s}}{9.80\ \mathrm{m/s^2}} = 3.02\ \mathrm{s}$$



**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_ο$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

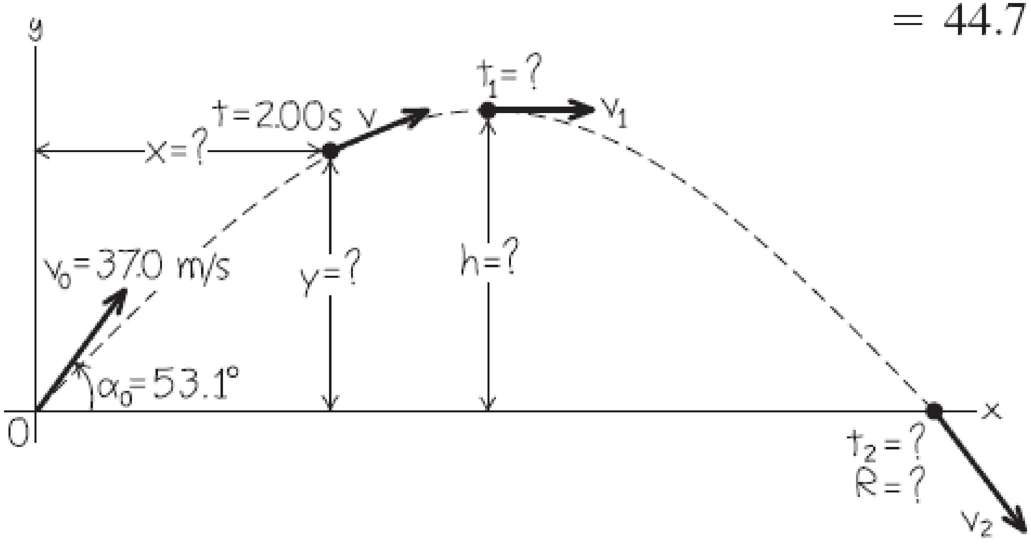
b) Θα βρούμε σε πόσο χρόνο η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος της και πόσο είναι αυτό το ύψος.

**Στο μέγιστο ύψος της η μπάλα θα φτάασει για $t_1$.**

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

**Οπότε το μέγιστο ύψος θα είναι:**

$$\begin{aligned} h &= v_{0y}t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 \\ &= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2 \\ &= 44.7 \text{ m} \end{aligned}$$



**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $u_o$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

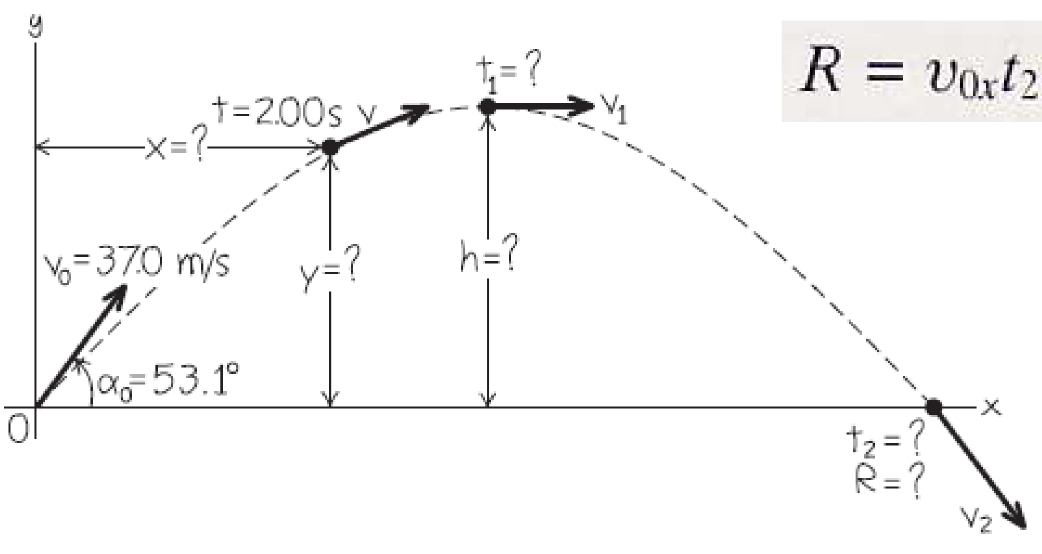
c) Θα βρούμε το *οριζόντιο βεληνεκές R*, δηλ. την οριζόντια απόσταση του σημείου στο οποίο η μπάλα πέφτει στο έδαφος από τη θέση βολής.

**Όταν η μπάλα φτάσει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_2$ θα έχουμε y=0.**

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2{}^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

**Η εξίσωση έχει δύο λύσεις:** $t_2 = 0 \quad \text{και} \quad t_2 = 6{,}04\ \text{s}$

**Προσέξτε ο χρόνος $t_2$ είναι διπλάσιος από το χρόνο ανόδου $t_1$**



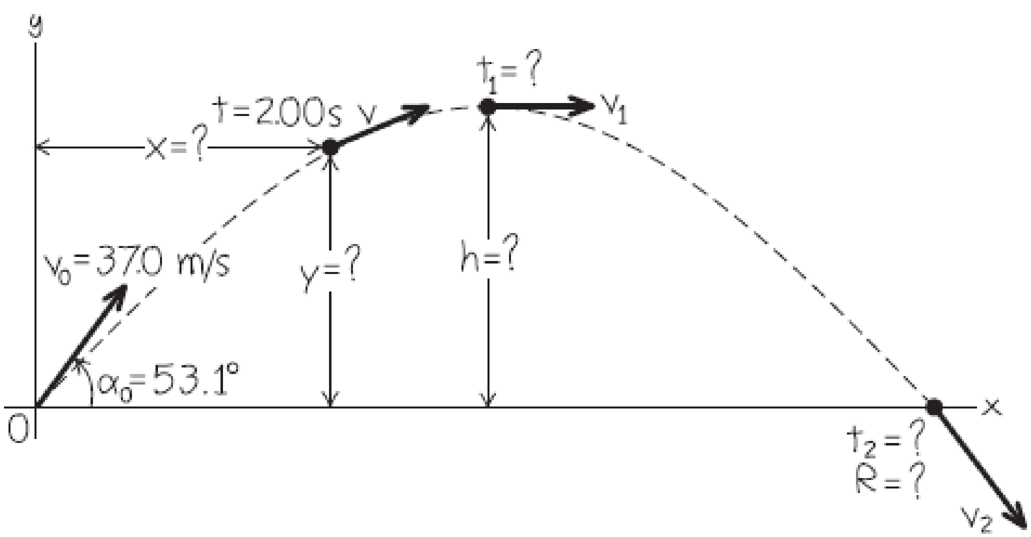

$$R = v_{0x}t_2 = (22{,}2\ \text{m/s})(6{,}04\ \text{s}) = 134\ \text{m}$$

**Κτυπάμε μπάλα του μπέιζμπολ με μπαστούνι και της δίνουμε αρχική ταχύτητα με μέτρο $υ_o$=37m/s που σχηματίζει γωνία αο 53,1° γωνία με το έδαφος.**

**Όταν η μπάλα φτάσει στο έδαφος ποια η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας;.**

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6\ \mathrm{m/s} - (9.80\ \mathrm{m/s^2})(6.04\ \mathrm{s})$$
$$= -29.6\ \mathrm{m/s}$$

**Ποια η σχέση της με την $υ_{oy}$;**

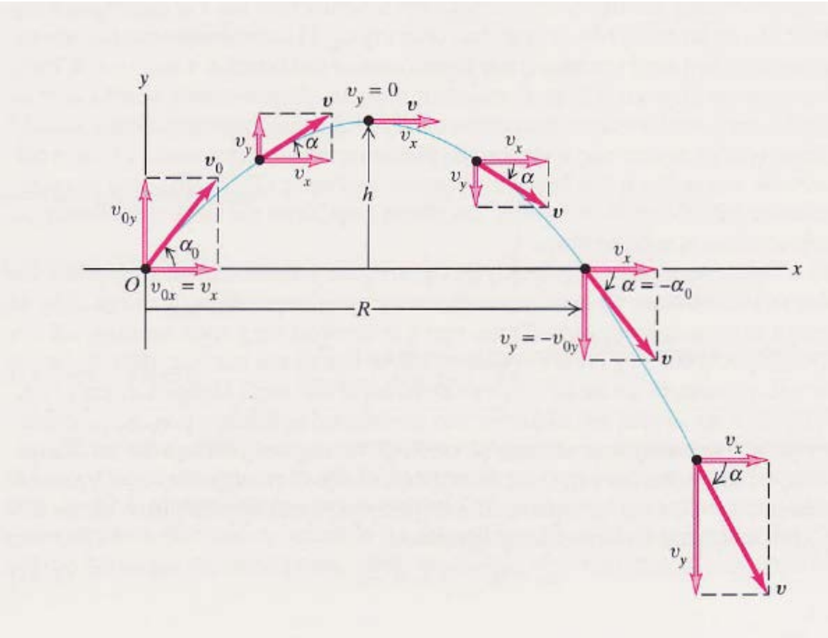


**Μέγιστο ύψος και βεληνεκές βλήματος.** Βρείτε γενικές εκφράσεις για το μέγιστο ύψος $h$ και το οριζόντιο βεληνεκές $R$ βλήματος, το οποίο βάλλεται με ταχύτητα $v_0$ και αρχική γωνία $\alpha_0$ (μεταξύ 0 και 90°) Για δεδομένη $v_0$ ποια τιμή της $\alpha_0$ δίνει μέγιστο ύψος; Μέγιστο οριζόντιο βεληνεκές;

**Στο μέγιστο ύψος της η μπάλα θα έχει $v_y$=0 τη χρονική στιγμή $t_1$.**

$$\left.\begin{array}{l} v_y = v_{0y} - g t_1 = 0 \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

**Αλλά**




$$h = (v_0 \sin\alpha_0)\left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2$$

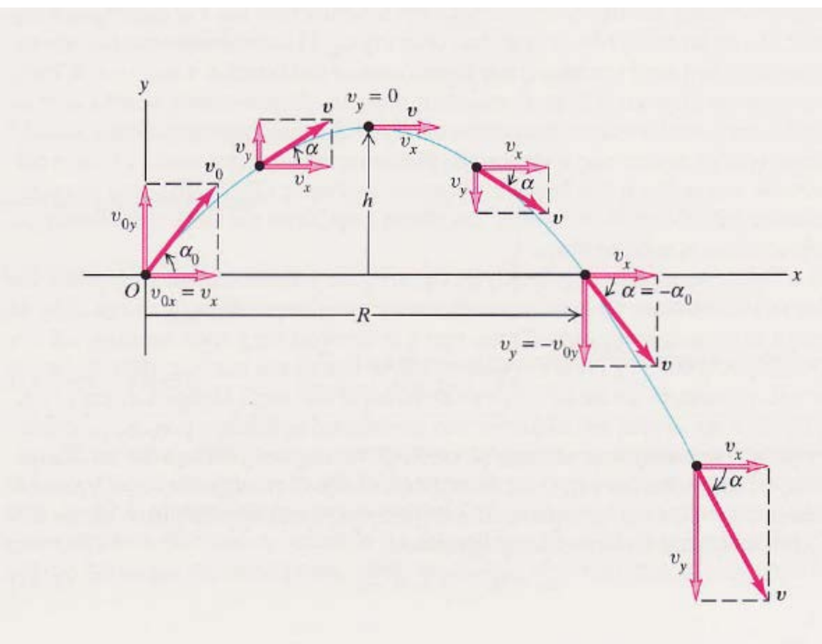
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}$$

**μέγιστο ύψος έχω όταν $\sin\alpha_o$=1 δηλαδή $\alpha_o$=90°**

**Μέγιστο ύψος και βεληνεκές βλήματος.** Βρείτε γενικές εκφράσεις για το μέγιστο ύψος $h$ και το οριζόντιο βεληνεκές $R$ βλήματος, το οποίο βάλλεται με ταχύτητα $v_0$ και αρχική γωνία $\alpha_0$ (μεταξύ 0 και 90°) Για δεδομένη $v_0$ ποια τιμή της $\alpha_0$ δίνει μέγιστο ύψος; Μέγιστο οριζόντιο βεληνεκές;

**Όταν η μπάλα φτάσει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_2$ θα έχουμε y=0.**

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^{\,2} = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$




$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

**Άρα οριζόντιο βεληνεκές R είναι:**

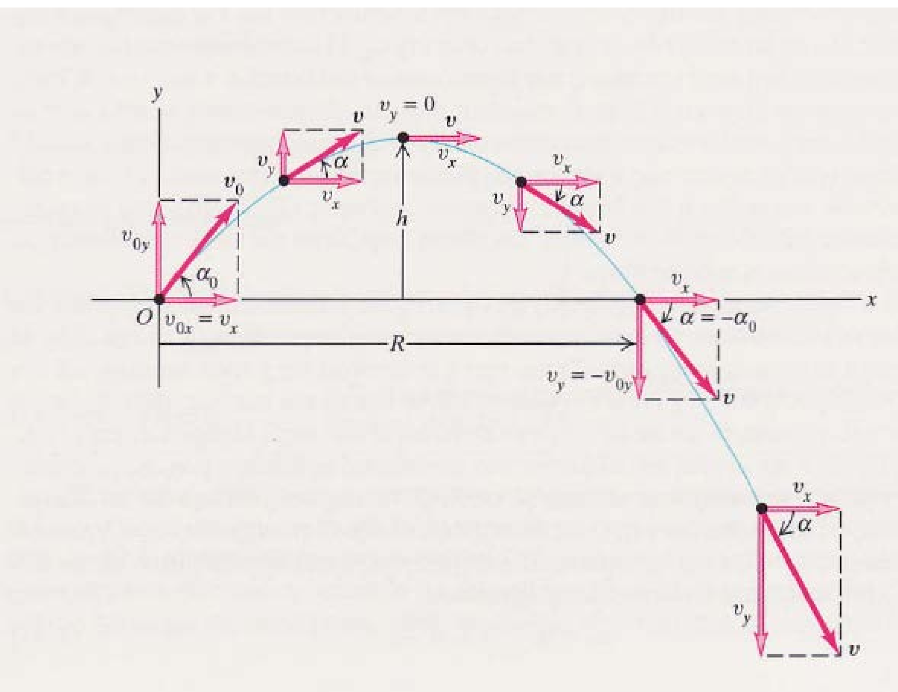
$$R = (v_0 \cos\alpha_0)t_2 = (v_0\cos\alpha_0)\frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}$$

$$= \frac{v_0^{\,2}\sin 2\alpha_0}{g}$$

**Μέγιστο ύψος και βεληνεκές βλήματος.** Βρείτε γενικές εκφράσεις για το μέγιστο ύψος $h$ και το οριζόντιο βεληνεκές $R$ βλήματος, το οποίο βάλλεται με ταχύτητα $v_0$ και αρχική γωνία $\alpha_0$ (μεταξύ 0 και 90°) Για δεδομένη $v_0$ ποια τιμή της $\alpha_0$ δίνει μέγιστο ύψος; Μέγιστο οριζόντιο βεληνεκές;

$$R = (v_0 \cos\alpha_0)t_2 = (v_0 \cos\alpha_0)\frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$




**Άρα μέγιστο οριζόντιο βεληνεκές R έχω όταν :**

$$\sin 2\alpha_o = 1$$

$$2\alpha_0 = 90^\circ$$

$$\alpha_0 = 45^\circ$$