Πίνακες ή Μητρώα.

Μια διάταξη μ·ν το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες λέγεται πίνακας τύπου μxν ή απλούστερα μxν πίνακας.

Οι αριθμοί με τους οποίους σχηματίζουμε ένα πίνακα λέγονται στοιχεία του πίνακα.

Το στοιχείο ενός μxν πίνακα A που ανήκει στην i-γραμμή και j-στήλη συμβολίζεται με a_{ij}

Έτσι ο μxν πίνακας A γράφεται:

$$\begin{array}{cc} \text{j-στήλη} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} & \text{i-γραμμή} \end{array}$$

ή απομορφωτικά $[a_{ij}]$, $1 \le i \le \mu$, $1 \le j \le \nu$.

Ένας πίνακας που έχει μια μόνο γραμμή, όπως ο $[2\ 0\ 1\ 3]$ λέγεται πίνακας γραμμή ενώ ένας πίνακας που έχει μια μόνο στήλη, όπως ο $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ λέγεται πίνακας στήλη.

Ορισμοί.

Άθροισμα δύο μxν πινάκων $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο μxν πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με A+B. Δηλαδή

$$A+B = [a_{ij}+\beta_{ij}]$$

Δε ορίζουμε άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

που είναι ίδιου τύπου 3x3

με βάση τον παραπάνω ορισμό μπορούν να προστεθούν και το άθροισμά τους είναι:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 8 & 13 & 11 \\ 11 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ οι πίνακες

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

που δεν είναι ίδιου τύπου <u>δε</u> μπορούν να προστεθούν

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.

Αν $Α, Β, Γ$ είναι $μ\times ν$ πίνακες τότε.

$Α+Β = Β+Α$ αντιμεταθετική

$Α+(Β+Γ) = (Α+Β)+Γ$ προσεταιριστική

Αν $Ο$ είναι ο $μ\times ν$ πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν τότε $\forall$ $μ\times ν$ πίνακα $Α$ ισχύει. $Α+Ο = Ο+Α = Α$.

Ο $Ο$ λέγεται μηδενικός πίνακας. Για παράδειγμα $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ μηδενικός πίνακας

- Αν με $-Α$ συμβολίζουμε τον πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των στοιχείων ενός πίνακα $Α$, τότε ισχύει:

$Α+(-Α) = (-Α)+Α = Ο$. Ο $-Α$ πίνακας λέγεται αντίθετος του πίνακα $Α$.

Ο αντίθετος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Γινόμενο πραγματικού αριθμού $λ$ με ένα πίνακα $Α = [a_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν ~~πολλ~~ πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του $Α$ με $λ$. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $λ\cdot Α$ ή $λΑ$. Δηλαδή,

$$λ\cdot Α = [λa_{ij}]$$

Π.χ. $-3Α = -3\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot 2 & (-3)(-5) & (-3)\cdot 1 \\ -2(-3) & (-3)(-1) & (-3)4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 15 & -3 \\ 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα:

$(κ+λ)Α = κΑ + λΑ$

$λ(Α+Β) = λΑ + λΒ$

$κ(λΑ) = (κλ)Α$

$1Α = Α$ Επίσης ισχύει $λΑ = Ο \Leftrightarrow λ = 0$ ή $Α = Ο$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Αν $Α = [a_{ik}]$ είναι ένας $μ\times ν$ πίνακας και $Β = [β_{kj}]$ είναι ένας $ν\times ρ$ πίνακας τότε ορίζουμε ως γινόμενο του πίνακα $Α$ με τον πίνακα $Β$ και το συμβολίζουμε με $Α\cdot Β$ ή $ΑΒ$ τον $μ\times ρ$ πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο $γ_{ij}$ είναι το άθροισμα των γινομένων των $ν$ στοιχείων της i-γραμμής του $Α$ με τα αντίστοιχα $ν$ στοιχεία της j-στήλης του $Β$. Δηλαδή,

$$γ_{ij} = a_{i1}β_{1j} + a_{i2}β_{2j} + \dots + a_{iν}β_{νj}$$

Σχηματικά

$$i\text{ γραμμή}\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2\rho} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \cdots & \beta_{\nu j} & \cdots & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \gamma_{1\rho} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \gamma_{2\rho} \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \gamma_{i\rho} \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \cdots & \gamma_{\mu j} & \gamma_{\mu\rho} \end{bmatrix}$$

Π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

$\gamma_{11} = 2\cdot 4 + 1\cdot(-1) + (-3)\cdot 1 = 4$ και $\gamma_{12} = 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + (-3)0 = 9$

$\gamma_{21} = 3\cdot 4 + 0(-1) + 1\cdot 1 = 13$ $\quad \gamma_{22} = 3\cdot 2 + 0\cdot 5 + 1\cdot 0 = 6$

Τονίζεται ότι το γινόμενο AB ορίζεται όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.

Σχηματικά: $\underset{\mu\times\nu}{A},\ \underset{\nu\times\rho}{B}) \rightarrow \underset{\mu\cdot\rho}{AB}$

Για παράδειγμα αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Τότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ορίζονται τα γινόμενα AB, BA, AΓ

και $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$A\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 5 & 8 \\ -14 & 3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

Ενώ δεν ορίζονται τα γινόμενα BΓ, ΓB και ΓA.

<u>Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων</u>

Αν λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί και A, B είναι πίνακες τότε ισχύουν:

$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ προσεταιριστική

$A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$.

$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$.

Αν με I_ν συμβολίσουμε τον $\nu \times \nu$ διαγώνιο πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου είναι ίσο με 1, τότε $\forall$ τετραγωνικό $\nu \times \nu$ πίνακα A ισχύει

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A I_\nu = I_\nu A = A$$

π.χ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίοι.

Ισχύει : $A \underset{\text{μοναδιαίος}}{I_\nu} = A$ και $I_\mu A = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε $AB\Gamma$ για κάθε ένα από τα ίσα γινόμενα $A(B\Gamma)$, $(AB)\Gamma$. Ομοίως A, B, Γ, Δ είναι πίνακες τέτοιοι ώστε να ορίζονται τα γινόμενα AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ~~για καθένα από τα γινόμενα~~ τότε έχουμε $[(AB)\Gamma]\Delta = (AB)(\Gamma\Delta) = A[B(\Gamma\Delta)] = A[(B\Gamma)\Delta] = [A(B\Gamma)]\Delta$. και μπορούμε να γράφουμε $AB\Gamma\Delta$ $\forall$ από τα γινόμενα αυτά.

Γενικά επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό πινάκων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται με $A_1 A_2 \ldots A_\nu$.

Η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει για τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ τότε $AB \neq BA$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Ορισμός.

Έστω A είναι τετραγωνικός πίνακας τύπου $\nu \times \nu$. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τύπου $\nu \times \nu$ τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I$, τότε ο A λέγεται αντιστρέψιμος πίνακας και ο B ο αντίστροφος του A.

Αν ο είναι πίνακας A έχει αντίστροφο τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}. Έτσι έχουμε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Τότε έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ και } BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Άρα ο B είναι αντίστροφος του A.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A όταν $AB = I$ και $BA = I$. Αποδεικνύεται όμως ότι:

Θεώρημα

Αν για δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A, B ισχύει μια από τις ισότητες $AB = I$ και $BA = I$ τότε θα ισχύει και η άλλη.

Με βάση αυτό το θεώρημα για να αποδείξουμε ότι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας B είναι αντίστροφος ενός $\nu \times \nu$ πίνακα A αρκεί να αποδείξουμε μια μόνο από τις ισότητες $AB = I$ και $BA = I$.

Τέλος, αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ισχύουν:

(i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

(ii) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Ανάστροφος πίνακα

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ Οι γραμμές γίνονται στήλη και οι στήλη γραμμές.

Αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Θα εξετάσουμε πότε αυτός αντιστρέφεται και θα βρούμε τον αντίστροφό του.

Για να αντιστρέφεται ο A πρέπει και αρκεί να υπάρχει πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $AX = I$ ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases}$ (Σ1) και $\begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases}$ (Σ2)

Αρκεί τα συστήματα Σ1 και Σ2 να έχουν λύση. Τα συστήματα αυτά έχουν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

και $D_x = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{vmatrix} = \delta$, $D_z = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\gamma$ $D_y = \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix} = -\beta$

$D_\omega = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha$

Επομένως

Αν $D \neq 0$ τότε τα συστήματα Σ1 και Σ2 έχουν μοναδική λύση οπότε ο πίνακας A αντιστρέφεται. Η λύση του Σ1 είναι το ζεύγος (x, z) με $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\delta}{D}$ και $z = \frac{D_z}{D} = -\gamma/D$

ενώ η λύση του (Σ2) είναι το ζεύγος (y, ω) με

$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{\beta}{D}$ και $\omega = \frac{D_\omega}{D} = \frac{\alpha}{D}$

Άρα $X = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{D} & -\frac{\beta}{D} \\ -\frac{\gamma}{D} & \frac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$ οπότε ο αντίστροφος του A είναι ο πίνακας

$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

Αν $D = 0$ τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ1) και (Σ2) είναι αδύνατο οπότε ο A πίνακας δεν αντιστρέφεται! Πράγματι

α) Αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ ή $D_z \neq 0$ ή $D_\omega \neq 0$ τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα Σ1 και Σ2 θα είναι αδύνατο

β) Αν $D_x = D_y = D_z = D_\omega = 0$ τότε $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ οπότε και πάλι τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν + μόνο αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ όπου $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$

α) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται γιατί $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται, γιατί $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{bmatrix}$

Για τον A έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ Άρα:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$