# Μεθοδολογία Επίλυσης Ολόσωμου Φορέα

1. Υπολογίζουμε μήκη και γωνίες ράβδων.

2. Υπολογίζουμε πίνακα μετασχηματισμού $\Lambda$ για κάθε ράβδο

Το υπομητρώο μετασχηματισμού $\Lambda$ της κάθε ράβδου θα είναι: $\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Υπολογίζουμε $\Lambda^T$ για κάθε ράβδο. $\Lambda^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Υπολογίζουμε υπομητρώα δυσκαμψίας στο τοπικό σύστημα για κάθε ράβδο από τις σχέσεις

$$k_{ss}^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad k_{se}^i = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$k_{es}^i = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \qquad k_{ee}^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$k^i = \begin{bmatrix} k_{ss}^i & k_{se}^i \\ k_{es}^i & k_{ee}^i \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Τοπικό μητρώο δυσκαμψίας ράβδου $i$

5. Υπολογίζουμε υπομητρώα δυσκαμψίας στο γενικό σύστημα για κάθε ράβδο από τις σχέσεις.

$$\bar{K}_{ss}^i = \Lambda^{i^T} k_{ss}^i \Lambda^i, \quad \bar{K}_{se}^i = \Lambda^{i^T} k_{se} \Lambda^i, \quad \bar{K}_{es}^i = \Lambda^{i^T} k_{es}^i \Lambda^i, \quad \bar{K}_{ee}^i = \Lambda^{i^T} k_{ee} \Lambda^i$$

π.χ.

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c} \bar{k}^a_{ss} & \bar{k}^a_{se} & 0 \\ \hline \bar{k}^a_{es} & \bar{k}^a_{ee} + \bar{k}^b_{ss} & \bar{k}^b_{se} \\ \hline 0 & \bar{k}^b_{es} & \bar{k}^b_{ee} \end{array}\right] \Rightarrow$$ ολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα.

6. Φτιάχνουμε το ολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα στο γενικό σύστημα και αντικαθιστούμε με τους πίνακες από το βήμα 5.

7. Φτιάχνουμε πίνακα εξωτερικών επικόμβιων φορτίσεων $P'_{εξ}(P_x, P_ψ, M)$ (όλους τους κόμβους) $\bar{P}_{εξ}$.

8. Φτιάχνουμε πίνακα αντιδράσεων $\bar{R}$ (Μηδενίζω όπου υπάρχει στη στήριξη ελευθερία κίνησης $(x, ψ, φ)$)

π.χ.

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{1x} \\ \bar{R}_{1ψ} \\ \bar{T}_1 \\ \bar{R}_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_{3x} \\ \bar{R}_{3ψ} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{αντιδράσεις στην πάκτωση} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{αντιδράσεις στην κύλιση} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{αντιδράσεις στην άρθρωση.} \end{array}$$

π.χ.

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}_{2y} \\ \bar{θ}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{θ}_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{μετακινήσεις κόμβου 1 - πάκτωση} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{μετακινήσεις κόμβου 2 κύλιση} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{μετακινήσεις κόμβου 3 άρθρωση} \end{array}$$

βάζω μηδέν όπου δεν επιτρέπεται κίνηση.

9. Φτιάχνουμε πίνακα επικόμβιων παραμορφώσεων (μετατοπίσεις/στροφή) στο καθολικό σύστημα.

10. Υπολογίζουμε τα μητρώα δράσεων παγίωσης για την αρχή και το τέλος κάθε ράβδου στο <u>τοπικό</u> σύστημα.
Σε περίπτωση που στη ράβδο έχω κατανεμημένο φορτίο q τα μητρώα έχουν ως εξής:

$$\underset{\text{υπομητρώο αρχής}}{S^i_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ ql/2 \\ ql^2/12 \end{bmatrix} \qquad \underset{\text{υπομητρώο τέλους}}{S^i_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{bmatrix}$$

(Το q το λαμβάνουμε στο τοπικό σύστημα (-) αν πηγαίνει προς τα κάτω.)

$$S^a = \begin{bmatrix} 0 \\ q_a L_a/2 \\ q_a L_a^2/12 \\ 0 \\ q_a L_a/2 \\ -q_a L_a^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^a_s \\ \hline S^a_e \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \text{ δράσεις παγίωσης στον κόμβο start} \\ \\ \} \text{ δράσεις παγίωσης στον κόμβο end.} \end{array}$$

→ συνολικό μητρώο δράσεων παγίωσης ράβδου

11. Υπολογίζουμε τα μητρώα δράσεων παγίωσης για αρχή και τέλος κάθε ράβδου στο γενικό σύστημα.

$$\bar{S}_s = \Lambda^T \cdot S_s$$
$$\bar{S}_e = \Lambda^T \cdot S_e$$

Για ράβδους χωρίς κατανεμημένο τα παραπάνω μητρώα $S_s$ κ' $S_e$ και $\bar{S}_s$ και $\bar{S}_e$ είναι ο μηδενικός πίνακας

$$\underset{\text{τοπικό}}{S^i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_s^i \\ \\ S_e^i \end{bmatrix} \text{ και } \quad \bar{S}_s = \Lambda^T S_s^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{S}_e^i = \Lambda^{i\,T} S_e^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα
$$\underset{\text{γενικό}}{\bar{S}^i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_s^i \\ \\ \bar{S}_e^i \end{bmatrix}$$

12. Φτιάχνουμε το μητρώο δράσεων παγίωσης ολόκληρου του φορέα $\bar{S}$ (με σάρωση των κόμβων και ράβδων - όπως η σύνθεση του ολικού μητρώου δυσκαμψίας)

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \end{bmatrix}$$

Ελέγχουμε ποιες ράβδοι συντρέχουν σε κάθε κόμβο και αν συντρέχουν με την αρχή (s) ή το τέλος (e) $\bar{S}_s$, $\bar{S}_e$.

π.χ σελ 7 $\underset{\text{[illegible]}}{\bar{S}}$ $\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_s^a \\ \bar{S}_e^a + \bar{S}_s^b \\ \bar{S}_e^b \end{bmatrix}$

13. Υπολογίζουμε την ισοδύναμη επικόμβια φόρτιση

$$\bar{P}_{ισοδ} = \bar{P}_{εξ} + \bar{S} + \bar{R}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{1x} \\ \bar{P}_{1y} \\ \bar{P}_{1\varphi} \\ \bar{P}_{2x} \\ \bar{P}_{2y} \\ \bar{P}_{2\varphi} \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\bar{P}_{\varepsilon\varphi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\bar{S}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\bar{R}}$$

άγνωστα οι αντιδράσεις

14. Εξίσωση φορτίων / παραμορφώσεων : $\boxed{\bar{P}_{ισοδ} = \bar{K} \cdot \bar{U}}$ (1)

Από εξισώσεις πινάκων επιλέγω γραμμές που αντιστοιχούν σε μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας δηλαδή εκείνους που έχουν μόνο άγνωστη παραμόρφωση και γνωστή φόρτιση.

15. Φτιάχνουμε τόσες εξισώσεις όσοι οι άγνωστοι και επιλύω με όποιο τρόπο θέλω. και βρίσκω τις μετακινήσεις των παραμορφώσεων ($\bar{U}$)

16. Για την εύρεση των αντιδράσεων εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς στην εξίσωση δυσκαμψίας, χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες τιμές των παραμορφώσεων.

17. Τα εσωτερικά μεγέθη στα άκρα κάθε ράβδου είναι οι ακραίες δράσεις της ράβδου εκφρασμένες στο τοπικό σύστημα της ράβδου. Οι ακραίες δράσεις μιας ράβδου, στο τοπικό ή στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, σχετίζονται με τις ακραίες παραμορφώσεις της ράβδου, στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων μέσω των σχέσεων *

Στο τοπικό σύστημα της ράβδου i:

$$A^i = k^i \Delta^i - S^i \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} A_s^i \\ A_e^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss}^i & k_{se}^i \\ k_{es}^i & k_{ee}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s^i \\ \Delta_e^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_s^i \\ S_e^i \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta^i$ = μητρώο μετατοπίσεων (παραμορφώσεων) κόμβου i όπου $\bar{\Delta}_s^i = \bar{U}_s^i$ δηλ. μετατόπιση κόμβου αρχής (s) της ράβδου $i$

$\bar{\Delta}_e^i = \bar{U}_e^i$ δηλ. μετατόπιση κόμβου τέλου (e) της ράβδου $i$

Στο καθολικό σύστημα:

$\bar{A}_i = \bar{k}^i \bar{\Delta}^i - \bar{S}^i$ $\quad$ $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_s^i \\ \bar{A}_e^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ss}^i & \bar{k}_{se}^i \\ \bar{k}_{es}^i & \bar{k}_{ee}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_s^i \\ \bar{\Delta}_e^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{S}_s^i \\ \bar{S}_e^i \end{bmatrix}$

*

17α) Α' ΤΡΟΠΟΣ : $\bar{\Delta}_i \rightarrow \bar{A}_i \rightarrow A^i$

Α) Πρώτα υπολογίζουμε τις καθολικές ακραίες δράσεις μέσω της σχέσης

$$\bar{A}^i = \bar{k}^i \bar{\Delta}^i - \bar{S}^i$$

Β) Έπειτα μετασχηματίζουμε τις καθολικές ακραίες δράσεις σε τοπικές ακραίες δράσεις δηλαδή εσωτερικά μεγέθη μέσω της σχέσης

$$A^i = \begin{bmatrix} \Lambda^i & 0 \\ 0 & \Lambda^i \end{bmatrix} \cdot \bar{A}^i \quad ή \quad \begin{matrix} A_s^i = \Lambda^i \bar{A}_s^i \\ A_e^i = \Lambda^i \bar{A}_e^i \end{matrix}$$

όπου $\bar{A}_s^i$ και $\bar{A}_e^i$ είναι τα υπομητρώα του $\bar{A}_i$

(π.χ) για τη ράβδο $i$:

$$\bar{A}^a = \bar{k}^a \bar{\Delta}^a - \bar{S}^a \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_s^a \\ \bar{A}_e^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ss}^a & \bar{k}_{se}^a \\ \bar{k}_{es}^a & \bar{k}_{ee}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_s^a \\ \bar{\Delta}_e^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{S}_s^a \\ \bar{S}_e^a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \bar{A}_s^a = \bar{k}_{ss}^a \bar{\Delta}_s^a + \bar{k}_{se}^a \bar{\Delta}_e^a - \bar{S}_s^a \Rightarrow \\ \bar{A}_e^a = \bar{k}_{es}^a \cdot \bar{\Delta}_s^a + \bar{k}_{ee}^a \cdot \bar{\Delta}_e^a - \bar{S}_e^a \Rightarrow \end{matrix}}$$

Γ) Μετασχηματισμός στο τοπικό σύστημα:

start : $A_s^a = \Lambda^a \cdot \bar{A}_s^a$

end : $A_e^a = \Lambda^a \bar{A}_e^a$

17β) Β' ΤΡΟΠΟΣ : $\bar{\Delta}^i \rightarrow \Delta^i \rightarrow A^i$

Πρώτα υπολογίζουμε τις τοπικές ακραίες παραμορφώσεις με μετασχηματισμό των καθολικών ακραίων παραμορφώσεων μέσω της σχέσης

$$\Delta^i = \begin{bmatrix} \Lambda^i & 0 \\ 0 & \Lambda^i \end{bmatrix} \cdot \bar{\Delta}^i \quad ή \quad \left.\begin{matrix} \Delta_s^i = \Lambda^i \bar{\Delta}_s^i \\ \Delta_e^i = \Lambda^i \cdot \bar{\Delta}_e^i \end{matrix}\right\}$$

και έπειτα υπολογίζουμε τις τοπική ακραία δράσης δηλ τα επατπικά μεγέθη μέσω της σχέσης στο τοπικό σύστημα:

$$A^i = k^i \Delta^i - S^i$$

πχ ράβδος α

$$\Delta_s^a = \Lambda^a \bar{\Delta}_s^a$$
$$\Delta_e^a = \Lambda^a \bar{\Delta}_e^a$$

μετακινήσεις στο τοπικό
παίρνει τα k του τοπικού και τα S του τοπικού.

$$A^a = k^a \cdot \Delta^a - S^a \rightarrow \begin{bmatrix} A_s^a \\ A_e^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss}^a & k_{se}^a \\ k_{es}^a & k_{ee}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s^a \\ \Delta_e^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_s^a \\ S_e^a \end{bmatrix}$$

όλα τα νούμερα στο τοπικό σύστημα

Αναλυτικά.

Start: $A_s^a = k_{ss}^a \cdot \Delta_s^a + k_{se}^a \cdot \Delta_e^a - S_s^a$

end: $A_e^a = k_{es}^a \cdot \Delta_s^a + k_{ee}^a \cdot \Delta_e^a - S_e^a$