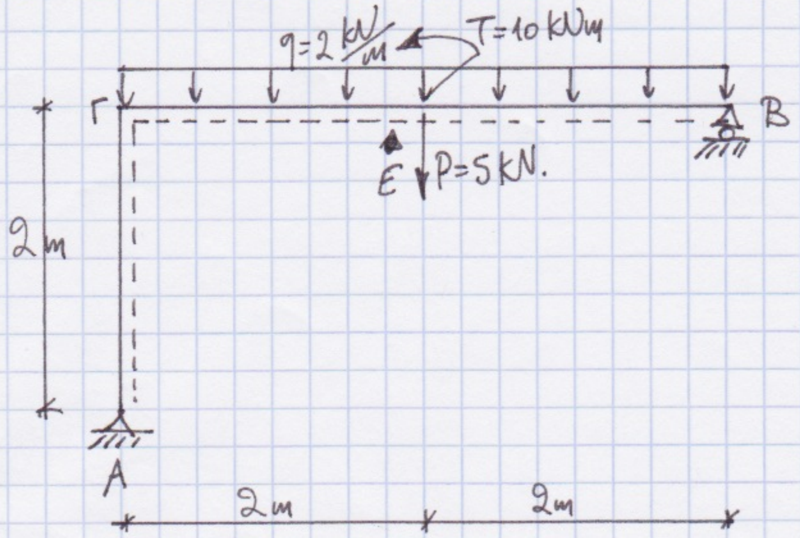
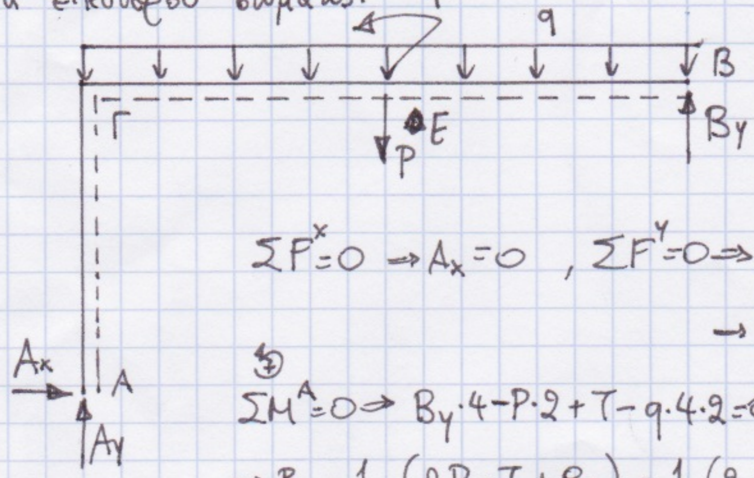
Μηχανική 9η Εβδομάδα Ασκήσεις Πράξης 08-09/12/2011.

ΑΣΚΗΣΗ 1. ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΤΗΣ ΔΟΚΟΥ.



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow A_x = 0$, $\Sigma F^y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P - q \cdot 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_y + B_y = P + 4q = 5 + 4 \cdot 2 = 13\,kN$

$\Sigma M^A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 4 - P \cdot 2 + T - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_y = \frac{1}{4}\left(2P - T + 8q\right) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot 5 - 10 + 8 \cdot 2\right) = 4\,kN.$

άρα $A_y = 13 - 4 = 9\,kN.$

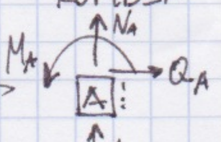
Χαρακτηριστικά σημεία: A (ακραία στήριξη), B (ακραία στήριξη)

Γ (κόμβος), E (σημείο άσκησης συγκεντρωμένου φορτίου).

Τμήματα: ΑΓ ($l_{ΑΓ} = 2m$), ΓΕ ($l_{ΓΕ} = 2m$), ΕΒ ($l_{ΕΒ} = 2m$).

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΟΜΒΩΝ (ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ):

• Κόμβος Α:

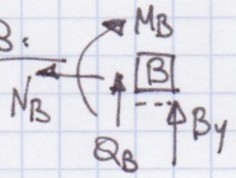


$\Sigma M^A = 0 \rightarrow M_A = 0$ (άρθρωση!).

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow N_A + A_y = 0 \Rightarrow N_A = -A_y = -9\,kN.$

ΟΙ ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΕΝ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ — ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΟΥΝΤΑΙ!!!

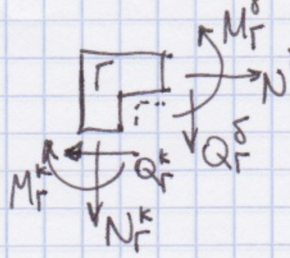
• Κόμβος Β:



$\Sigma M^B = 0 \Rightarrow M_B = 0$ (ακραία κύλιση!).

$\Sigma F^x = 0 \rightarrow N_B = 0.$

- Κόμβος Γ:



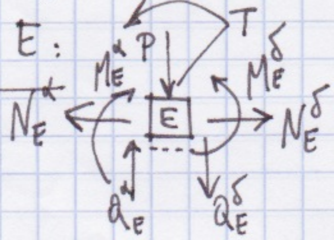
$$ΣM^Γ=0 \Rightarrow M_Γ^δ - M_Γ^κ = 0 \Rightarrow M_Γ^δ = M_Γ^κ = M_Γ$$

$$ΣF^x=0 \Rightarrow N_Γ^δ - Q_Γ^κ = 0 \Rightarrow N_Γ^δ = Q_Γ^κ$$

$$ΣF^y=0 \Rightarrow Q_Γ^δ + N_Γ^κ = 0 \Rightarrow N_Γ^κ = -Q_Γ^δ$$

Οι εξισώσεις που συνδέουν τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις θα χρησιμεύσουν αργότερα για τον υπολογισμό της αξονικής δύναμης στον κόμβο, αφού έχει σχεδιαστεί το [Q].

- Κόμβος Ε:

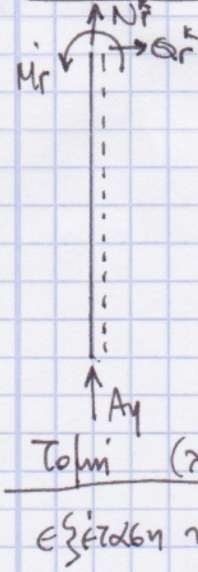


$$ΣM^E=0 \Rightarrow M_E^δ + T - M_E^α = 0 \Rightarrow M_E^α = M_E^δ + T.$$

$$ΣF^x=0 \Rightarrow N_E^δ - N_E^α = 0 \Rightarrow N_E^α = N_E^δ = N_E.$$

⇨ Σε πρώτη φάση μάς ενδιαφέρουν μόνο οι ροπές στις πλευρές των χαρακτηριστικών σημείων. Αυτές οι ροπές είναι οι ΑΚΡΑΙΕΣ ΡΟΠΕΣ των τμημάτων, οι οποίες "φορτίζουν" τις υποκατάστατες δοκούς των τμημάτων ΑΓ, ΓΕ και ΕΒ. Έχοντας τις τιμές καμπτικής ροπής στα ακραία σημεία του φορέα, υπολογίζουμε τις $M_Γ$ και $M_E^α$, $M_E^δ$, κάνοντας τομές σε κατάλληλες διατομές και εξετάζοντας την ισορροπία των τμημάτων φορέα.

- Τομή (λίγο) κάτω από το Γ: εξέταση του τμήματος ΑΓ:

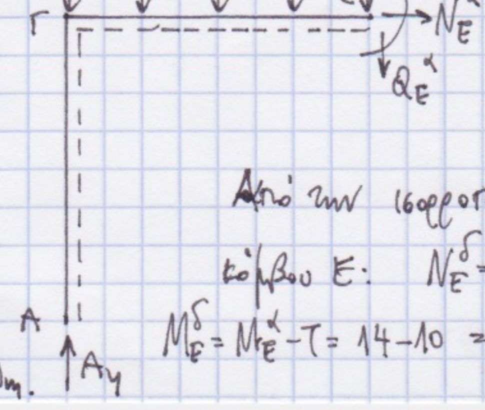


$$ΣM^Γ=0 \Rightarrow M_Γ^κ=0.$$

$$ΣF^y=0 \Rightarrow N_B + A_y = 0 \Rightarrow N_B = -A_y = -9\,kN.$$

- Τομή (λίγο) αριστερά του Ε:

εξέταση του τμήματος ΑΓΕ



$$ΣF^x=0 \Rightarrow N_E^α=0$$

$$ΣM^E=0 \Rightarrow M_E^α + q\cdot 2\cdot 1 - A_y\cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_E^α = A_y\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot q = 9\cdot 2 - 2\cdot 2 = +14\,kNm.$$

Από την ισορροπία του κόμβου Ε: $N_E^δ = N_E^α = 0.$

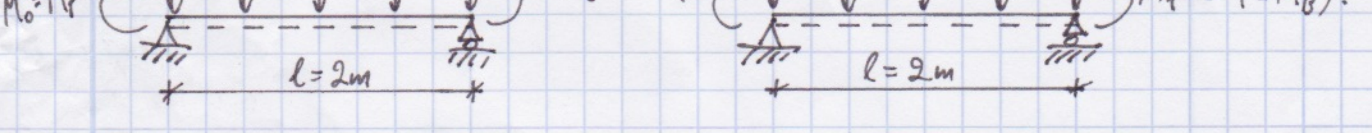
$$M_E^δ = M_E^α - T = 14 - 10 = +4\,kNm$$

3 Μηχανική 9η Εβδομάδα Ασκήσεις Πράξης 08-09/12/2011.

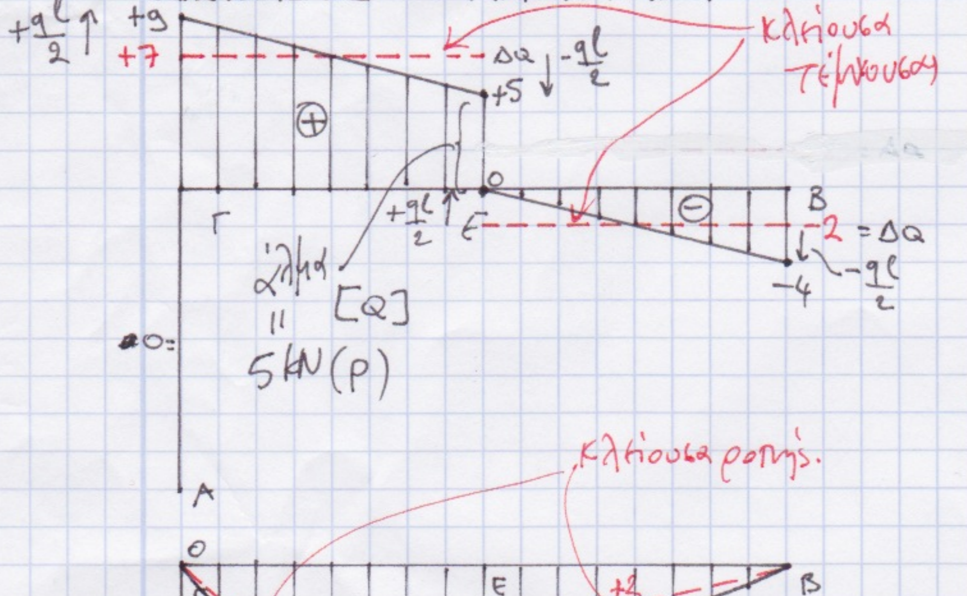
Για τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων των υποκατάστατων δοκών ΑΓ, ΓΕ και ΕΒ πινακοποιούμε τις πράξεις:

Τμήμα	l	M_0	M_1	$\Delta Q = \frac{M_1 - M_0}{l}$	q	$\frac{ql}{2}$	$f = \frac{ql^2}{8}$	$\overline{M} = \frac{M_0 + M_1}{2}$	$\overline{M} + f$
ΑΓ	2	0	0	0	0	—	—	—	—
ΓΕ	2	0	+14	+7	2	2	1	+7	+8
ΕΒ	2	+4	0	−2	2	2	1	+2	+3.

Το κατακόρυφο μέλος δεν καταπονείται καμπτικά/διατμητικά, αλλά μόνο αξονικά. Οι υποκατάστατες δοκοί των άλλων δύο τμημάτων είναι:



ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ.

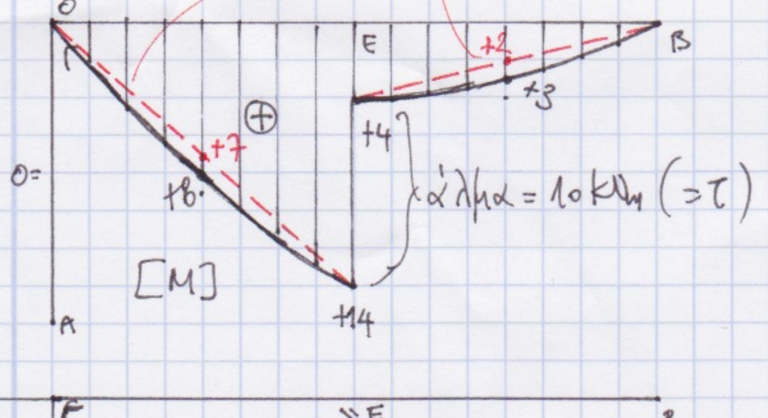


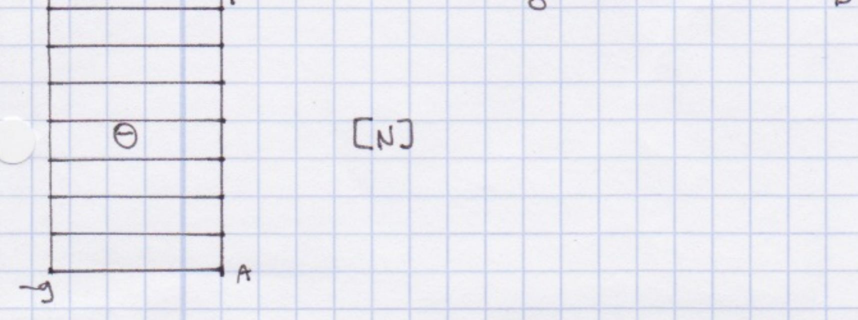
• από την ισορροπία κόμβου Γ:

$N_Γ^δ = Q_Γ^κ = 0.$

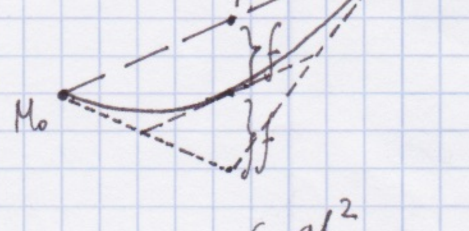
$N_Γ^κ = -Q_Γ^δ = -9$ kN.

• λόγω του ότι δεν έχουμε αξονική φόρτιση στο εσωτερικό του ΓΕΒ, $N_E = 0$.





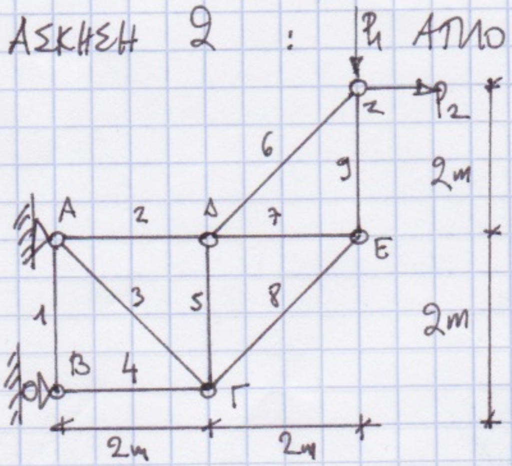
Σχεδιασμός Παραβολής:

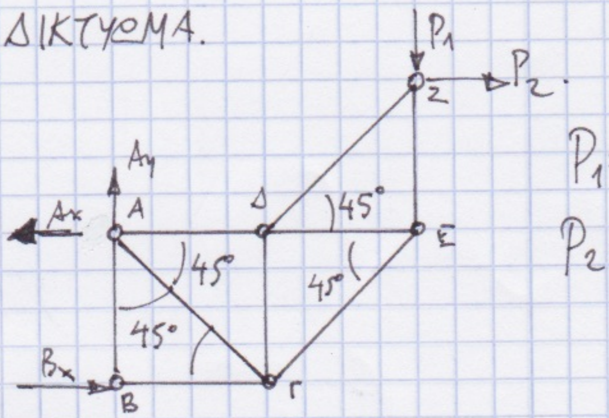


$$f = \frac{ql^2}{8}$$

4 Μηχανική 9η Εβδομάδα Ασκήσεις Πράξης 08-09/12/2011.

ΑΣΚΗΣΗ 2 : ΑΠΛΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ.





Διάγραμμα ελεύθερου σώματος.

$P_1 = 25\,kN$

$P_2 = 12\,kN.$

Βήμα 1ο: Στερεότητα; Ισοστατικότητα;

Το δικτυωματικό μόρφωμα είναι στερεό γιατί αποτελείται από παράθεση τριγώνων με κοινή πλευρά ανά δύο.

Έχουμε: #αντιδράσεις στη στήριξη $f=3$ (άγνωστες δυνάμεις).

άγνωστες τάσεις ράβδων $s=9$

#κόμβων $k=6$: άρα γεωμετρικές εξισώσεις : $k \cdot 2 = 2 \cdot 6 = 12.$

Ισχύει $f+s = 2\cdot k$ ✓. Αφού δείξαμε τη στερεότητα τότε η σχέση γίνεται ικανή συνθήκη ισοστατικότητας.

ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ: $\Sigma F^x = 0 \Rightarrow -A_x + B_x + P_2 = 0.$, $\Sigma F^y = 0 \Rightarrow A_y - P_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_y = +P_1 = 25\,kN.$

$\Sigma M^A = 0 \rightarrow B_x \cdot 2 - P_2 \cdot 2 - P_1 \cdot 4 = 0 \rightarrow B_x = \frac{1}{2}(P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 2) = 2P_1 + P_2 = 62\,kN.$

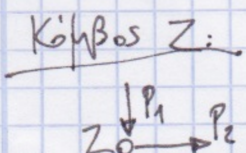
άρα $A_x = +P_2 + B_x = +12 + 62 = +74\,kN.$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ:

Ξεκινάμε από κόμβο με δύο άγνωστες:

Κόμβος Z: $\Sigma F^x = 0 \Rightarrow P_2 - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_6 = +P_2\sqrt{2} = +12\sqrt{2}$

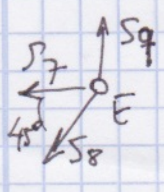
$= +16,97\,kN.$



$\Sigma F^y = 0 \rightarrow S_9 + S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + P_1 = 0 \Rightarrow S_9 = -P_1 - S_6\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= -25 - 12\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -25 - 12 = -37\,kN.$

Κόμβος E:

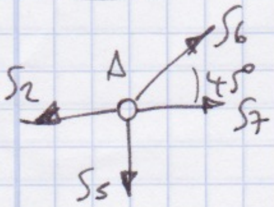


$\Sigma F^y = 0 \rightarrow S_9 - S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_8 = S_9\sqrt{2} = -37\sqrt{2} = -52,33\,kN.$

$\Sigma F^x = 0 \rightarrow S_7 + S_8\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_7 = -S_8\frac{\sqrt{2}}{2} = +37\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = +37\,kN.$

5 Μηχανική 9η Εβδομάδα Ασκήσεις Πράξης 08-09/12/2011.

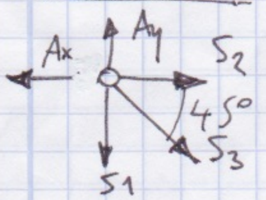
Κόμβος Δ:



$$\Sigma F^y=0 \rightarrow S_6\frac{\sqrt{2}}{2}-S_5=0 \Rightarrow S_5=S_6\frac{\sqrt{2}}{2}=+12\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=+12\text{ kN}.$$

$$\Sigma F^x=0 \rightarrow S_2-S_7-S_6\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow S_2=S_7+S_6\frac{\sqrt{2}}{2}=$$
$$=+37+12\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=+49\text{ kN}.$$

Κόμβος Α:



$$\cancel{\Sigma F^x=0 \rightarrow S_2+A_x+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \rightarrow S_2=-A_x-S_3\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow}$$

$$\Sigma F^x=0 \rightarrow S_2-A_x+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow S_3=(-S_2+A_x)\sqrt{2}=$$
$$=(-49+74)\sqrt{2}=+25\sqrt{2}=+35{,}36\text{ kN}.$$

$$\Sigma F^y=0 \rightarrow S_1-A_y+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow S_1=A_y-S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=25-25\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\text{ kN}.$$
$$=\underline{0\text{ kN}}.$$

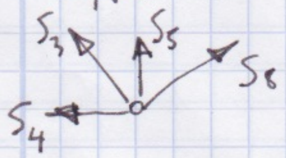
Κόμβος Β:

$$\Sigma F^x=0 \Rightarrow S_4+B_x=0 \rightarrow S_4=-B_x=-62\text{ kN}.$$

Η $S_1=0$ που βρήκαμε πριν επαληθεύεται ($\Sigma F^y=0$).

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ:

Κόμβος Γ:



$$\Sigma F^x=S_8\frac{\sqrt{2}}{2}-S_3\frac{\sqrt{2}}{2}-S_4=-37\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-25\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+62=$$
$$=-37-25+62=-62+62=0 \checkmark.$$

$$\Sigma F^y=S_5+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}+S_8\frac{\sqrt{2}}{2}=+12+25\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-37\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=12+25-37=$$
$$=37-37=0 \checkmark.$$

Ράβδος	Τάση (kN).
1	0
2	+49
3	$+25\sqrt{2}=+35{,}36$
4	−62
5	+12
6	$+12\sqrt{2}=+16{,}97$
7	+37
8	$-37\sqrt{2}=-52{,}33$
9	−37