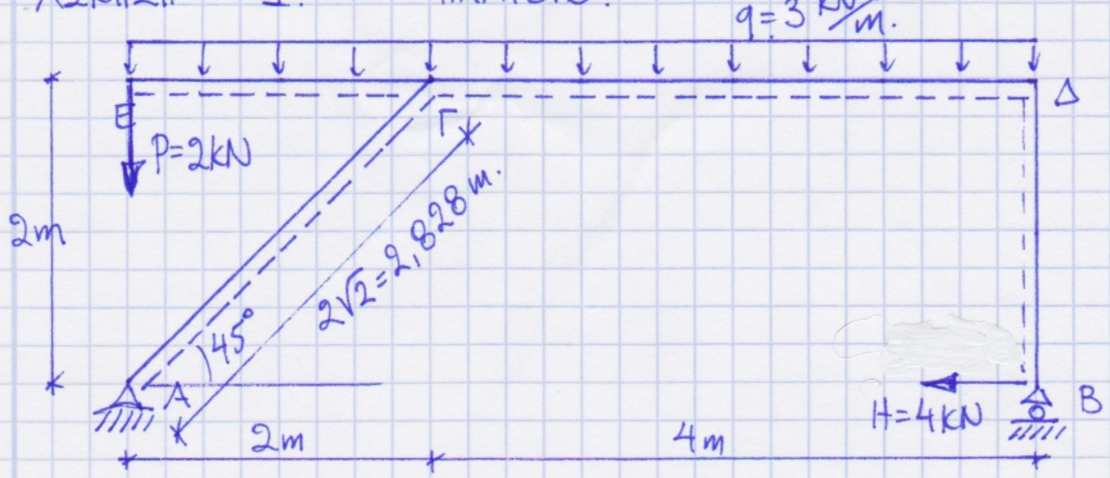
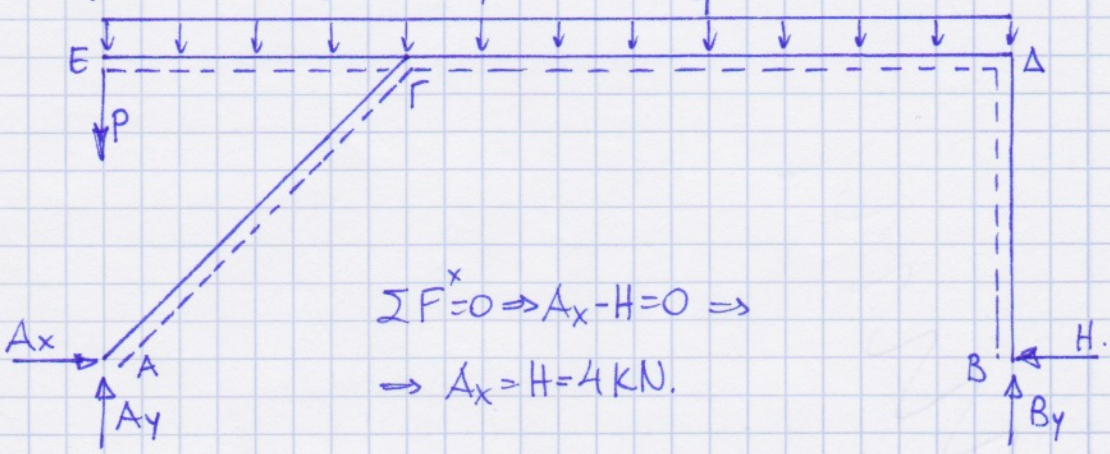
1 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011

ΑΣΚΗΣΗ 1. ΠΛΑΙΣΙΟ.



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος:



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow A_x - H = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_x = H = 4\,kN.$

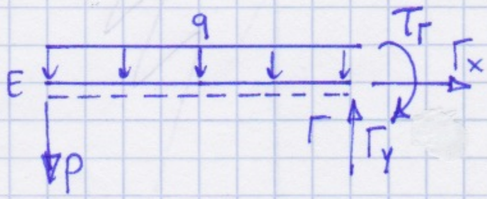
$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P - q\cdot(2+4) = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P + 6\cdot q = 2 + 3\cdot 6 = 20\,kN.$

$(+)\ \Sigma M^A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 6 - q\cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0 \Rightarrow B_y = q\cdot 3 = 3\cdot 3 = 9\,kN.$

άρα $A_y = 20 - B_y = 11\,kN.$

Ο πρόβολος ΕΓ μπορεί να θεωρηθεί πακτωμένος στο υπόλοιπο πλαίσιο:

διάγραμμα ελευθέρου σώματος προβόλου:



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow \Gamma_x = 0.$

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow \Gamma_y - P - q\cdot 2 = 0 \Rightarrow \Gamma_y = P + 2q = 2 + 3\cdot 2 = 8\,kN.$

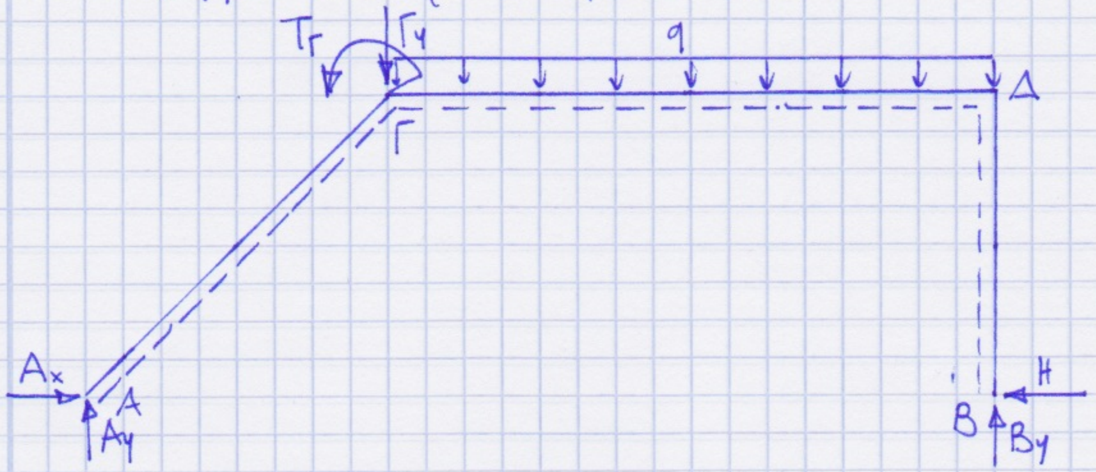
$(+)\ \Sigma M^\Gamma = 0 \Rightarrow P\cdot 2 + q\cdot 2\cdot 1 - T_\Gamma = 0 \Rightarrow T_\Gamma = 2\cdot P + 2\cdot 1\cdot q = 2\cdot 2 + 2\cdot 3 =$

$= 10\,kNm.$

Οι αντιδράσεις στην πάκτωση του προβόλου είναι $\Gamma_y = 8\,kN$ και $T_\Gamma = 10\,kNm$ (με τις φορές του σχήματος). Αυτές οι αντιδράσεις μεταβιβάζονται ως δράσεις στο υπόλοιπο πλαίσιο.

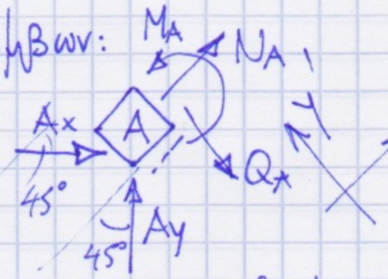
2 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011.

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος γίνεται:



Ισορροπία κόμβων:

Κόμβος Α:



$\circlearrowleft +$ $\Sigma M^A = 0 \Rightarrow M_A = 0$ (άρθρωση!)

Θα εξετάσουμε ισορροπία δυνάμεων κατά κεκλιμένους άξονες x', y'

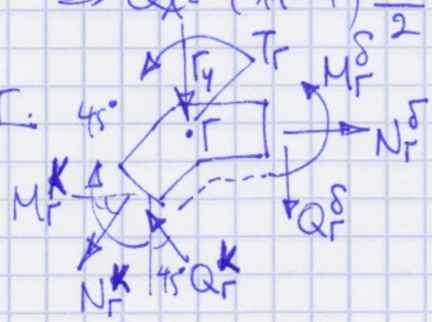
$$\Sigma F^{x'} = 0 \Rightarrow N_A + A_y \frac{\sqrt{2}}{2} + A_x \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_A = -(A_x + A_y)\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A = -(4+11)\frac{\sqrt{2}}{2} = -7,5\sqrt{2} = -10,61 \text{ kN}.$$

$$\Sigma F^{y'} = 0 \Rightarrow Q_A + A_x \frac{\sqrt{2}}{2} - A_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = (A_y - A_x)\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_A = (11-4)\frac{\sqrt{2}}{2} = +3,5\sqrt{2} = +4,95 \text{ kN}.$$

Κόμβος Γ:



$\circlearrowleft +$

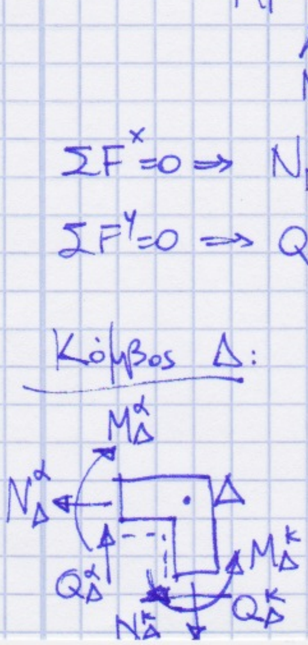
$$\Sigma M^{\Gamma} = 0 \Rightarrow M_\Gamma^\delta - M_\Gamma^\kappa + T_\Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_\Gamma^\delta - M_\Gamma^\kappa = -T_\Gamma = -10 \text{ kNm}.$$

$$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_\Gamma^\delta - N_\Gamma^\kappa \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_\Gamma^\kappa \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow Q_\Gamma^\delta + N_\Gamma^\kappa \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_\Gamma^\kappa \frac{\sqrt{2}}{2} + \Gamma_y = 0.$$

Κόμβος Δ:



$\circlearrowleft +$

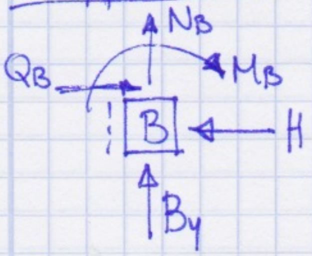
$$\Sigma M^{\Delta} = 0 \Rightarrow M_\Delta^\kappa - M_\Delta^\alpha = 0 \Rightarrow M_\Delta^\kappa = M_\Delta^\alpha = M_\Delta.$$

$$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_\Delta^\alpha + Q_\Delta^\kappa = 0 \Rightarrow N_\Delta^\alpha = -Q_\Delta^\kappa$$

$$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow N_\Delta^\kappa - Q_\Delta^\alpha = 0 \rightarrow N_\Delta^\kappa = Q_\Delta^\alpha.$$

 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011.

Κόμβος Β:



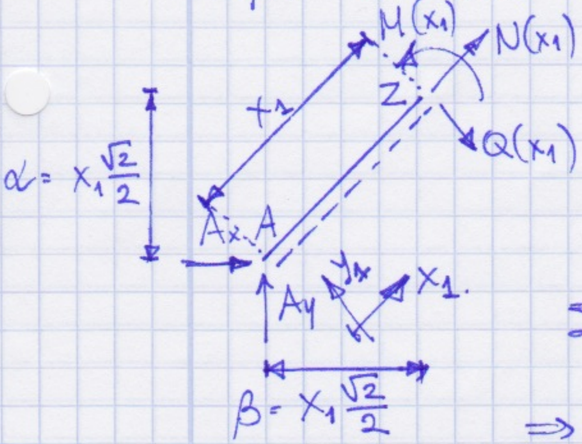
$$\overset{(+)}{\Sigma M^B}=0 \Rightarrow M_B=0 \quad (\text{κύλιση !}).$$

$$\Sigma F^x=0 \Rightarrow Q_B-H=0 \Rightarrow Q_B=H=+4\ kN.$$

$$\Sigma F^y=0 \Rightarrow N_B+B_y=0 \Rightarrow N_B=-B_y=-9\ kN.$$

Για να προσδιορίσουμε τα διαγράμματα θα κάνουμε τομές σε τυχαίες θέσεις εντός των τμημάτων: ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ. Ορίζουμε σε κάθε μέλος τοπικό άξονα μέλους x_i.

Τομή σε τυχαία θέση εντός του ΑΓ: $0 \le x_i \le 2\sqrt{2}\,m.$



$$\Sigma F^{x_1}=0 \Rightarrow N(x_1)+A_x\frac{\sqrt{2}}{2}+A_y\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_1)=-(A_x+A_y)\frac{\sqrt{2}}{2}=-7{,}5\sqrt{2}\ kN=-10{,}61\ kN.$$

$$\Sigma F^{y_1}=0 \Rightarrow Q(x_1)+A_x\frac{\sqrt{2}}{2}-A_y\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(x_1)=(A_y-A_x)\frac{\sqrt{2}}{2}=+3{,}5\sqrt{2}\overset{kN}{=}+4{,}95\ kN.$$

$$\overset{(+)}{\Sigma M^Z}=0 \Rightarrow M(x_1)+A_x\cdot\alpha-A_y\cdot\beta=0 \Rightarrow M(x_1)=A_y\cdot\beta-A_x\cdot\alpha \Rightarrow$$

$$\rightarrow M(x_1)=A_y\cdot x_1\frac{\sqrt{2}}{2}-A_x\cdot x_1\frac{\sqrt{2}}{2}=(A_y-A_x)\frac{\sqrt{2}}{2}x_1=+4{,}95\,x_1\ (kNm)$$

Για $x_1=2\sqrt{2}\,m=2{,}828\,m$:

$$N_\Gamma^K: \ N(x_1=2\sqrt{2})=-10{,}61\ kN$$

$$Q_\Gamma^K= \ Q(x_1=2\sqrt{2})=+4{,}95\ kN.$$

$$M_\Gamma^K= M(x_1=2\sqrt{2})=+4{,}95\cdot2\sqrt{2}=$$

$$=3{,}5\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=+14\ kNm.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Γ:

$$M_\Gamma^\delta=M_\Gamma^K-T_\Gamma=+14-10=+4\ kNm.$$

$$Q_\Gamma^\delta=Q_\Gamma^K\frac{\sqrt{2}}{2}-N_\Gamma^K\frac{\sqrt{2}}{2}-\Gamma_y=4{,}95\frac{\sqrt{2}}{2}+10{,}61\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-8=3{,}5+7{,}5-8=$$

$$=+3\ KN.$$

$$N_\Gamma^\delta=N_\Gamma^K\frac{\sqrt{2}}{2}+Q_\Gamma^K\frac{\sqrt{2}}{2}=-10{,}61\frac{\sqrt{2}}{2}+4{,}95\frac{\sqrt{2}}{2}=-7{,}5+3{,}5=-4\ kN.$$

4 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011.

Για το τμήμα ΓΔ ας χρησιμοποιήσουμε (1) τη μέθοδο των εμβαδών (ή ολοκληρωμάτων) και (2) τη μέθοδο τομών.

Εμβαδά (1)

Άκρο Γ: $N_Γ^δ = -4\,kN$, $Q_Γ^δ = +3\,kN$, $M_Γ^δ = +4\,kNm$.

Άκρο Δ: $N_Δ^α = N_Γ^δ -$ (Εμβαδό αξονικά κατανεμημένου φορτίου) =

$= N_Γ^δ - 0 = N_Γ^δ = -4\,kN$.

Το διάγραμμα [N] είναι σταθερό κατά μήκος του ΓΔ καθώς δεν υπάρχει καμιά αξονική φόρτιση στο εσωτερικό του ΓΔ.

Άκρο Δ: $Q_Δ^α = Q_Γ^δ -$ (Εμβαδό εγκάρσιου κατ/μένου φορτίου) =

$= Q_Γ^δ - (q \cdot 4) = +3 - 3 \cdot 4 = +3 - 12 = -9\,kN$.

Το διάγραμμα [Q] είναι ευθεία γραμμή, από +3kN στο Γ έως −9 kN στο Δ, λόγω του ομοιόμορφου $q = 3\,kN/m$.

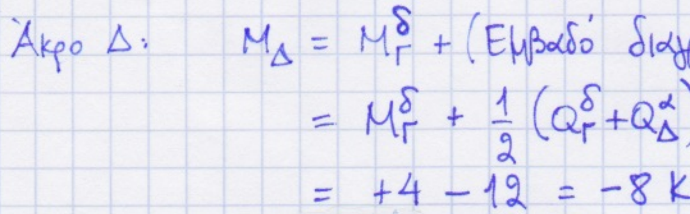
Άκρο Δ: $M_Δ = M_Γ^δ +$ (Εμβαδό διαγράμματος τέμνουσας) =

$= M_Γ^δ + \frac{1}{2}(Q_Γ^δ + Q_Δ^α) \cdot 4 = +4 + \frac{1}{2}(+3-9) \cdot 4 =$

$= +4 - 12 = -8\,kNm$.

Το διάγραμμα [M] ακολουθεί παραβολική μεταβολή από τιμή +4 kNm στο Γ σε τιμή −8 kNm στο Δ και "κρέμαση" $f = \frac{q \cdot 4^2}{8} = \frac{3 \cdot 4^2}{8} = 6\,kNm$ από το μέσο όρο των ακραίων τιμών $\bar{M} = \frac{+4-8}{2} = -2\,kNm$ στο μέσο του τμήματος ΓΔ, δηλαδή $M_{mid} = \bar{M} + f = -2 + 6 = +4\,kNm$.

Τομές (2) Τομή σε τυχαία θέση εντός του ΓΔ : $0 \leq x_2 \leq 4\,m$.



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N(x_2) - N_Γ^δ = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N(x_2) = N_Γ^δ = -4\,kN$.

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow Q(x_2) - Q_Γ^δ + q \cdot x_2 = 0 \Rightarrow Q(x_2) = Q_Γ^δ - q \cdot x_2 = +3 - 3x_2$

$\circlearrowleft +$

$\Sigma M^θ = 0 \Rightarrow M(x_2) - M_Γ^δ - Q_Γ^δ \cdot x_2 + q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(x_2) = M_Γ^δ + Q_Γ^δ \cdot x_2 - q \cdot \frac{x_2^2}{2} = +4 + 3x_2 - 1{,}5 \cdot x_2^2$

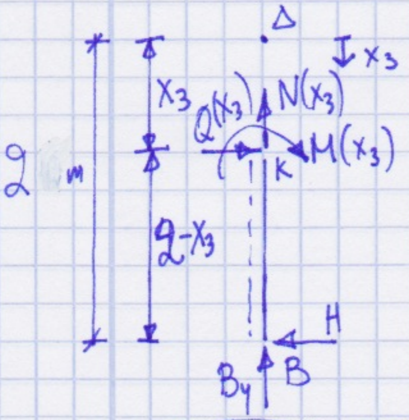
5 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011

Στο άκρο Δ: $x_2 = 4m$.

$N(x_2=4) = -4\,kN$. $Q(x_2=4) = +3 - 3\cdot 4 = 3 - 12 = -9\,kN$.

$M(x_2=4) = +4 + 3\cdot 4 - 1,5\cdot 4^2 = 4 + 12 - 24 = -8\,kNm$.

Για το τμήμα ΔΒ, κάνουμε τομή σε τυχαία θέση και εξετάζουμε το τμήμα από τη διατομή τομής (Κ) μέχρι το Β:



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow Q(x_3) - H = 0 \Rightarrow Q(x_3) = H = +4\,kN$.

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow N(x_3) + B_y = 0 \Rightarrow N(x_3) = -B_y = -9\,kN$.

$\Sigma M^K = 0 \rightarrow M(x_3) + H\cdot(2 - x_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(x_3) = -H(2 - x_3) = H(x_3 - 2) = 4x_3 - 8\,(kNm)$

Στο άκρο Δ: $x_3 = 0$: $Q(x_3=0) = +4\,kN. = Q_\Delta^K$

$N(x_3=0) = -9\,kN. = N_\Delta^K$

$M(x_3=0) = -8\,kNm. = M_\Delta$

Επαληθεύεται η ισορροπία του κόμβου Δ!

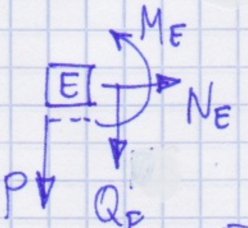
Στο άκρο Β:

$Q(x_3=2) = +4\,kN$, $N(x_3=2) = -9\,kN$, $M(x_3=2) = 4\cdot 2 - 8 = 0$

Επαληθεύεται η ισορροπία του κόμβου Β!

Διαγράμματα προβόλου ΕΓ:

Ελεύθερο άκρο:



$\Sigma M^E = 0 \Rightarrow M_E = 0$ (ελεύθερο αφόρτιστο με ροπή άκρο!).

$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_E = 0$.

$\Sigma F^y = 0 \rightarrow Q_E + P = 0 \Rightarrow Q_E = -P. = -2\,kN$.

Ο πρόβολος είναι αφόρτιστος αξονικά και $N_E = 0$ άρα $N = 0$ στο ΕΓ.

Μέθοδος εμβαδών: $Q_\Gamma^\alpha = Q_E - (\text{Εμβαδό } q) = Q_E - q\cdot 2 = -2 - 3\cdot 2 = -8\,kN$

Το [Q] μεταβάλλεται γραμμικά από $Q_E = -2\,kN$ σε $Q_\Gamma^\alpha = -8\,kN$.

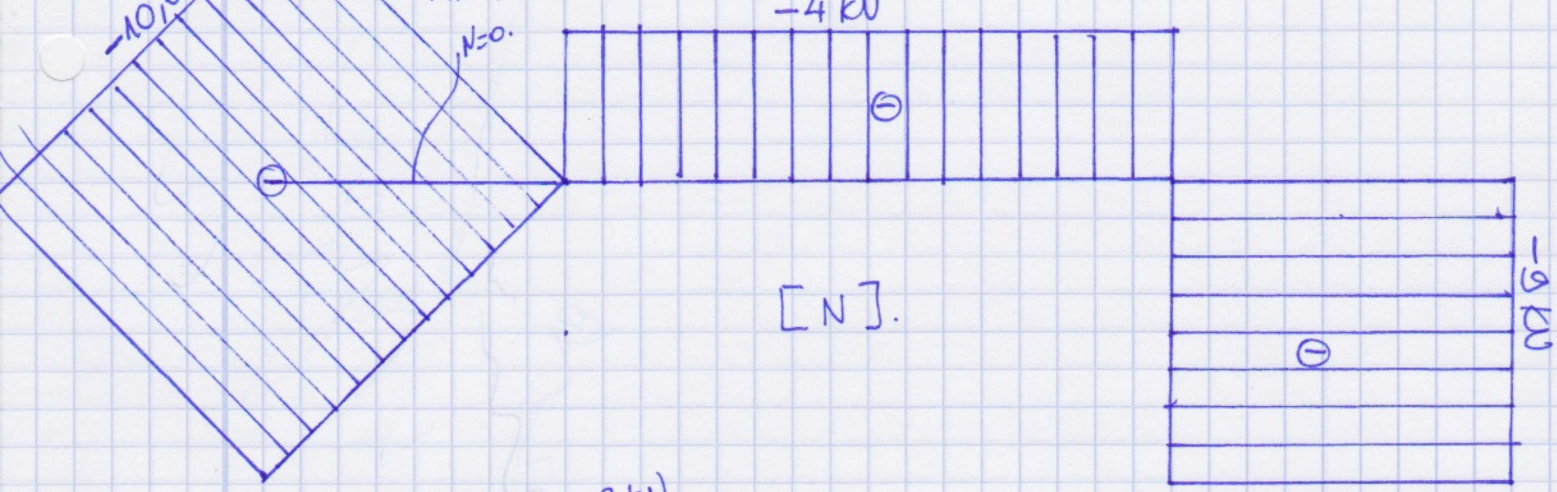
$M_\Gamma^\alpha = M_E + (\text{Εμβαδό } Q) = 0 + \frac{1}{2}(Q_E + Q_\Gamma^\alpha)\cdot 2 = -2 + (-8) = -10\,kNm$.

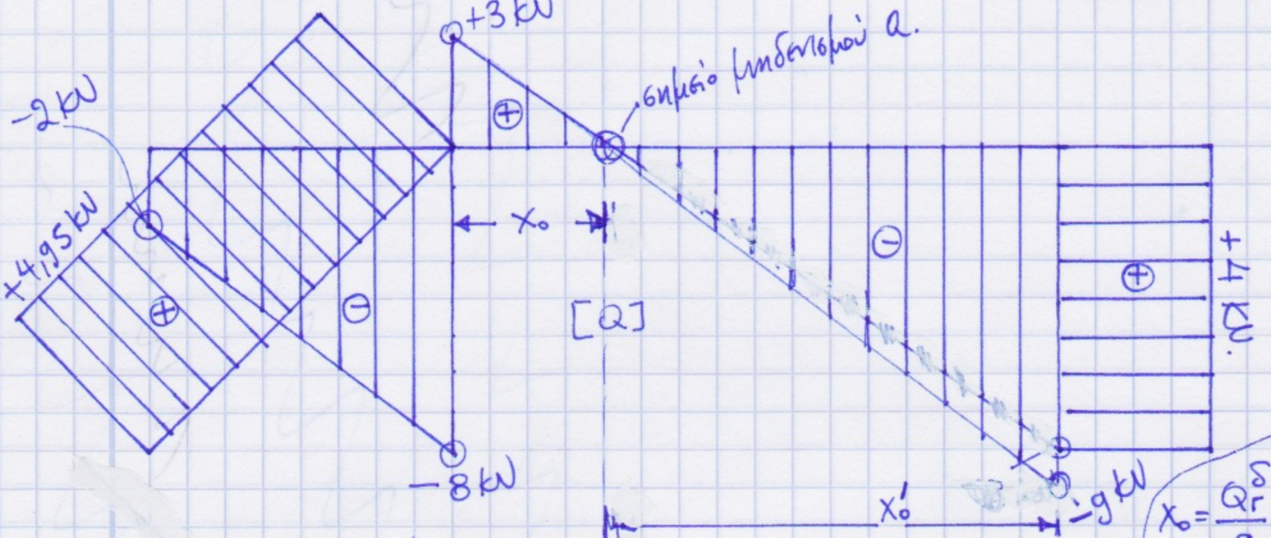
Παραβολική μεταβολή [M] από $M_E = 0$ σε $M_\Gamma^\alpha = -10\,kNm$ με "κρέμαση"

$f = \frac{q\cdot 2^2}{8} = 1,5\,kNm$ από το $\bar{M} = \frac{M_E + M_\Gamma^\alpha}{2} = \frac{0 - 10}{2} = -5\,kN$. Οπότε $M_{mid} = \bar{M} + f = -5 + 1,5 = -3,5\,kNm$.

6 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης. 01-02/12/2011.

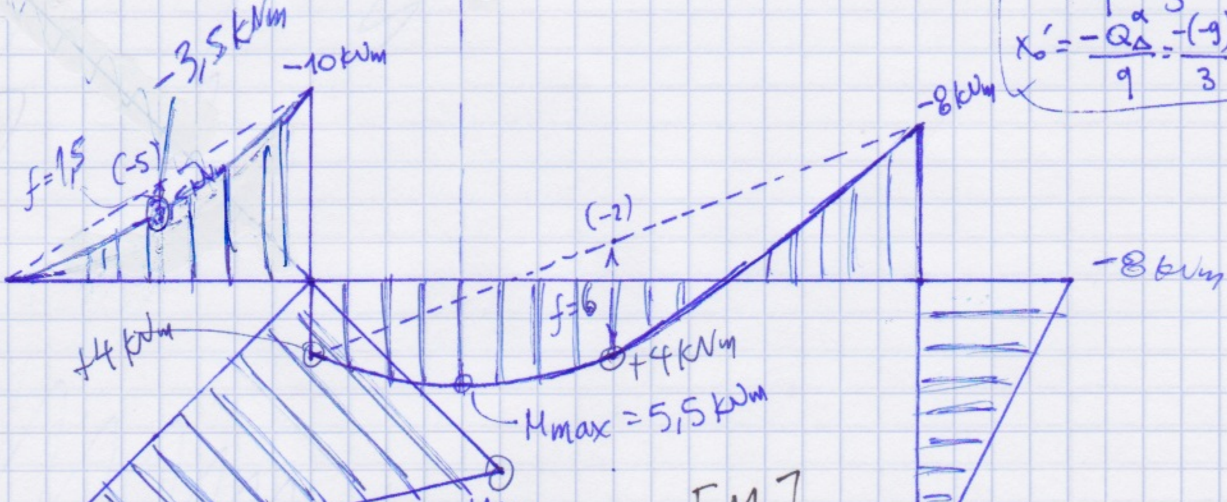
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.





$$x_0 = \frac{Q_\Gamma^\delta}{q} = \frac{3}{3} = 1m$$

$$x_0' = \frac{-Q_\Delta^\alpha}{q} = \frac{-(-9)}{3} = 3m$$

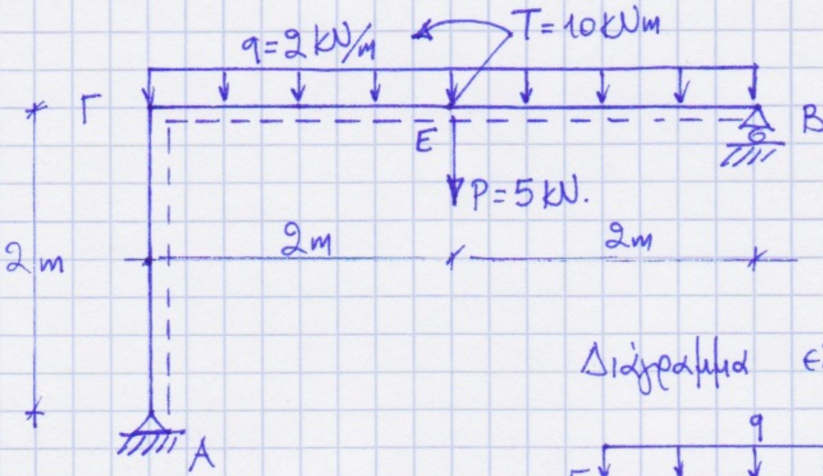


$$M_{max} = M_\Gamma^\delta + \frac{(Q_\Gamma^\delta)^2}{2q} = +4 + \frac{3^2}{2\cdot 3} = +5,5 \text{ kNm}.$$

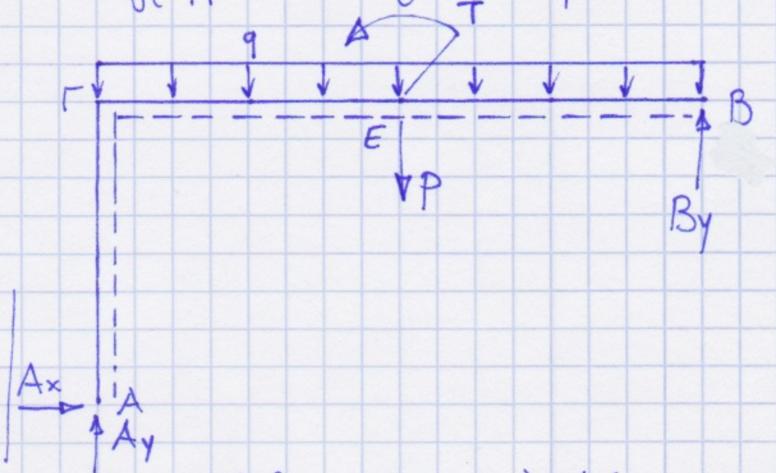
Επαλήθευση:

$$M_{max} = M_\Delta^\alpha + \frac{(Q_\Delta^\alpha)^2}{2q} = -8 + \frac{9^2}{2\cdot 3} = -8 + 13,5 = +5,5 \text{ kNm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΤΗΣ ΔΟΚΟΥ.



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow A_x = 0.$

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P - q \cdot 4 = 0$

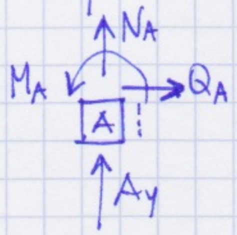
$\Rightarrow A_y + B_y = P + 4q = 5 + 2 \cdot 4 = 13\, kN.$

$\Sigma M^A = 0 \rightarrow B_y \cdot 4 - P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + T = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{4}(2 \cdot P + 4 \cdot 2 \cdot q - T) = \frac{1}{4}(2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 - 10)$

$\rightarrow B_y = \frac{1}{4}(10 + 16 - 10) = 4\, kN.$

άρα $A_y = 13 - B_y = 13 - 4 = 9\, kN.$

Κόμβος Α:



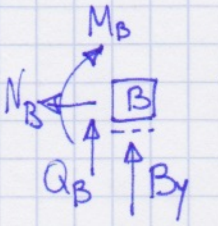
$\Sigma M^A = 0 \rightarrow M_A = 0$ (άρθρωση!)

$\Sigma F^x = 0 \rightarrow Q_A = 0$

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow N_A + A_y = 0 \Rightarrow N_A = -A_y \Rightarrow$

$\Rightarrow N_A = -9\, kN.$

Κόμβος Β:

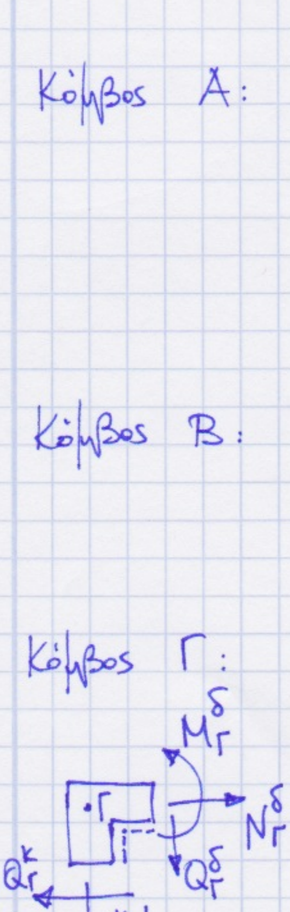


$\Sigma M^B = 0 \rightarrow M_B = 0$ (ακραία κύλιση).

$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_B = 0.$

$\Sigma F^y = 0 \rightarrow Q_B + B_y = 0 \Rightarrow Q_B = -B_y = -4\, kN.$

Κόμβος Γ:



$\Sigma M^\Gamma = 0 \Rightarrow M_\Gamma^\delta - M_\Gamma^\kappa = 0 \Rightarrow M_\Gamma^\delta = M_\Gamma^\kappa = M_\Gamma.$

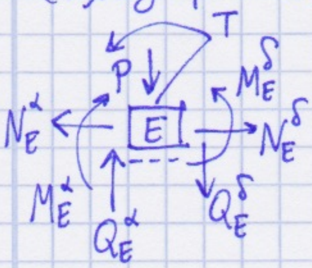
$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_\Gamma^\delta - Q_\Gamma^\kappa = 0 \Rightarrow N_\Gamma^\delta = Q_\Gamma^\kappa$

$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow Q_\Gamma^\delta + N_\Gamma^\kappa = 0 \rightarrow Q_\Gamma^\delta = -N_\Gamma^\kappa.$

8 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011

Κόμβος Ε:

(εξετάζουμε το Ε σαν κόμβο επειδή έχουμε συγκεντρωμένα φορτία).



$$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_E^\delta - N_E^\alpha = 0 \Rightarrow N_E^\delta = N_E^\alpha = N_E$$

$$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow Q_E^\delta - Q_E^\alpha + P = 0 \Rightarrow Q_E^\delta = Q_E^\alpha - P$$

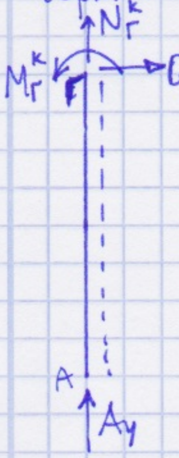
$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M^E = 0 \Rightarrow M_E^\delta - M_E^\alpha + T = 0 \Rightarrow M_E^\delta = M_E^\alpha - T.$$

Για τη μέθοδο της υποκατάστασης δοκού χρειαζόμαστε τις ακραίες ροπές και ακραίες αξονικές των τμημάτων που ορίζονται από τα χαρακτηριστικά σημεία: Α, Β (άκρα), Γ (αλλαγή γεωμετρίας) και Ε (συγκεντρωμένα φορτία).

ΟΙ ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΟΥΝΤΑΙ

Απαιτούνται: M_A, N_A, $M_\Gamma^\kappa, N_\Gamma^\kappa$, $M_\Gamma^\delta, N_\Gamma^\delta$, M_E^α, N_E^α, M_E^δ, N_E^δ, M_B, N_B.

Τομή λίγο κάτω από το Γ:

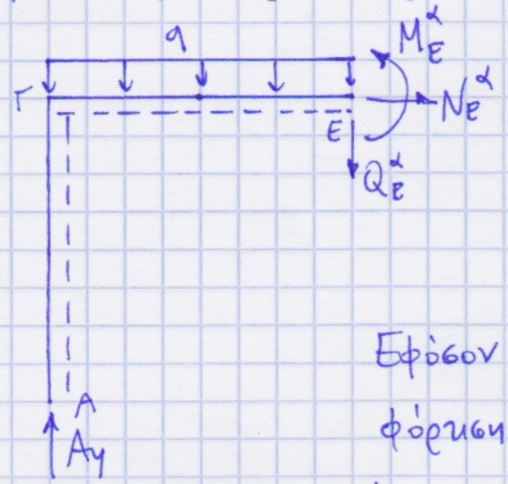


$$\overset{\circlearrowleft}{\Sigma M^\Gamma} = 0 \Rightarrow M_\Gamma^\kappa = 0$$

$$\Sigma F^y = 0 \Rightarrow N_\Gamma^\kappa + A_y = 0 \Rightarrow N_\Gamma^\kappa = -A_y = -9\,KN.$$

Από την ισορροπία κόμβου Γ: $M_\Gamma^\delta = M_\Gamma = 0$.

Τομή λίγο πριν (αριστερά) του Ε:



$$\Sigma F^x = 0 \Rightarrow N_E^\alpha = 0.$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M^E = 0 \Rightarrow M_E^\alpha + q\cdot 2\cdot 1 - A_y\cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_E^\alpha = A_y\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot q = 9\cdot 2 - 2\cdot 2 = +14\,KNm$$

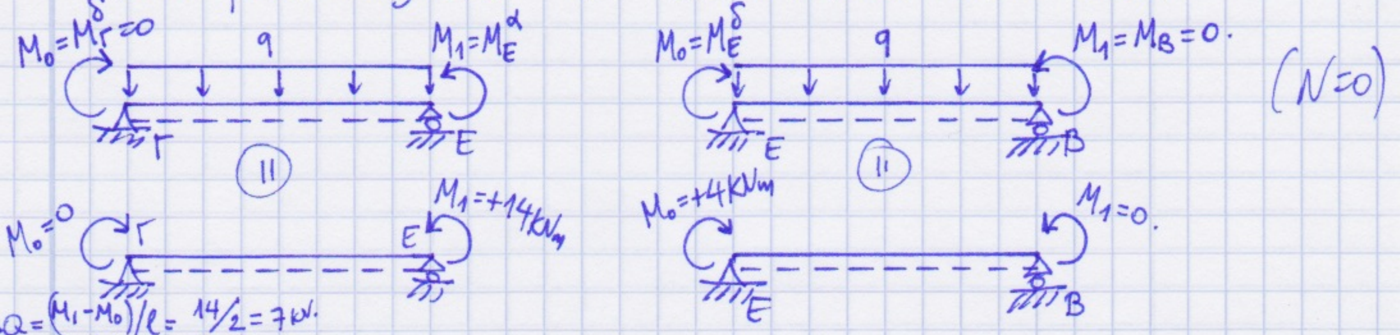
Εφόσον στο ΓΕ δεν υπάρχει αξονική φόρτιση η αξονική N είναι σταθερή και ίση με N_E^α, άρα $N = 0$, και επομένως $N_\Gamma^\delta = 0$.

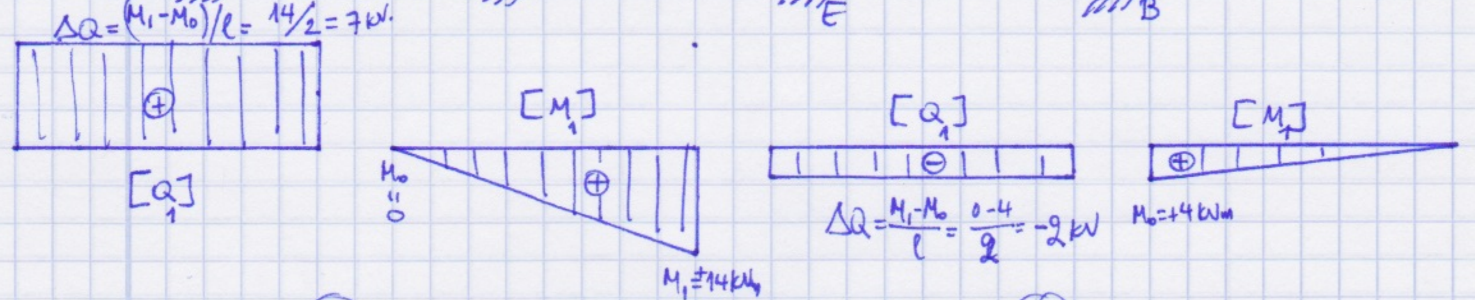
9 Μηχανική 8η Εβδ. Ασκήσεις Πράξης 01-02/12/2011.

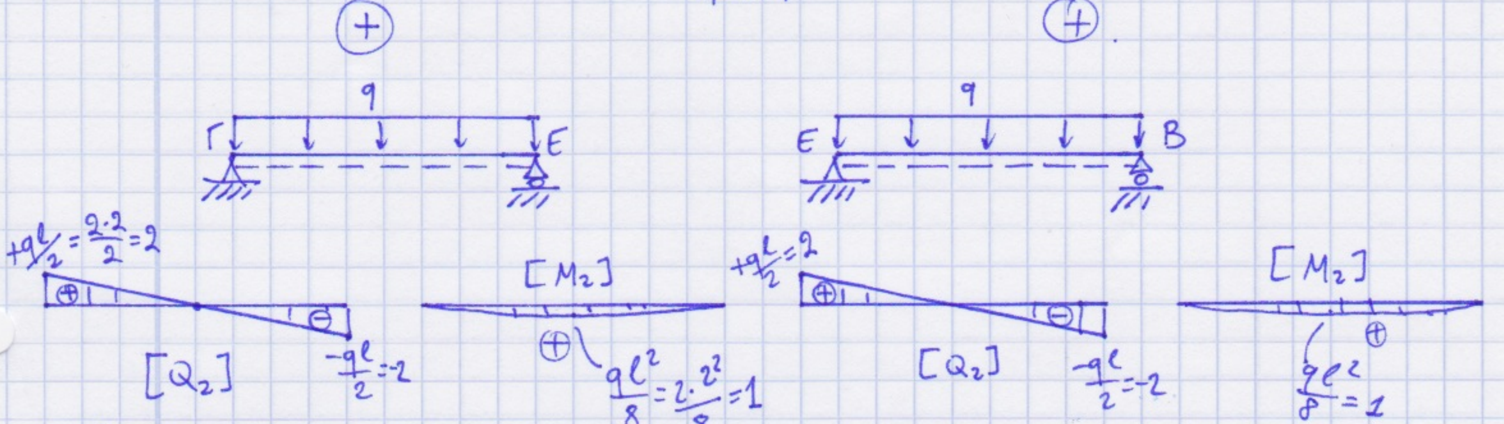
Από την ισορροπία του κόμβου Ε: $M_E^{\delta} = M_E^{\alpha} - T = 14-10 = +4\ kNm$

$N_E^{\delta} = N_E^{\alpha} = 0.$

Το κατακόρυφο μέλος δεν καταπονείται καμπτικά/διατμητικά αλλά μόνο αξονικά. Οι υποκατάστατες δοκοί είναι:







Τελικά διαγράμματα: