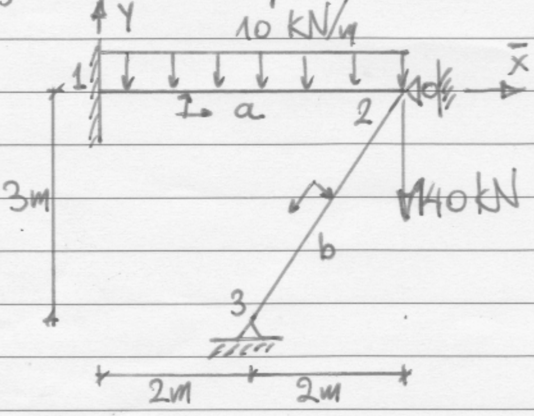
ΣΤΑΤΙΚΗ III - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Να υπολογιστεί η κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου Γ και η στροφή στον κόμβο Β. Να υπολογιστεί η ροπή κάμψης στην αριστερή παρειά του κόμβου Γ και η αξονική δύναμη στην κάτω παρειά του κόμβου Γ.



$E = 10^7$ kPa , $I = 0{,}001$ m^4

$A = 0{,}1$ m^2

Συντεταγμένες:

κόμβος κ	$\bar{x}_κ$	$\bar{y}_κ$
1	0	0
2	4	0
3	2	−3

Ράβδος	s	x_s	y_s	e	x_e	y_e	$L=\sqrt{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2}$	$\cos φ = \frac{x_e-x_s}{L}$	$\sin φ = \frac{y_e-y_s}{L}$	φ
a	1	0	0	2	4	0	4	1	0	0°
b	2	4	0	3	2	−3	3,606	−0,554700	−0,832050	236,31°

$$Λ^a = \begin{bmatrix} \cos φ^a & \sin φ^a & 0 \\ -\sin φ^a & \cos φ^a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$Λ^b = \begin{bmatrix} \cos φ^b & \sin φ^b & 0 \\ -\sin φ^b & \cos φ^b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}554700 & -0{,}832050 & 0 \\ 0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τοπικό μητρώο δυσκαμψίας ράβδου i

$$K^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \quad K_{se}^i & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ K_{ss}^i & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & K_{es}^i & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{συμμ.} & & & K_{ee}^i & & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]$$

Ράβδος a: $\frac{E_a A_a}{L_a} = \frac{10^7 \cdot 10^{-1}}{4} = 250000\ kN/m$, $\frac{12 E_a I_a}{L_a^3} = \frac{12 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{4^3} = 1875\ \frac{kN}{m}$

$\frac{6 E_a I_a}{L_a^2} = \frac{6 \cdot 10^7 10^{-3}}{4^2} = 3750\ kN$, $\frac{4 E_a I_a}{L_a} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{4} = 10000\ kNm$

$$K^a = \overset{K_{se}^a}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\ K_{ss}^a & 1875 & 3750 & 0 & -1875 & 3750 \\ & & 10000 & 0 & -3750 & 5000 \\ \hline & & & 250000 & 0 & 0 \\ & K_{es}^a & & & 1875 & -3750 \\ \text{συμμ.} & & & & K_{ee}^a & 10000 \end{array}\right]}$$

Ράβδος b: $\frac{E_b A_b}{L_b} = \frac{10^7 \cdot 10^{-1}}{3{,}606} = 277350{,}10\ kN/m$, $\frac{12 E_b I_b}{L_b^3} = \frac{12 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{3{,}606^3} = 2560{,}15\ \frac{kN}{m}$

$\frac{6 E_b I_b}{L_b^2} = \frac{6 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{3{,}606^2} = 4615{,}38\ kN$, $\frac{4 E_b I_b}{L_b} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{3{,}606} = 11094\ kNm$

$$K^b = \overset{K_{se}^b}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 277350{,}10 & 0 & 0 & -277350{,}10 & 0 & 0 \\ K_{ss}^b & 2560{,}15 & 4615{,}38 & 0 & -2560{,}15 & 4615{,}38 \\ & & 11094 & 0 & -4615{,}38 & 5547 \\ \hline & & & 277350{,}10 & 0 & 0 \\ & K_{es}^b & & & 2560{,}15 & -4615{,}38 \\ \text{συμμ.} & & & & K_{ee}^b & 11094 \end{array}\right]}$$

Καθολικό μητρώο δυσκαμψίας ράβδων

Ράβδος a:

$$\overline{K}^a = \begin{bmatrix} \Lambda^a & 0 \\ 0 & \Lambda^a \end{bmatrix}^T K^a \begin{bmatrix} \Lambda^a & 0 \\ 0 & \Lambda^a \end{bmatrix} = I K^a I = K^a = \overset{\overline{K}_{se}^a}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\ \overline{K}_{ss}^a & 1875 & 3750 & 0 & -1875 & 3750 \\ & & 10000 & 0 & -3750 & 5000 \\ \hline & & & 250000 & 0 & 0 \\ & \overline{K}_{es}^a & & & 1875 & -3750 \\ \text{συμμ.} & & & & \overline{K}_{ee}^a & 10000 \end{array}\right]}$$

Ράβδος b:

$$\bar{K}^b = \begin{bmatrix} \Lambda^b & 0 \\ 0 & \Lambda^b \end{bmatrix}^T K^b \begin{bmatrix} \Lambda^b & 0 \\ 0 & \Lambda^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}554700 & 0{,}832050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}554700 & 0{,}832050 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 277350{,}10 & 0 & 0 & -277350{,}10 & 0 & 0 \\ & 2560{,}15 & 4615{,}38 & 0 & -2560{,}15 & 4615{,}38 \\ & & 11094 & 0 & -4615{,}38 & 5547 \\ & & & 277350{,}10 & 0 & 0 \\ & \text{συμμ.} & & & 2560{,}15 & -4615{,}38 \\ & & & & & 11094 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}554700 & -0{,}832050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}554700 & -0{,}832050 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\overset{\hspace{12em}\bar{K}^b_{se}}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} 87110{,}91 & 126826{,}13 & 384923 & -87110{,}91 & -126826{,}13 & 3840{,}23 \\ & 192799{,}35 & -2560{,}15 & -126826{,}13 & -192799{,}35 & -2560{,}15 \\ \bar{K}^b_{ss} & & 11094 & -3840{,}23 & 2560{,}15 & 5547 \\ \hdashline & & & 87110{,}91 & 126826{,}13 & -3840{,}23 \\ & & & & 192799{,}35 & 2560{,}15 \\ \text{συμμ.} & \bar{K}^b_{es} & & \bar{K}^b_{ee} & & 11094 \end{array}\right]}$$

Εναλλακτικά, το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου b μπορεί να προσδιοριστεί θεωρώντας κάθε υπομητρώο του ξεχωριστά:

$$\bar{K}^b_{ss} = \Lambda^{b^T} K^b_{ss} \Lambda^b = \begin{bmatrix} -0,554700 & 0,832050 & 0 \\ -0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & 2560,15 & 4615,38 \\ 0 & 4615,38 & 11094 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -0,554700 & -0,832050 & 0 \\ 0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87110,91 & 126826,13 & 3840,23 \\ 126826,13 & 192799,35 & -2560,15 \\ 3840,23 & -2560,15 & 11094 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^b_{se} = \Lambda^{b^T} K^b_{se} \Lambda^b = \begin{bmatrix} -0,554700 & 0,832050 & 0 \\ -0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & -2560,15 & 4615,38 \\ 0 & -4615,38 & 5547 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -0,554700 & -0,832050 & 0 \\ 0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -87110,91 & -126826,13 & 3840,23 \\ -126826,13 & -192799,35 & -2560,15 \\ -3840,23 & 2560,15 & 5547 \end{bmatrix}$$

$\bar{K}^b_{es} = \Lambda^{b^T} K^b_{es} \Lambda^b$, αλλά γνωρίζουμε επίσης ότι $\bar{K}^b_{es} = \bar{K}^{b^T}_{se}$

Επομένως: $$\bar{K}^b_{es} = \begin{bmatrix} -87110,91 & -126826,13 & -3840,23 \\ -126826,13 & -192799,35 & 2560,15 \\ 3840,23 & -2560,15 & 5547 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^b_{ee} = \Lambda^{b^T} K^b_{ee} \Lambda^b = \begin{bmatrix} -0,554700 & 0,832050 & 0 \\ -0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & 2560,15 & -4615,38 \\ 0 & -4615,38 & 11094 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -0,554700 & -0,832050 & 0 \\ 0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87110,91 & 126826,13 & -3840,23 \\ 126826,13 & 192799,35 & 2560,15 \\ -3840,23 & 2560,15 & 11094 \end{bmatrix}$$

Ολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα.

$$K = \left[\begin{array}{c|c|c} \bar{K}^{a}_{ss} & \bar{K}^{a}_{se} & 0 \\ \hline \bar{K}^{a}_{es} & \bar{K}^{a}_{ee} + \bar{K}^{b}_{ss} & \bar{K}^{b}_{se} \\ \hline 0 & \bar{K}^{b}_{es} & \bar{K}^{b}_{ee} \end{array}\right]$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1875 & 3750 & 0 & -1875 & 3750 & 0 & 0 & 0 \\ & & 10000 & 0 & -3750 & 5000 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 337110{,}91 & 126826{,}13 & 3840{,}23 & -87110{,}91 & -126826{,}13 & 3840{,}23 \\ & & & & 194674{,}35 & -6310{,}15 & -126826{,}13 & -192799{,}35 & -2560{,}15 \\ & & & & & 21094 & -3840{,}23 & 2560{,}15 & 5547 \\ & \text{συμμ.} & & & & & 87110{,}91 & 126826{,}13 & -3840{,}23 \\ & & & & & & & 192799{,}35 & 2560{,}15 \\ & & & & & & & & 11094 \end{bmatrix}$$

Επικόμβια φόρτιση

Εξωτερικά φορτία

$$\bar{P}_{εξ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -140 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αντιδράσεις

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{1x} \\ \bar{R}_{1y} \\ \bar{T}_{1} \\ \bar{R}_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_{3x} \\ \bar{R}_{3y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δράσεις παγιώσεως S: Μόνο στη ράβδο a λόγω του κατανεμημένου ομοιόμορφου φορτίου $q_a = -10$ kN/m

$$\frac{q_a L_a}{2} = -20 \text{ kN} \qquad \frac{q_a L_a^2}{12} = -13{,}33 \text{ kNm}$$

Στο τοπικό σύστημα της ράβδου a:

$$S^a = \left[\begin{array}{c} 0 \\ q_a L_a/2 \\ q_a L_a^2/12 \\ \hdashline 0 \\ q_a L_a/2 \\ -q_a L_a^2/12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -20 \\ -13{,}33 \\ \hdashline 0 \\ -20 \\ +13{,}33 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} S_s^a \\ \hdashline S_e^a \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} \text{Δράσεις πακτώσεως στον κόμβο start} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} \text{Δράσεις πακτώσεως στον κόμβο end.} \end{array}$$

Στο καθολικό σύστημα:

$$\bar{S}^a = \begin{bmatrix} \Lambda^a & 0 \\ 0 & \Lambda^a \end{bmatrix}^T S^a = I S^a = S^a = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -20 \\ -13{,}33 \\ \hdashline 0 \\ -20 \\ +13{,}33 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{S}_s^a \\ \hdashline \bar{S}_e^a \end{array}\right]$$

Εναλλακτικά, θεωρώντας τα υποδιανύσματα του $\bar{S}^a$:

$$\bar{S}_s^a = \Lambda^{a^T} S_s^a = I S_s^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -13{,}33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_e^a = \Lambda^{a^T} S_e^a = I S_e^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ +13{,}33 \end{bmatrix}$$

Στη ράβδο b δεν έχουμε κατανεμημένη φόρτιση, επομένως το διάνυσμα των δράσεων πακτώσεως είναι μηδενικό:

$$S^b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} S_s^b \\ \hdashline S_e^b \end{array}\right] \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} \bar{S}_s^b = \Lambda^{b^T} S_s^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{S}_e^b = \Lambda^{b^T} S_e^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{άρα} \quad \bar{S}^b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{S}_s^b \\ \hdashline \bar{S}_e^b \end{array}\right]$$

Η σύνθεση του ολικού διανύσματος των δράσεων παγιώσεως $\bar{S}$ γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως και η σύνθεση του ολικού μητρώου δυσκαμψίας $\bar{K}$, δηλαδή με σάρωση των κόμβων ή σάρωση των ράβδων:

- Σάρωση των κόμβων:
  - Εξετάζουμε ένα-ένα τους κόμβους
  - Βρίσκουμε ποιες ράβδοι συντρέχουν σε κάθε κόμβο
  - Βρίσκουμε για καθεμιά ράβδο που συντρέχει εκεί αν ο κόμβος είναι start ή end.
  - Προσθέτουμε το $\bar{S}_s$ ή $\bar{S}_e$ της ράβδου στη σχετική θέση.

- Σάρωση των ράβδων:
  - Εξετάζουμε μία-μία τις ράβδους
  - Βρίσκουμε ποιος κόμβος είναι start και ποιος end της ράβδου
  - Προσθέτουμε αντίστοιχα $\bar{S}_s$ ή $\bar{S}_e$ της ράβδου στη σχετική θέση.

Επομένως:

$$\bar{S} = \left[\begin{array}{c} \bar{S}_s^a \\ \hline \bar{S}_e^a + \bar{S}_s^b \\ \hline \bar{S}_e^b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -20 \\ -13{,}33 \\ \hline 0 \\ -20 \\ +13{,}33 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (\text{κόμβος } 1) \\ \\ \\ (\text{κόμβος } 2) \\ \\ \\ (\text{κόμβος } 3) \\ \\ \end{array}$$

Ισοδύναμη επικόμβια φόρτιση:

$$\bar{P}_{ισοδ.} = \bar{P}_{εξ} + \bar{S} + \bar{R} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + \bar{R}_{1x} \\ 0 - 20 + \bar{R}_{1y} \\ 0 - 13{,}33 + \bar{T}_1 \\ 0 + 0 + \bar{R}_{2x} \\ -140 - 20 + 0 \\ 0 + 13{,}33 + 0 \\ 0 + 0 + \bar{R}_{3x} \\ 0 + 0 + \bar{R}_{3y} \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \bar{R}_{1x} \\ \bar{R}_{1y} - 20 \\ \bar{T}_1 - 13{,}33 \\ \hline \bar{R}_{2x} \\ -160 \\ +13{,}33 \\ \hline \bar{R}_{3x} \\ \bar{R}_{3y} \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ \bar{P}_1 \\ \\ \hline \\ \bar{P}_2 \\ \\ \hline \\ \bar{P}_3 \\ \\ \end{array}\right] \begin{array}{l} \bar{P}_{1x} \\ \bar{P}_{1y} \\ \bar{P}_{1\varphi} \\ \bar{P}_{2x} \\ \bar{P}_{2y} \\ \bar{P}_{2\varphi} \\ \bar{P}_{3x} \\ \bar{P}_{3y} \\ \bar{P}_{3\varphi} \end{array}$$

Επικόμβιες παραμορφώσεις (μετατοπίσεις/στροφές) στο καθολικό σύστημα

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}_{2y} \\ \bar{\vartheta}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\vartheta}_3 \end{bmatrix}$$

Εξίσωση φορτίων-παραμορφώσεων : $\boxed{\bar{P}_{ισοδ} = \bar{K}\,\bar{U}}$

1ος ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

1ος
ΤΡΟΠΟΣ
ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι συνθήκες στήριξης, οι εξισώσεις φορτίων-παραμορφώσεων αναδιατάσσονται για να διαχωριστούν γνωστές και άγνωστες επικόμβιες παραμορφώσεις (και αντίστοιχα άγνωστες και γνωστές επικόμβιες ισοδύναμες φορτίσεις). Συγκεκριμένα, στις πρώτες 3 θέσεις έρχονται οι βαθμοί ελευθερίας 2-μετατόπιση $\bar{y}$ και 2-στροφή και 3-στροφή και στις επόμενες 6 θέσεις οι βαθμοί ελευθερίας 1-μετατόπιση $\bar{x}$, 1-μετατόπιση $\bar{y}$, 1-στροφή, 2-μετατόπιση $\bar{x}$, 3-μετατόπιση $\bar{x}$ και 3-μετατόπιση $\bar{y}$. Αυτό επιτυγχάνεται στο $\bar{P}_{ισοδ.}$ και $\bar{U}$ με αναδιάταξη γραμμών 1,2,3,4,5,6,7,8,9 → 5,6,9,1,2,3,4,7,8 και στο $\bar{K}$ με ταυτόχρονη αντίστοιχη αναδιάταξη γραμμών και στηλών.

Αναδιάταξη του ολικού μητρώου δυσκαμψίας:

$$\bar{K}^* = \left[\begin{array}{ccc|cccccc}
 & & & & & & \bar{K}_{fc} & & \\
194674,35 & -6310,15 & -2560,15 & 0 & -1875 & -3750 & 126826,13 & -126826,13 & -192799,35 \\
\bar{K}_{ff} & 21094 & 5547 & 0 & 3750 & 5000 & 3840,23 & -3840,23 & 2560,15 \\
 & & 11094 & 0 & 0 & 0 & 3840,23 & -3840,23 & 2560,15 \\
\hdashline
 & & & 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\
 & & & & 1875 & 3750 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{K}_{cf} & & & & & 10000 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 337110,91 & -87110,91 & -126826,13 \\
 & & & & & & & 87110,91 & 126826,13 \\
συμμ. & & & & \bar{K}_{cc} & & & & 192799,35
\end{array}\right]$$

(συνεχίζεται)

1ος
ΤΡΟΠΟΣ
ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Αναδιάταξη του διανύσματος επικόμβιων ισοδύναμων φορτίσεων

$$\bar{P}^{*}_{ισοδ} \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -160 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{1x} \\ \bar{R}_{1y}-20 \\ \bar{T}_{1}-13,33 \\ \bar{R}_{2x} \\ \bar{R}_{3x} \\ \bar{R}_{3y} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \bar{P}_f \\ \\ \\ \bar{P}_c \end{array}$$

Αναδιάταξη του διανύσματος επικόμβιων παραμορφώσεων

$$\bar{U}^{*} = \left[\begin{array}{c} \bar{u}_{2y} \\ \bar{\vartheta}_{2} \\ \bar{\vartheta}_{3} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \bar{U}_f \\ \\ \\ \bar{U}_c \end{array}$$

Η εξίσωση φορτίσεων - παραμορφώσεων γράφεται:

$$\bar{K}^{*}\bar{U}^{*} = \bar{P}^{*}_{ισοδ} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}_{ff} & \bar{K}_{fc} \\ \bar{K}_{cf} & \bar{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_f \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_c \end{bmatrix}$$

ή $\bar{K}_{ff}\bar{U}_f + \bar{K}_{fc}\bar{U}_c = \bar{P}_f$ (1)

$\bar{K}_{cf}\bar{U}_f + \bar{K}_{cc}\bar{U}_c = \bar{P}_c$ (2)

Από (1): $\bar{K}_{ff}\bar{U}_f = \bar{P}_f - \cancelto{0}{\bar{K}_{fc}\bar{U}_c} \Rightarrow \bar{K}_{ff}\bar{U}_f = \bar{P}_f \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{K}_{ff}^{-1}\bar{K}_{ff}\bar{U}_f = \bar{K}_{ff}^{-1}\bar{P}_f \Rightarrow I\,\bar{U}_f = \bar{K}_{ff}^{-1}\bar{P}_f \Rightarrow \boxed{\bar{U}_f = \bar{K}_{ff}^{-1}\bar{P}_f}$

(συνεχίζεται)

1ΟΣ
ΤΡΟΠΟΣ
ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η τελευταία εξίσωση γράφεται αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{2y} \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 194674,35 & -6310,15 & -2560,15 \\ -6310,15 & 21094 & 5547 \\ -2560,15 & 5547 & 11094 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -160 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{u}_{2y} \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000811 \ m \\ 0,000505 \ rad \\ -0,000440 \ rad \end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω παραμορφώσεις ουσιαστικά είναι η λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} 194674,35\,\bar{u}_{2y} - 6310,15\,\bar{\theta}_2 - 2560,15\,\bar{\theta}_3 &= -160 \\ -6310,15\,\bar{u}_{2y} + 21094\,\bar{\theta}_2 + 5547\,\bar{\theta}_3 &= 0 \\ -2560,15\,\bar{u}_{2y} + 5547\,\bar{\theta}_2 + 11094\,\bar{\theta}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επικόμβιες φορτίσεις στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας

$$\bar{P}_c = \bar{K}_{cf}\bar{U}_f + \cancelto{0}{\bar{K}_{cc}\bar{U}_c} = \bar{K}_{cf}\bar{U}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,42 \\ 5,57 \\ -102,64 \\ 102,64 \\ 156,58 \end{bmatrix}$$

Αντιδράσεις στις στηρίξεις: $\bar{R} = \bar{P}_{ισοδ} - \bar{P}_{εξ} - \bar{S}$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,42 \\ 5,57 \\ -102,64 \\ -160 \\ 13,33 \\ 102,64 \\ 156,58 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -140 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -13,33 \\ 0 \\ -20 \\ 13,33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23,42 \\ 18,90 \\ -102,64 \\ 0 \\ 0 \\ 102,64 \\ 156,58 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ΤΕΛΟΣ)

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (απλούστερος)

2ος
ΤΡΟΠΟΣ
ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Γράφουμε την ολική εξίσωση δυσκαμψίας αναλυτικά και σημειώνουμε σε ποιον βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί κάθε γραμμή. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι : 1x, 1y, 1φ, 2x, 2y, 2φ, 3x, 3y, 3φ όπου ο αριθμός δείχνει τον κόμβο, και x= οριζόντια μετατόπιση, y= κατακόρυφη μετατόπιση, φ= στροφή.

$\bar{K}\,\bar{U} = \bar{P}_{\text{ισοδ.}} \Rightarrow$

$$\begin{array}{c}1x\\1y\\1\varphi\\2x\\2y\\2\varphi\\3x\\3y\\3\varphi\end{array}\left[\begin{array}{ccccccccc}
250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 1875 & 3750 & 0 & -1875 & 3750 & 0 & 0 & 0\\
 & & 10000 & 0 & -3750 & 5000 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 337110{,}91 & 126826{,}13 & 3840{,}23 & -87110{,}91 & -126826{,}13 & 3840{,}23\\
\boxed{0} & -1875 & -3750 & 126826{,}13 & 194674{,}35 & -6310{,}15 & -126826{,}13 & -192799{,}35 & -2560{,}15\\
0 & 3750 & 5000 & 3840{,}23 & -6310{,}15 & 21094 & -3840{,}23 & 2560{,}15 & 5547\\
 & & & & & & 87110{,}91 & 126826{,}13 & -3840{,}23\\
 & \text{συμμ.} & & & & & & 192799{,}35 & 2560{,}15\\
0 & 0 & 0 & 3840{,}23 & -2560{,}15 & 5547 & -3840{,}23 & 2560{,}15 & 11094
\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\bar{u}_{2y}\\\bar{\vartheta}_2\\0\\0\\\bar{\vartheta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{R}_{1x}\\\bar{R}_{1y}-20\\\bar{T}_1-13{,}33\\\bar{R}_{2x}\\-160\\+13{,}33\\\bar{R}_{3x}\\\bar{R}_{3y}\\0\end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε και γράφουμε αναλυτικά τις γραμμές που αντιστοιχούν σε μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τους 2y, 2φ, 3φ, εκείνους επομένως που έχουν άγνωστη παραμόρφωση και γνωστή φόρτιση.

$(\text{γραμμή } 2y)\cdot\bar{U} = \bar{P}_{2y} = -160 \Rightarrow$

$$\cancelto{0}{0\cdot 0} \cancelto{0}{-1875\cdot 0} \cancelto{0}{-3750\cdot 0} \cancelto{0}{+126826{,}13\cdot 0} + 194674{,}35\cdot\bar{u}_{2y} - 6310{,}15\cdot\bar{\vartheta}_2 \cancelto{0}{-126826{,}13\cdot 0} -$$
$$\cancelto{0}{-192799{,}35\cdot 0} - 2560{,}15\cdot\bar{\vartheta}_3 = -160 \Rightarrow$$

(εξίσωση 1) $\Rightarrow 194674{,}35\,\bar{u}_{2y} - 6310{,}15\,\bar{\vartheta}_2 - 2560{,}15\,\bar{\vartheta}_3 = -160$

$(\text{γραμμή } 2\varphi)\cdot\bar{U} = \bar{P}_{2\varphi} = +13{,}33 \Rightarrow$

$$\cancelto{0}{0\cdot 0} \cancelto{0}{+3750\cdot 0} \cancelto{0}{+5000\cdot 0} \cancelto{0}{+3840{,}23\cdot 0} - 6310{,}15\cdot\bar{u}_{2y} + 21094\cdot\bar{\vartheta}_2 \cancelto{0}{-3840{,}23\cdot 0} +$$
$$\cancelto{0}{+2560{,}15\cdot 0} + 5547\cdot\bar{\vartheta}_3 = +13{,}33 \Rightarrow$$

(εξίσωση 2) $\Rightarrow -6310{,}15\,\bar{u}_{2y} + 21094\,\bar{\vartheta}_2 + 5547\,\bar{\vartheta}_3 = +13{,}33$

(συνεχίζεται)

2ΟΣ
ΤΡΟΠΟΣ
ΕΠΙΛΥΣΗΣ

$(\text{γραμμή } 3\varphi)\cdot\bar{U} = \bar{P}_{3\varphi} = 0 \Rightarrow$

$\cancelto{0}{0\cdot 0} + \cancelto{0}{0\cdot 0} + \cancelto{0}{0\cdot 0} + \cancelto{0}{3840{,}23\cdot 0} - 2560{,}15\cdot\bar{u}_{2y} + 5547\bar{\theta}_2 - \cancelto{0}{3840{,}23\cdot 0} +$
$+ \cancelto{0}{2560{,}15\cdot 0} + 11094\cdot\bar{\theta}_3 = 0 \Rightarrow$

(εξίσωση 3) $\Rightarrow -2560{,}15\cdot\bar{u}_{2y} + 5547\bar{\theta}_2 + 11094\bar{\theta}_3 = 0$

Το προς επίλυση σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 194674{,}35 & -6310{,}15 & -2560{,}15 \\ -6310{,}15 & 21094 & 5547 \\ -2560{,}15 & 5547 & 11094 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_{2y} \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -160 \\ +13{,}33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Παρατηρούμε ότι το προς επίλυση σύστημα είναι ταυτόσημο με το σύστημα $\bar{K}_{ff}\bar{U}_f = \bar{P}_f$ του 1ου Τρόπου Επίλυσης)

Επιλύουμε το σύστημα με όποιο τρόπο θέλουμε (αντιστροφή του μητρώου ή κλασική απαλοιφή Gauss), και βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{2y} \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000811 \ m \\ 0{,}000505 \ rad \\ -0{,}000440 \ rad \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση των αντιδράσεων εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς στην εξίσωση δυσκαμψίας, χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες τιμές $\bar{u}_{2y}$, $\bar{\theta}_2$ και $\bar{\theta}_3$. Για συντομία, παρακάτω παραλείπονται οι όροι που είναι γινόμενο μηδενικού στοιχείου του $\bar{U}$.

$(\text{γραμμή } 1x)\cdot\bar{U} = \bar{R}_{1x} \Rightarrow \bar{R}_{1x} = 0\cdot\bar{u}_{2y} + 0\cdot\bar{\theta}_2 + 0\bar{\theta}_3 \Rightarrow \bar{R}_{1x} = 0$

$(\text{γραμμή } 1y)\cdot\bar{U} = \bar{R}_{1y} - 20 \Rightarrow \bar{R}_{1y} - 20 = -1875\cdot\bar{u}_{2y} + 3750\cdot\bar{\theta}_2 + 0\cdot\bar{\theta}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{R}_{1y} = \left[-1875\cdot(-0{,}000811) + 3750\cdot 0{,}000505\right] + 20 = 23{,}42 \text{ kN}.$

$(\text{γραμμή } 1\varphi)\cdot\bar{U} = \bar{T}_1 - 13{,}33 \Rightarrow \bar{T}_1 - 13{,}33 = -3750\cdot\bar{u}_{2y} + 5000\cdot\bar{\theta}_2 + 0\cdot\bar{\theta}_3 \Rightarrow$

(συνεχίζεται) $\Rightarrow \bar{T}_1 = \left[-3750\cdot(-0{,}000811) + 5000\cdot 0{,}000505\right] + 13{,}33 = 18{,}90 \text{ kNm}$

2ος ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

(γραμμή 2x)$\cdot \bar{U} = \bar{R}_{2x} \Rightarrow \bar{R}_{2x} = 126826,13 \cdot \bar{u}_{2y} + 3840,23\,\bar{\theta}_2 + 3840,23\,\bar{\theta}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{R}_{2x} = 126826,23 \cdot (-0,000811) + 3840,23 \cdot 0,000505 + 3840,23 \cdot (-0,000440) = -102,64\,kN$

(γραμμή 3x)$\cdot \bar{U} = \bar{R}_{3x} \Rightarrow \bar{R}_{3x} = -126826,13 \cdot \bar{u}_{2y} - 3840,23\,\bar{\theta}_2 - 3840,23\,\bar{\theta}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{R}_{3x} = -126826,23 \cdot (-0,000811) - 3840,23 \cdot 0,000505 - 3840,23 \cdot (-0,000440) = 102,64\,kN$

(γραμμή 3y)$\cdot \bar{U} = \bar{R}_{3y} \Rightarrow \bar{R}_{3y} = -192799,35\,\bar{u}_{2y} + 2560,15 \cdot \bar{\theta}_2 + 2560,15 \cdot \bar{\theta}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{R}_{3y} = -192799,35 \cdot (-0,000811) + 2560,15 \cdot 0,000505 + 2560,15(-0,000440) = 156,58\,kNm$

Αντιδράσεις:
$\bar{R}_{1x} = 0$
$\bar{R}_{1y} = 23,42\,kN$
$\bar{T}_1 = 18,90\,kNm$
$\bar{R}_{2x} = -102,64\,kN$
$\bar{R}_{3x} = 102,64\,kN$
$\bar{R}_{3y} = 156,58\,kNm$

(ΤΕΛΟΣ)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ (ΕΝΤΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ).

Τα εντατικά μεγέθη στα άκρα κάθε ράβδου είναι οι ακραίες δράσεις της ράβδου εκφρασμένες στο τοπικό σύστημα της ράβδου.

Οι ακραίες δράσεις μιας ράβδου, στο τοπικό ή στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, σχετίζεται με τις ακραίες παραμορφώσεις της ράβδου, στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων μέσω των σχέσεων:

Στο τοπικό σύστημα της ράβδου i:

$$A^i = K^i \Delta^i - S^i \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} A_s^i \\ A_e^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss}^i & K_{se}^i \\ K_{es}^i & K_{ee}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s^i \\ \Delta_e^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_s^i \\ S_e^i \end{bmatrix}$$

όπου: A^i το διάνυσμα ακραίων δράσεων (6×1) με A^i_s και A^i_e τα υποδιανύσματα (3×1) που αναφέρονται στον κόμβο start και end, αντίστοιχα·

Δ^i το διάνυσμα ακραίων παραμορφώσεων (6×1) με Δ^i_s και Δ^i_e τα υποδιανύσματα (3×1) κόμβου start και end, αντίστοιχα.

K^i το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου i.
S^i το τοπικό διάνυσμα των δράσεων παγιώσεως.

Στο καθολικό σύστημα:

$$\bar{A}^i = \bar{K}^i \bar{\Delta}^i - \bar{S}^i \qquad \begin{bmatrix} \bar{A}^i_s \\ \bar{A}^i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}^i_{ss} & \bar{K}^i_{se} \\ \bar{K}^i_{es} & \bar{K}^i_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^i_s \\ \bar{\Delta}^i_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{S}^i_s \\ \bar{S}^i_e \end{bmatrix}$$

όπου $\bar{A}^i$, $\bar{\Delta}^i$, και τα υποδιανύσματα $\bar{A}^i_s$, $\bar{A}^i_e$, $\bar{\Delta}^i_s$, $\bar{\Delta}^i_e$, αντίστοιχα όπως πιο πάνω, αλλά στο καθολικό σύστημα. $\bar{K}^i$ είναι το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου i. $\bar{S}^i$ είναι το καθολικό διάνυσμα των δράσεων παγιώσεως.

Το διάνυσμα $\bar{\Delta}^i$ περιλαμβάνει επικόμβιες παραμορφώσεις στο καθολικό σύστημα, οπότε τα υποδιανύσματα $\bar{\Delta}^i_s$ και $\bar{\Delta}^i_e$ λαμβάνονται από το διάνυσμα επικόμβιων παραμορφώσεων $\bar{U}$:

$\bar{\Delta}^i_s = \bar{U}_m$ (3×1) όπου m ο καθολικός δείκτης αρίθμησης του κόμβου start της ράβδου i

$\bar{\Delta}^i_e = \bar{U}_n$ (3×1) όπου n ο καθολικός δείκτης αρίθμησης του κόμβου end της ράβδου i.

Στην περίπτωση του παραδείγματος αυτού, έχουμε:

Ράβδος a: $$\bar{\Delta}^a = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^a_s \\ \bar{\Delta}^a_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ -0{,}000811 \\ 0{,}000505 \end{array}\right]$$

Ράβδος b: $\bar{\Delta}^b = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^b_s \\ \bar{\Delta}^b_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,000811 \\ 0,000505 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix}$

Εύρεση των τοπικών ακραίων δράσεων (εντατικών μεγεθών):

1ος ΤΡΟΠΟΣ

1ος ΤΡΟΠΟΣ : $\bar{\Delta}^i \to \bar{A}^i \to A^i$

Πρώτα υπολογίζουμε τις καθολικές ακραίες δράσεις μέσω της σχέσης

$$\bar{A}^i = \bar{K}^i \bar{\Delta}^i - \bar{S}^i$$

και έπειτα μετασχηματίζουμε τις καθολικές ακραίες δράσεις σε τοπικές ακραίες δράσεις, δηλαδή εντατικά μεγέθη, μέσω της σχέσης:

$$A^i = \begin{bmatrix} \Lambda^i & 0 \\ 0 & \Lambda^i \end{bmatrix} \bar{A}^i \quad ή \quad \begin{cases} A^i_s = \Lambda^i \bar{A}^i_s \\ A^i_e = \Lambda^i \bar{A}^i_e . \end{cases}$$

Ράβδος a:

$$\bar{A}^a = \bar{K}^a \bar{\Delta}^a - \bar{S}^a \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}^a_s \\ \bar{A}^a_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}^a_{ss} & \bar{K}^a_{se} \\ \bar{K}^a_{es} & \bar{K}^a_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^a_s \\ \bar{\Delta}^a_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{S}^a_s \\ \bar{S}^a_e \end{bmatrix}$$

αναλυτικά: $\bar{A}^a_s = \bar{K}^a_{ss} \Delta^a_s + \bar{K}^a_{se} \Delta^a_e - \bar{S}^a_s =$

$$\begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 1875 & 3750 \\ 0 & 3750 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -1875 & 3750 \\ 0 & -3750 & 5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,000811 \\ 0,000505 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -13,33 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1875 \cdot 0,000811 + 3750 \cdot 0,000505 + 20 \\ 3750 \cdot 0,000811 + 5000 \cdot 0,000505 + 13,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23,42 \\ 18,90 \end{bmatrix}$$ στον κόμβο start

(συνεχίζεται)

1ος ΤΡΟΠΟΣ

$$\bar{A}_e^a = \bar{K}_{es}^a \bar{\Delta}_s^a + \bar{K}_{ee}^a \bar{\Delta}_e^a - \bar{S}_e^a =$$

$$\begin{bmatrix} -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -1875 & -3750 \\ 0 & 3750 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 1875 & -3750 \\ 0 & -3750 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,000811 \\ 0,000505 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ +13,33 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1875 \cdot 0,000811 - 3750 \cdot 0,000505 + 20 \\ 3750 \cdot 0,000811 + 10000 \cdot 0,000505 - 13,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16,58 \\ -5,24 \end{bmatrix}$$ στον κόμβο end.

Μετασχηματισμός στο τοπικό σύστημα:

start: $$A_s^a = \Lambda^a \bar{A}_s^a = I \bar{A}_s^a = \bar{A}_s^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 23,42 \\ 18,90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_s^a \\ Q_s^a \\ M_s^a \end{bmatrix}$$
αξονική δύναμη
τέμνουσα δύναμη
ροπή κάμψης.

end: $$A_e^a = \Lambda^a \bar{A}_e^a = I \bar{A}_e^a = \bar{A}_e^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 16,58 \\ -5,24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^a \\ Q_e^a \\ M_e^a \end{bmatrix}$$
αξονική δύναμη
τέμνουσα δύναμη
ροπή κάμψης.

Ράβδος b:

$$\bar{A}^b = \bar{K}^b \bar{\Delta}^b - \bar{S}^b \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_s^b \\ \bar{A}_e^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ss}^b & \bar{K}_{se}^b \\ \bar{K}_{es}^b & \bar{K}_{ee}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_s^b \\ \bar{\Delta}_e^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{S}_s^b \\ \bar{S}_e^b \end{bmatrix}$$

αναλυτικά: $$\bar{A}_s^b = \bar{K}_{ss}^b \bar{\Delta}_s^b + \bar{K}_{se}^b \bar{\Delta}_e^b - \bar{S}_s^b =$$

$$\begin{bmatrix} 87110,91 & 126826,13 & 3840,23 \\ 126826,13 & 192799,35 & -2560,15 \\ 3840,23 & -2560,15 & 11094 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,000811 \\ 0,000505 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -87110,91 & -126826,13 & 3840,23 \\ -126826,13 & -192799,35 & -2560,15 \\ -3840,23 & 2560,15 & 5547 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -126826,13 \cdot 0,000811 + 3840,23 \cdot 0,000505 - 3840,23 \cdot 0,000440 \\ -192799,35 \cdot 0,000811 - 2560,15 \cdot 0,000505 + 2560,15 \cdot 0,000440 \\ 2560,15 \cdot 0,000811 + 11094 \cdot 0,000505 - 5547 \cdot 0,000440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -102,64 \\ -156,58 \\ 5,24 \end{bmatrix}$$ στον κόμβο start

(συνεχίζεται)

1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ

$$\bar{A}_e^b = \bar{K}_{es}^b \bar{\Delta}_s^b + \bar{K}_{ee}^b \bar{\Delta}_e^b - \bar{S}_e^b =$$

$$\begin{bmatrix} -87110{,}91 & -126826{,}13 & -3840{,}23 \\ -126826{,}13 & -192799{,}35 & 2560{,}15 \\ 3840{,}23 & -2560{,}15 & 5547 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}000811 \\ 0{,}000505 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 87110{,}91 & 126826{,}13 & -3840{,}23 \\ 126826{,}13 & 192799{,}35 & 2560{,}15 \\ -3840{,}23 & 2560{,}15 & 11094 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}000440 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 126826{,}13 \cdot 0{,}000811 - 3840{,}23 \cdot 0{,}000505 + 3840{,}23 \cdot 0{,}000440 \\ 192799{,}35 \cdot 0{,}000811 + 2560{,}15 \cdot 0{,}000505 - 2560{,}15 \cdot 0{,}000440 \\ 2560{,}15 \cdot 0{,}000811 + 5547 \cdot 0{,}000505 - 11094 \cdot 0{,}000440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102{,}64 \\ 156{,}58 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{στον κόμβο end.}$$

Μετασχηματισμός

start: $$A_s^b = \Lambda^b \bar{A}_s^b = \begin{bmatrix} -0{,}554700 & -0{,}832050 & 0 \\ 0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -102{,}64 \\ -156{,}58 \\ 5{,}24 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}554700 \cdot 102{,}64 + 0{,}832050 \cdot 156{,}58 \\ -0{,}832050 \cdot 102{,}64 + 0{,}554700 \cdot 156{,}58 \\ 5{,}24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187{,}22 \\ 1{,}45 \\ 5{,}24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_s^b \\ Q_s^b \\ M_s^b \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης} \end{matrix}$$

end: $$A_e^b = \Lambda^b \bar{A}_e^b = \begin{bmatrix} -0{,}554700 & -0{,}832050 & 0 \\ 0{,}832050 & -0{,}554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 102{,}64 \\ 156{,}58 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}554700 \cdot 102{,}64 - 0{,}832050 \cdot 156{,}58 \\ 0{,}832050 \cdot 102{,}64 - 0{,}554700 \cdot 156{,}58 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187{,}22 \\ -1{,}45 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^b \\ Q_e^b \\ M_e^b \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης.} \end{matrix}$$

(ΤΕΛΟΣ)

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ : $\bar{\Delta}^i \rightarrow \Delta^i \rightarrow A^i$

Πρώτα υπολογίζουμε τις τοπικές ακραίες παραμορφώσεις, με μετασχηματισμό των καθολικών ακραίων παραμορφώσεων, μέσω της σχέσης:

$$\Delta^i = \begin{bmatrix} \Lambda^i & 0 \\ 0 & \Lambda^i \end{bmatrix} \bar{\Delta}^i \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \Delta_s^i = \Lambda^i \bar{\Delta}_s^i \\ \Delta_e^i = \Lambda^i \bar{\Delta}_e^i \end{cases}$$

(συνεχίζεται)

2ος ΤΡΟΠΟΣ

και έπειτα υπολογίζουμε τις τοπικές ακραίες δράσεις, δηλαδή τα εντατικά μεγέθη, μέσω της σχέσης στο τοπικό σύστημα:

$$A^i = K^i \Delta^i - S^i$$

Ράβδος a:

$$\Delta_s^a = \Lambda^a \bar{\Delta}_s^a = I \bar{\Delta}_s^a = \bar{\Delta}_s^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_e^a = \Lambda^a \bar{\Delta}_e^a = I \bar{\Delta}_e^a = \bar{\Delta}_e^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}000811 \\ 0{,}000505 \end{bmatrix}$$

$$A^a = K^a \Delta^a - S^a \rightarrow \begin{bmatrix} A_s^a \\ A_e^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss}^a & K_{se}^a \\ K_{es}^a & K_{ee}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s^a \\ \Delta_e^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_s^a \\ S_e^a \end{bmatrix}$$

αναλυτικά:

start: $A_s^a = K_{ss}^a \Delta_s^a + K_{se}^a \Delta_e^a - S_s^a =$

$$= \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 1875 & 3750 \\ 0 & 3750 & 10000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -1875 & 3750 \\ 0 & -3750 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}000811 \\ 0{,}000505 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -13{,}33 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 23{,}42 \\ 18{,}90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_s^a \\ Q_s^a \\ M_s^a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης} \end{array}$$

end: $A_e^a = K_{es}^a \Delta_s^a + K_{ee}^a \Delta_e^a - S_e^a =$

$$= \begin{bmatrix} -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -1875 & -3750 \\ 0 & 3750 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 1875 & -3750 \\ 0 & -3750 & 10000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}000811 \\ 0{,}000505 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ +13{,}33 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 16{,}58 \\ -5{,}24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^a \\ Q_e^a \\ M_e^a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης} \end{array}$$

(συνεχίζεται)

2ος ΤΡΟΠΟΣ

Ράβδος b:

$$\Delta_s^b = \Lambda^b \bar{\Delta}_s^b = \begin{bmatrix} -0,554700 & -0,832050 & 0 \\ 0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0,000811 \\ 0,000505 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,832050 \cdot 0,000811 \\ 0,554700 \cdot 0,000811 \\ 0,000505 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000675 \\ 0,000450 \\ 0,000505 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_e^b = \Lambda^b \bar{\Delta}_e^b = \begin{bmatrix} -0,554700 & -0,832050 & 0 \\ 0,832050 & -0,554700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix}$$

$$A^b = K^b \Delta^b - S^b \rightarrow \begin{bmatrix} A_s^b \\ A_e^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss}^b & K_{se}^b \\ K_{es}^b & K_{ee}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s^b \\ \Delta_e^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_s^b \\ S_e^b \end{bmatrix}$$

αναλυτικά:

start: $A_s^b = K_{ss}^b \Delta_s^b + K_{se}^b \Delta_e^b - S_s^b =$

$$\begin{bmatrix} 277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & 2560,15 & 4615,38 \\ 0 & 4615,38 & 11094 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,000675 \\ 0,000450 \\ 0,000505 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & -2560,15 & 4615,38 \\ 0 & -4615,38 & 5547 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 277350,10 \cdot 0,000675 \\ 2560,15 \cdot 0,000450 + 4615,38 \cdot 0,000505 - 4615,38 \cdot 0,000440 \\ 4615,38 \cdot 0,000450 + 11094 \cdot 0,000505 - 5547 \cdot 0,000440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187,22 \\ 1,45 \\ 5,24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης} \end{array}$$

end: $A_e^b = K_{es}^b \Delta_s^b + K_{ee}^b \Delta_e^b - S_e^b =$

$$\begin{bmatrix} -277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & -2560,15 & -4615,38 \\ 0 & 4615,38 & 5547 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,000675 \\ 0,000450 \\ 0,000505 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 277350,10 & 0 & 0 \\ 0 & 2560,15 & -4615,38 \\ 0 & -4615,38 & 11094 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000440 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -277350,10 \cdot 0,000675 \\ -2560,15 \cdot 0,000450 - 4615,38 \cdot 0,000505 + 4615,38 \cdot 0,000440 \\ 4615,38 \cdot 0,000450 + 5547 \cdot 0,000505 - 11094 \cdot 0,000440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187,22 \\ -1,45 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{αξονική δύναμη} \\ \text{τέμνουσα δύναμη} \\ \text{ροπή κάμψης} \end{array}$$

(ΤΕΛΟΣ)